

Cours de physique-chimie
MPSI 2024-2025

Quentin Roveillo

19 mars 2025



Table des matières

I	Signaux	3
1	Lois de l'électrocinétique	5
2	Circuits linéaires du premier ordre	11
3	Circuits linéaires du deuxième ordre	19
4	Régime des oscillations forcées et filtre d'ordre 1	27
5	Filtres d'ordre 2 et résonance	35
6	Champ magnétique et ses actions	45
7	Circuit fixe dans un champ magnétique variable	49
8	Conversion électromécanique de puissance	53
II	Mécanique	57
1	Cinématique du point matériel	59
2	Dynamique du point matériel	67
3	Les oscillateurs mécanique	75
4	Énergie, travail, puissance	79
5	Mouvement de particules chargées	87
6	Loi du moment cinétique	93
7	Champ de force centrale conservatif	97
8	Introduction à la mécanique du solide	105
III	Ondes	111
1	Lois de l'optique géométrique	113
2	Formation des images	119
3	Propagation d'un signal	125
4	Introduction à la mécanique quantique	131
IV	Chimie	137
1	Molécules et solvants	139
2	Transformation de la matière	147
3	Équilibre acido-basique en solution aqueuse	153
4	Cinétique chimique	163
5	Solides cristallins	171
6	Dissolution et précipitation	177
7	Réaction d'oxydo-réduction	181
8	Diagramme potentiel-pH	187
V	Thermodynamique	193
1	Introduction à la thermodynamique	195
2	Énergie échangées, transformations	201
3	Le premier principe	209
4	Le second principe	215
5	Machines thermiques	221

Première partie

Signaux

Liste des chapitres Signaux

1 Lois de l'électrocinétique	5
1 Les grandeurs électriques :	5
2 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :	6
3 Dipôles linéaires :	7
4 Associations de résistance :	9
2 Circuits linéaires du premier ordre	11
1 Généralités :	11
2 Réponse à un échelon du circuit RC	13
3 Régime libre d'un circuit RC	16
4 Circuit RL	17
5 Capacité numérique : Méthode d'Euler	18
3 Circuits linéaires du deuxième ordre	19
1 Modèle de l'oscillateur harmonique électrique	19
2 Oscillateur électrique amorti	21
3 Régime apériodique	22
4 Régime critique	23
5 Régime pseudo-périodique	24
6 Exemples et remarques	25
4 Régime des oscillations forcées et filtre d'ordre 1	27
1 Régime sinusoïdal forcé :	27
2 Étude d'un circuit :	29
3 Description d'un filtre	30
4 Filtre passe-bas d'ordre 1	31
5 Filtre passe-haut d'ordre 1	32
6 Influence du circuit	33
5 Filtres d'ordre 2 et résonance	35
1 Modèles de filtres d'ordre 2	35
2 Passe-bande d'ordre 2	35
3 Résonance d'un passe-bande d'ordre 2	36
4 Résonance d'un passe-bas d'ordre 2	39
5 Signaux périodiques	41
6 Capacité numérique : Filtrage numérique d'un signal périodique	43
6 Champ magnétique et ses actions	45
1 Champ magnétique	45
2 Actions d'un champ magnétique	46
7 Circuit fixe dans un champ magnétique variable	49
1 Lois de l'induction	49
2 Auto-induction	50
3 Induction mutuelle	51

8	Conversion électromécanique de puissance	53
1	Rail de Laplace : Conversion mécanique-électrique	53
2	Rotation autour d'un axe fixe d'une spire carré	54
3	Conversion de puissance électrique en puissance mécanique	55

Signaux 1 : Lois de l'électrocinétique

1 Les grandeurs électriques :

Remarque : Contexte

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude de circuit électrique simple. On se restreint à des circuits de taille de l'ordre du mètre. Pour ce chapitre on se contentera uniquement d'étudier les régimes continu, c'est-à-dire que toutes les grandeurs seront constante par rapport au temps. Cependant toutes les propriétés restent valable en régime dépendant du temps.

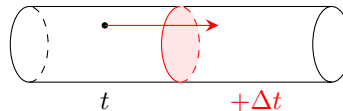
Definition : La charge électrique

La charge électrique est une grandeur scalaire vérifiant les propriétés suivantes :

- La charge peut être positive ou négative, par convention la charge d'un électron est négative.
- La charge est une grandeur additive.
- La charge est une grandeur conservative.
- La charge est une grandeur quantifiée. On définit la charge élémentaire notée $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Une charge ne peut être qu'un multiple de e de telle sorte que : $q = \pm Ze$.

Definition : L'intensité du courant électrique

On définit l'intensité du courant I dans un volume où les charges se déplacent comme le nombre de charge positive Δq qui traverse une section du volume pendant une durée Δt .



On peut alors calculer l'intensité du courant I :

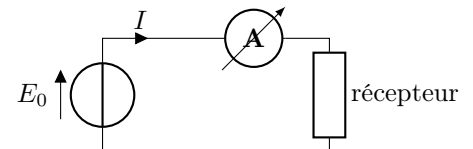
$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (\text{A})$$

Comme les porteurs de charges sont les électrons, le sens du courant est opposé au sens de déplacement des électrons.



Propriété : Mesure d'un courant (schéma)

On place un ampèremètre en série dans le circuit pour mesurer un courant.



Definition : Le potentiel électrique

Le potentiel électrique est proportionnel à l'énergie potentielle électrique du circuit et s'exprime en V. C'est lui qui met en mouvement les électrons qui sont les porteurs de charges.

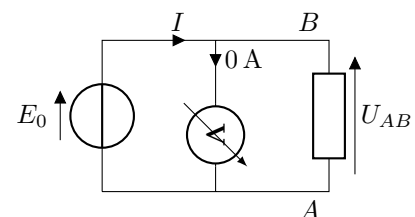
On définit généralement comme potentiel nul, la masse ou la borne - d'un générateur ou d'une pile.

Definition : La tension électrique

On définit dans un circuit la tension comme la différence de potentiel électrique entre deux points du circuit :

$$U_{AB} = V_B - V_A \text{ exprimé en V}$$

Pour mesurer une tension on utilise un voltmètre. Il doit être relié à ces deux points en parallèle du circuit.



Definition : Dimension d'une grandeur

On a défini arbitrairement 7 dimensions fondamentales, à partir desquelles on peut construire toutes les autres :

- la longueur notée L ;

- le temps noté T ;
- la masse notée M ;
- l'intensité du courant électrique notée I ;
- la température notée Θ ;
- la quantité de matière notée n ;
- l'intensité lumineuse notée J .

Pour une grandeur quelconque G , la dimension de G sera noté $[G]$. Si $[G] = L$ on dira " G est homogène à une longueur". Si G est sans dimension on notera alors $[G] = 1$.

Remarque : Ordre de grandeurs

Tensions :

- L'électronique signal : $U \sim 10$ V.
- L'électrotechnique : 230 V ;
- Orages : 500 MV ;

Intensité du courant :

- L'électronique signal : $I \sim 1$ mA.
- L'électrotechnique : 10^2 A ;
- Orages : 10^4 A ;
- Seuil de perception par le corps : 1 mA

Remarque : Notation régime continu/régime variable

Pour une tension stationnaire (continue), on note U en majuscule. Pour une tension variable, on note $u(t)$ en miniscule. Idem pour $I/i(t)$.

2 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :

Definition : Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

Lorsqu'on allume un interrupteur, le courant électrique ne traverse pas immédiatement la lampe. Il existe un délai de propagation qui est égal à environ $\frac{L}{c}$, où L est la longueur du fil entre l'interrupteur et la lampe et c la vitesse de la lumière dans le vide.

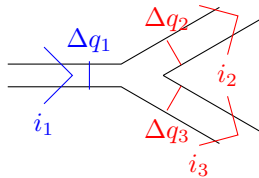
On se placera toujours dans l'ARQS, c'est-à-dire qu'on néglige la propagation des ondes dans le circuit. En conséquence, dans un fil électrique le courant est le même partout !

On peut se placer dans ce cadre si le temps Δt de propagation des ondes dans le circuit est **petit** devant le temps caractéristique de variation de la source :

$$\Delta t = \frac{L}{c} \ll T$$

Loi de Kirchhoff des nœuds

Soit un nœud défini comme la jonction entre plusieurs fil, la conservation de la charge nous permet de dire que :



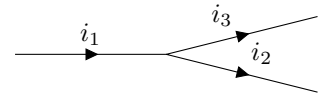
La charge contenue dans le nœud entre t et $t + \Delta t$ varie de $\Delta q = 0$.
Par conservation de la charge on peut également écrire :

$$\Delta q = \Delta q_1 - \Delta q_2 - \Delta q_3$$

Si on divise par Δt on obtient la loi

des nœuds :

$$i_1 = i_2 + i_3$$



Loi de Kirchhoff des mailles

Une maille correspond à une boucle de conducteur dans un circuit.

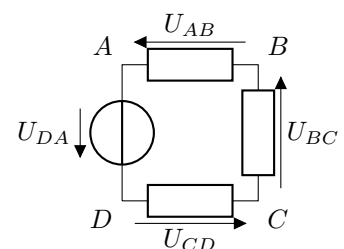
On considère un circuit à une seule maille :

$$V_C - V_C = V_C - V_D + V_D - V_A + V_A - V_B + V_B - V_C$$

$$0 = U_{CD} + U_{DA} + U_{AB} + U_{BC}$$

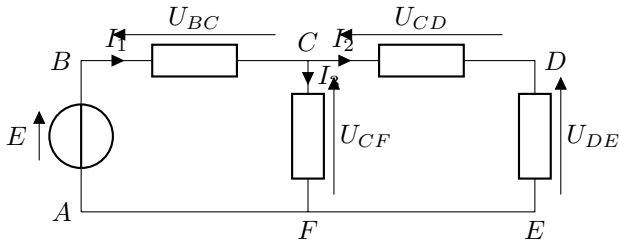
On en déduit également que $U_{AB} = -U_{BA}$.

La somme des tensions en convention générateur = la somme des tensions en convention récepteur.



Exemple : Circuit à deux mailles

Soit le circuit suivant :



On applique la loi des mailles à la maille ABCF :

$$E = U_{BC} + U_{CF}$$

On applique la loi des mailles à la maille ABDE :

$$E = U_{BC} + U_{CD} + U_{DE}$$

On peut aussi appliquer la loi des mailles à la maille CDEF :

$$U_{CF} = U_{CD} + U_{DE}$$

Pour un circuit à deux mailles on a deux équations indépendante maximum. La troisième équation peut se déduire des deux autres.

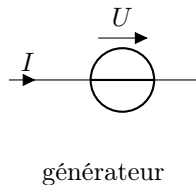
On peut également appliquer la loi des nœuds au nœud C :

$$I_1 = I_2 + I_3$$

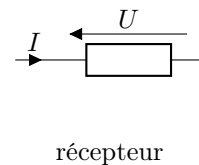
Definition : Convention générateur/récepteur

Il n'y a pas de sens naturel pour les tensions a priori. On définit alors les conventions suivantes :

- On définit la convention générateur lorsque le courant et la tension sont fléchés dans le même sens :



- On définit la convention récepteur quand la tension et le courant son fléchés dans des sens opposés :

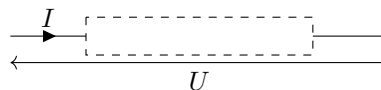


3 Dipôles linéaires :

Definition : Dipôle linéaire

En électricité, un dipôle est un élément qui possède deux bornes. Le courant entre par une borne et sort par l'autre avec la même intensité.

On peut pour un dipôle tracer la caractéristique statique en régime stationnaire $I = f(U)$.



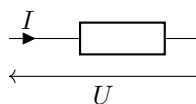
On définit un dipôle linéaire si sa caractéristique peut être modélisée par une droite affine.

Definition : Puissance

La puissance d'un dipôle dépend de la convention choisie.

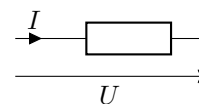
- En convention récepteur on calcule la puissance reçue par le dipôle :

$$P_R(t) = u(t)i(t) \text{ ou } P_R = UI$$



- En convention générateur on calcule la puissance fournie par le dipôle :

$$P_G(t) = u(t)i(t) \text{ ou } P_G = UI$$



Propriété : Dimension d'une puissance et d'une tension

On peut calculer la dimension fondamentale d'une puissance à l'aide des formules de mécanique connues en terminale :

$$P = \frac{dE}{dt} \implies [P] = [E]/T \quad \text{et } \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \implies [E] = ML^2T^{-2} \implies [P] = ML^2T^{-3}$$

$$[U] = [P]/I = ML^2T^{-3}I^{-1}$$

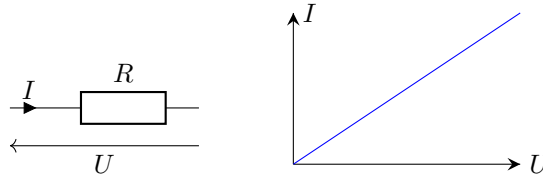
Propriété : Le conducteur ohmique

En convention récepteur un conducteur ohmique est caractérisé par une résistance R qui relie la tension à ses bornes U à l'intensité du courant I qui le traverse grâce à la loi d'Ohm :

$$u(t) = Ri(t)$$

La résistance R s'exprime en Ohm (Ω). Son inverse $G = \frac{1}{R}$ est la conductance, elle s'exprime en Siemens (S).

On schématise une résistance de la manière suivante et on peut en tracer la caractéristique



La puissance dissipée par effet joule dans une résistance s'exprime en convention récepteur comme la puissance reçue par le dipôle :

$$P = u(t)i(t) = Ri^2(t)$$

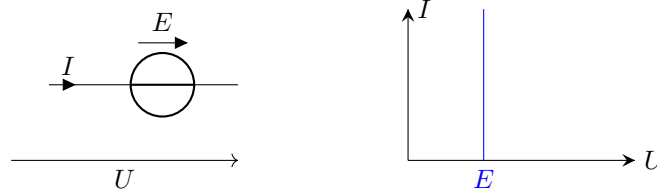
Propriété : Dimension d'une résistance

À l'aide de la loi d'Ohm on peut exprimer la dimension d'une résistance $[R]$ en fonction de la dimension d'une tension $[U]$ et de la dimension fondamentale de l'intensité du courant I :

$$[R] = [U]/I = ML^2T^{-3}I^{-2}$$

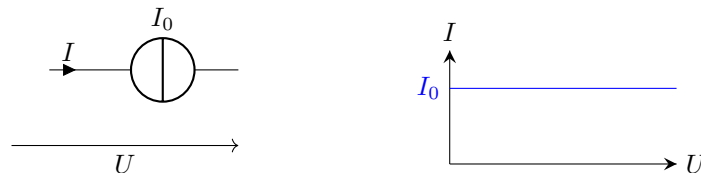
Propriété : Générateur idéal de tension

On définit le générateur idéal de tension de force électromotrice (f.e.m.) E comme un dipôle dont la tension vaut E et est constante quelque soit l'intensité du courant délivré. On peut le schématiser et représenter la caractéristique :



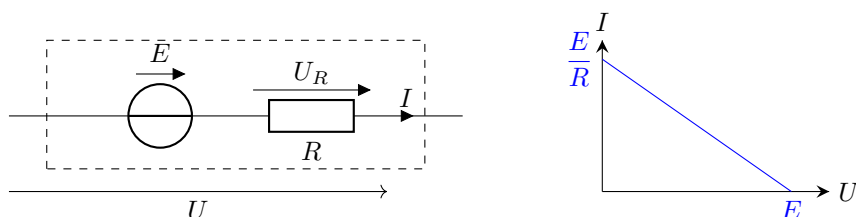
Propriété : Générateur idéal de courant

On définit le générateur idéal de courant par un dipôle dont l'intensité du courant I_0 délivrée est constante quelque soit la tension à ses bornes. On le schématise et on donne la caractéristique :



Propriété : Générateur de Thévenin

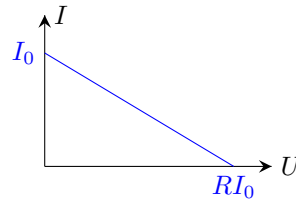
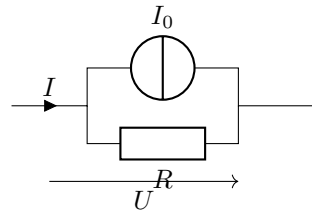
On définit le modèle du générateur de Thévenin par la mise en série d'un générateur idéal de tension de f.e.m. E et d'une résistance interne R . De schéma et de caractéristique :



On obtient l'équation de la caractéristique en appliquant l'additivité des tensions (loi des mailles) : $U = E - RI$

Propriété : Générateur de Norton

On définit le modèle du générateur de Norton par l'association en parrallèle d'un générateur idéal de courant caractérisé par son courant η et d'une résistance interne R de schéma et de caractéristique :

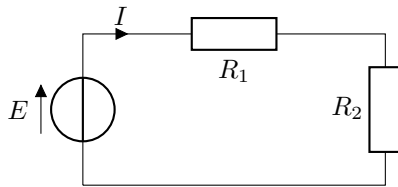


On obtient l'équation de la caractéristique en appliquant la loi des nœuds : $I = \eta + I' = \eta - \frac{U}{R}$

4 Associations de résistance :

Propriété : Résistances en série

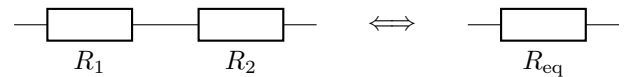
On considère le circuit suivant composé d'un générateur idéal de f.e.m. E et de 2 résistances en série



On applique la loi des mailles et la loi d'Ohm :

$$E = R_1 I + R_2 I \iff E = (R_1 + R_2) I$$

On pose alors $R_{eq} = R_1 + R_2$ la résistance équivalente à R_1 et R_2 en série et on a :

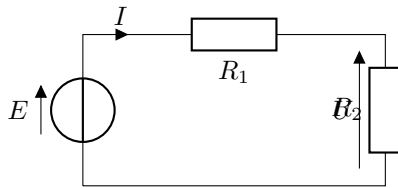


On généralise en disant que l'association en série de N résistance est équivalente à une résistance équivalente de valeur :

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^N R_k$$

Pont diviseur de tension

On considère le circuit suivant composé d'un générateur idéal de f.e.m. E et de 2 résistances en série



On applique la loi des mailles :

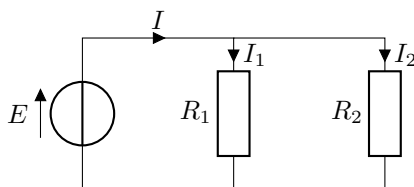
$$E = R_1 I + R_2 I \implies I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

On utilise alors la loi d'Ohm :

$$U = R_2 I \implies U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

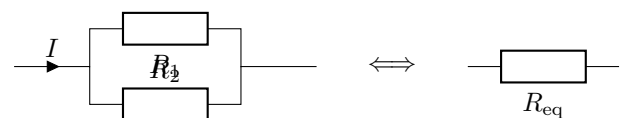
Propriété : Résistances en parallèle

On considère le circuit suivant composé d'un générateur idéal de f.e.m. E et de 2 résistances en parallèle :



On pose alors R_{eq} la résistance équivalente à R_1 et R_2 en parallèle tel que :

$$E = R_{eq} I \quad \text{avec} \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



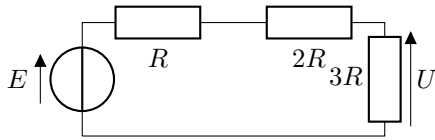
On applique la loi des nœuds :

$$I = I_1 + I_2 \iff I = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} \iff I = E \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

On généralise l'association de résistances en parallèle par une résistance équivalente de valeur R_{eq} tel que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}$$

Exemple : Circuit à une maille



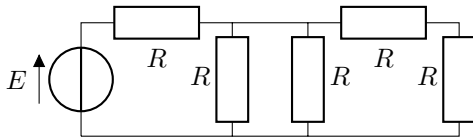
On cherche U sans forcément calculer I :

$$U = \frac{3R}{R + 2R + 3R} E$$

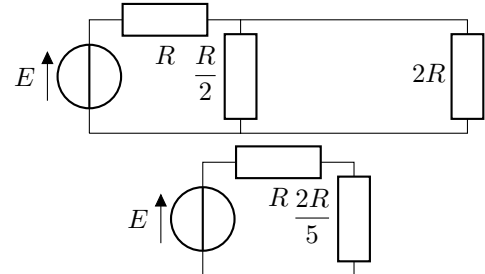
soit $U = E/2$

Exemple : Résistance équivalente

Soit le circuit suivant :



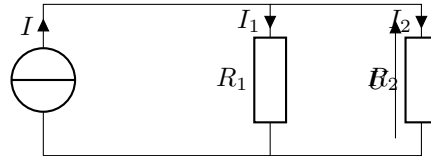
On doit alors procéder étape par étape :



Soit $R_{eq} = 7R/5$

Pont diviseur de courant

On considère le circuit composé d'un générateur idéal de courant I avec deux résistances en parallèles :



On cherche I_2 en fonction de I , R_1 et R_2 . On applique la loi des nœuds :

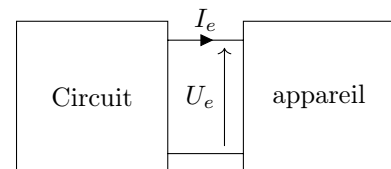
$$I = I_1 + I_2 \quad \text{or} \quad I_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{et} \quad U = R_2 I_2 \implies I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Definition : Résistance d'entrée

Un appareil qui vient se brancher à un circuit peut perturber le circuit (changer la valeur des courants et tensions).

Pour prévoir cet impact on modélise une résistance d'entrée. On définit la résistance d'entrée par :

$$R_e = \frac{U_e}{I_e}$$



Propriété : Ampèremètre non idéal

On modélise un ampèremètre non idéal par l'association en série d'une résistance d'entrée et un ampèremètre idéal.

Propriété : Voltmètre non idéal

On modélise un voltmètre non idéal par l'association en parallèle d'une résistance d'entrée et d'un voltmètre idéal.

Definition : Résistance de sortie

La résistance de sortie d'un dipôle générateur correspond à sa résistance interne dans le modèle de Thévenin.

Remarque : Ordre de grandeur

- Résistance d'entrée d'un oscilloscope ou d'un multimètre en position voltmètre : $R_e \sim 1 \text{ M}\Omega$
- Résistance d'entrée d'un multimètre en position ampèremètre : $R_e \sim 1 \Omega$
- Résistance de sortie d'un générateur de fonction : $R_s \sim 50 \Omega$
- Résistance du corps humain avec peau sèche : $R \sim 2 \text{ k}\Omega$

Signaux 2 : Circuits linéaires du premier ordre

1 Généralités :

Remarque : Contexte

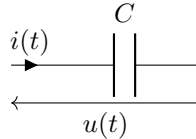
Dans ce chapitre on s'intéresse aux phénomènes transitoires dans les circuits électroniques. On se contentera de l'étude de circuits simple linéaire d'ordre 1, on reste dans le cadre de l'ARQS, c'est-à-dire que ces phénomènes transitoire n'ont rien à voir avec la propagation d'ondes dans le circuit !

Propriété : Le condensateur

C'est un dipôle linéaire composé de deux plaques conductrices séparées par un isolant. Sous l'effet d'un champ électrique (d'une tension) les porteurs de charges (les électrons) s'accumulent sur une plaque et "chargent" le condensateur. Cette accumulation de charge fait apparaître un courant.

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

où C est la capacité du condensateur exprimée en farad (F)



$$q(t) = Cu(t)$$

où q est la charge positive stockée sur l'armature d'entrée du condensateur

Le condensateur est capable de stocker de l'énergie puis de la fournir au circuit plus tard, l'énergie stockée dans le condensateur s'exprime :

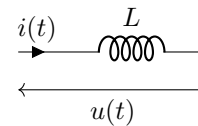
$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} Cu^2(t)$$

Propriété : La bobine

C'est un enroulement de fil parcourut par un courant. La tension aux bornes d'une bobine s'exprime :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

où L est l'inductance de la bobine exprimée en henry (H)



La bobine est capable de stocker de l'énergie puis de la fournir au circuit plus tard, l'énergie stockée dans la bobine s'exprime :

$$\mathcal{E}_b = \frac{1}{2} Li^2(t)$$

Propriété : Dimensions d'une capacité et d'une inductance

Soit $i = C \frac{du}{dt} : I = [C][u]T^{-1} \Rightarrow [C] = TI/[u]$
avec $[u] = ML^2T^{-3}I^{-1}$ on a $[C] = I^2T^4M^{-1}L^{-2}$

Soit $u = L \frac{di}{dt} : [u] = [L]IT^{-1} \Rightarrow [L] = T[u]I^{-1}$
avec $[u] = ML^2T^{-3}I^{-1}$ on a $[L] = ML^2T^{-2}I^{-2}$

Remarque : Ordre de grandeur

- $C \sim 1 \text{ nF}$ à 1000 nF ;
- $L \sim 1 \text{ mF}$ à 1000 mF .

Propriété : Comportement en régime permanent

Lorsqu'on se place en régime permanent, toutes les grandeurs sont constantes par rapport au temps, donc :

- Pour une bobine : $u_L(t) = 0 \forall i_L$ ce qui est équivalent à un fil ;
- Pour un condensateur : $i_C(t) = 0 \forall u_C$ ce qui est équivalent à un interrupteur ouvert.

En régime permanent on peut étudier les valeurs des courant et tensions en étudiant le circuit équivalent où on remplace les condensateur par des interrupteur ouvert et les bobines par des fils.

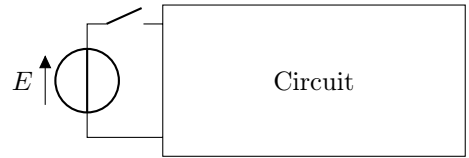


Definition : Réponse à un échelon de tension

On branche en série un générateur idéal de f.e.m. $e(t)$ indépendante du temps, un interrupteur, un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C initialement déchargé.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. De cette façon on a $e(t)$ qui est de la forme :

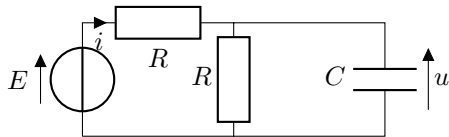
$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



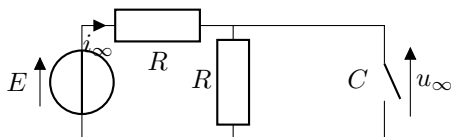
On étudie alors dans un premier temps la réponse du circuit à un échelon de tension en mesurant une tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle ou le courant $i(t)$ le traversant.

Exemple : Régime permanent

Soit le circuit suivant :



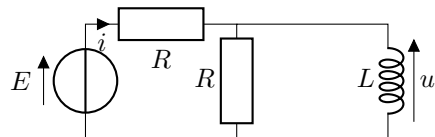
En régime permanent on a :



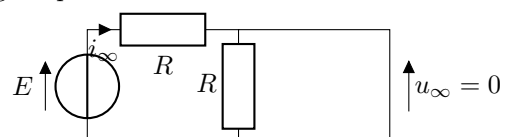
On peut alors appliquer le pont diviseur de tension car le courant est le même dans toute la maille :

$$u_\infty = \frac{ER}{2R} = \frac{E}{2} \quad i_\infty = \frac{E}{2R}$$

Soit le circuit suivant :



En régime permanent on a :



On a alors :

$$i_\infty = \frac{E}{R}$$

Définition : Équation différentielle d'ordre 1

Une équation différentielle d'ordre 1, est une équation qui mêle une fonction $u(t)$ et sa dérivée temporelle $\frac{du}{dt}$. On retiendra la forme canonique de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}$$

où le terme à droite de l'égalité est appelé second membre.

La solution se met sous la forme : $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$

- avec $u_h(t)$ solution de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{du_h}{dt} + \frac{u_h(t)}{\tau} = 0 \quad u_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec $A \in \mathbb{R}$, une constante à déterminer appelée constante d'intégration.

- où $u_p(t)$ est appelé solution particulière de l'équation différentielle. Dans le cas particulier où le second membre est constant :

$$u_p = C^{te} \implies \cancel{\frac{du_p}{dt}} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau} \implies u_p = u_\infty$$

Démonstration : Solution équation différentielle d'ordre 1

On commence par démontrer la forme de la solution de l'équation homogène.

$$\begin{aligned} \frac{du_h}{dt} + \frac{u_h(t)}{\tau} = 0 &\iff \frac{du_h}{dt} = -\frac{u_h(t)}{\tau} \\ \frac{du_h(t)}{u_h(t)} = -\frac{dt}{\tau} &\implies \int_{u_h(t=0)}^{u_h(t)} \frac{1}{u_h} du_h = \int_0^t -\frac{1}{\tau} dt \\ \ln \frac{u_h(t)}{u_h(t=0)} = -\frac{t}{\tau} &\implies u_h(t) = u_h(t=0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

On pose alors $u_h(t=0) = A$ la constante d'intégration et on obtient la solution de l'équation homogène.

Definition : Condition initiale

Pour obtenir la solution au problème posé on doit trouver la valeur de la constante d'intégration A . On obtient A à partir de la condition initiale :

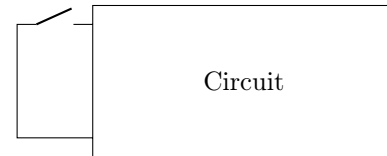
$$u(t = 0^+) = u_0 = A + u_\infty$$

Remarque :

Ici $u(t)$ peut être une tension aux bornes d'un dipôle composant le circuit où un courant $i(t)$ traversant un dipôle du circuit.

Definition : Régime libre

On parle de régime libre lors de l'étude d'un circuit où de l'énergie est stockée dans un condensateur ou une bobine et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur. Les charges peuvent alors se déplacer dans le circuit et atteindre un nouveau régime permanent.

**Méthode : Étude d'un circuit**

Lorsqu'on a un circuit la méthode de résolution complète est la suivante :

- Dessiner le circuit équivalent en régime permanent pour connaître les valeurs des tensions et courants en régime permanent.
- Utiliser la condition initiale donnée pour connaître les valeurs des tensions et courant à $t = 0^+$.
- Appliquer loi des mailles et ou loi des nœuds pour obtenir l'équation différentielle.
- Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier τ .
- Résoudre l'équation différentielle en écrivant $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$.
- Donner $u_h(t) = Ae^{-t/\tau}$ avec A une constante d'intégration.
- Chercher une valeur de $u_p = C^{te}$ solution de l'équation différentielle.
- Obtenir la valeur de A avec la condition initiale $u(t = 0^+) = u_0$.

2 Réponse à un échelon du circuit RC

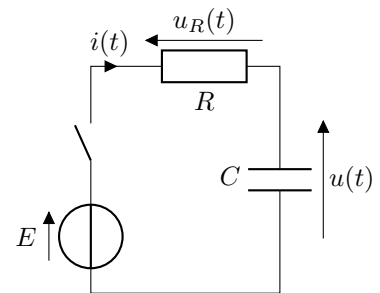
Exemple : Réponse à un échelon de tension

On branche en série un générateur idéal de f.e.m. $e(t)$ indépendante du temps, un interrupteur, un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C initialement déchargé.

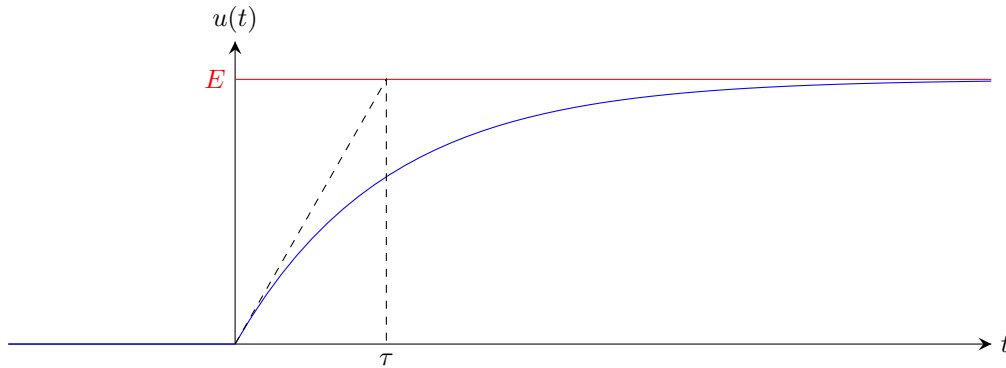
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. De cette façon on a $e(t)$ qui est de la forme :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

On étudie alors dans un premier temps la réponse du circuit à un échelon de tension en mesurant $u(t)$ ou $i(t)$.

**Remarque : Approche expérimentale**

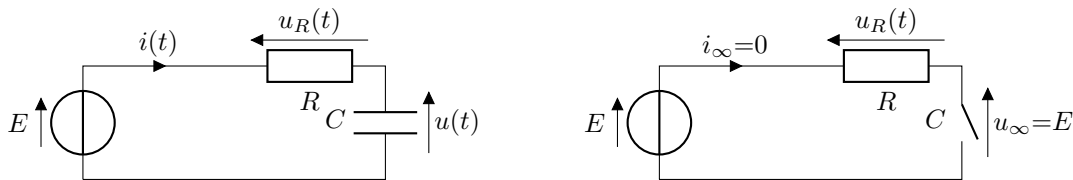
On observe expérimentalement la courbe suivante :



On observe l'évolution de $u(t)$ pendant un certains temps. On appelle cet intervalle de temps le régime transitoire. Puis on observe l'établissement d'un régime permanent où la tension cesse d'évoluer.

Exemple : Régime permanent

On a le circuit équivalent en régime permanent :



Propriété : Continuité de l'énergie stockée dans le condensateur

L'énergie stockée dans le condensateur est continue au cours du temps.

$$E_{\text{cond}}(t = 0^-) = E_{\text{cond}}(t = 0^+)$$

Comme on a $E_{\text{cond}} = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$ on a alors $u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+)$

On parle de condensateur initialement déchargé lorsque son énergie stockée initiale est nulle, donc $u_C(t = 0) = 0$.

Exemple : Conditions initiales

On a applique la loi des mailles à $t = 0^+$ avec $u(t = 0^+) = 0$:

$$E = u_R(t = 0^+) + \cancel{u(t = 0^+)} = R i(t = 0^+) \implies i(t = 0^+) = E/R$$

Exemple : Échelon de tension d'un circuit RC série

Pour étudier le régime transitoire on doit obtenir l'équation différentielle du circuit. On applique la loi des mailles :

$$e(t) = u_C(t) + u_R(t)$$

D'après la loi d'Ohm on a $u_R(t) = R i(t)$, or le courant parcourant le condensateur est également $i(t)$ et s'exprime comme $i(t) = C \frac{du}{dt}$. On obtient alors :

$$e(t) = u(t) + RC \frac{du_C}{dt}(t)$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre. En posant $\tau = RC$ on peut mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

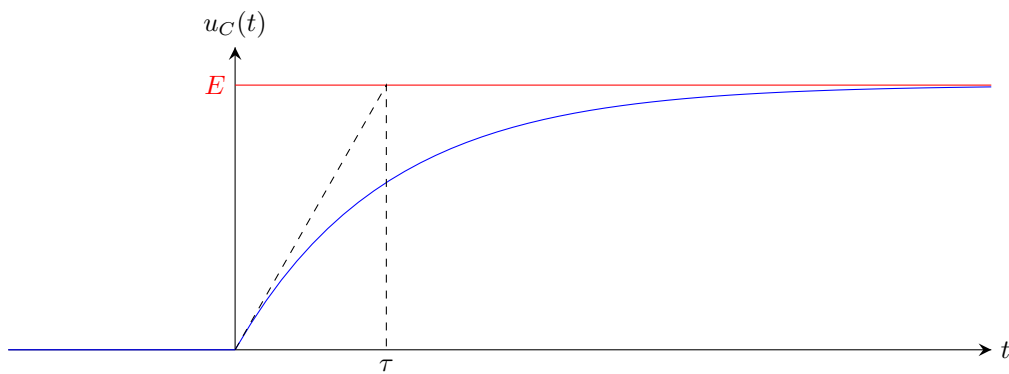
On appelle $\frac{e(t)}{\tau}$ le second membre de l'équation différentielle.

Initialement le condensateur est déchargé, c'est-à-dire qu'aucunes charges n'est accumulée dedans, et donc son énergie stockée est nulle. On a alors :

$$u(t = 0) = 0 \implies A + E = 0 \implies A = -E$$

On obtient alors : $u(t) = E \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$

En sachant qu'initialement on a : $\frac{du}{dt} = \frac{E}{\tau}$ on peut tracer la courbe.



Propriété : Temps caractéristique

Ici on a $\tau = RC$, essayons de voir quelle est la dimension de τ :

$$[\tau] = [R][C] = \frac{[u]}{I} \times \frac{I}{[u]} T = T$$

τ a la dimension d'un temps, ce qui est cohérent avec la forme de l'équation différentielle et on l'appelle temps caractéristique.

Remarque :

Dans le cas général, le générateur de tension peut délivrer une tension $e(t)$ qui varie dans le temps, pour ce chapitre on supposera néanmoins que la tension est constante et stable ($e(t) = E = C^{te}$).

Remarque : Ordre de grandeur

Le régime transitoire a une durée d'ordre de grandeur entre 3τ et 5τ .

Exemple : Temps de réponse à 95%

On cherche l'instant t_{95} où la variation de $u(t)$ a atteint 95% de sa valeur finale :

$$u(t_{95}) - u(0) = 0.95(u_{\infty} - u(0)) \implies u(t_{95}) = 0.95E \implies 0.95E = E(1 - e^{-t_{95}/\tau})$$

soit $t_{95} = \tau \ln(20) \simeq 3\tau$

Propriété : Bilan de puissance

On multiplie la loi des mailles par $i(t)$ pour obtenir un bilan de puissance :

$$Ei(t) = Ri^2(t) + u(t)i(t)$$

On identifie les différences puissances :

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_C$$

or pour le condensateur :

$$\mathcal{P}_C = Cu(t) \frac{du}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt}$$

Propriété : Bilan d'énergie lors de la charge

On fait l'intégrale du bilan de puissance entre l'instant $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$:

$$\Delta\mathcal{E}_G = \Delta\mathcal{E}_J + \Delta\mathcal{E}_C$$

avec $\Delta\mathcal{E}_G = EC(u_{\infty} - u(0))$

avec $\Delta\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}C(u_{\infty}^2 - u^2(0))$

On en déduit alors $\Delta\mathcal{E}_J = \frac{1}{2}CE^2$ l'énergie dissipée par effet joule lors de la charge complète.

Méthode : Bilan énergétique

- Appliquer la loi des mailles au circuit ;
- multiplier par le courant délivré par le générateur $i(t)$;
- utiliser les deux propriétés du condensateur ou de la bobine :

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} \text{ ou } u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

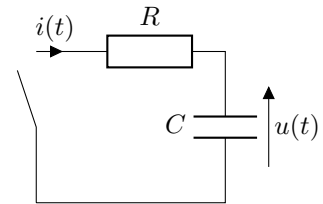
- Intégrer entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$;
- Identifier l'énergie fournie par le générateur, l'énergie dissipée par effet Joule et l'énergie stockée dans le condensateur ou la bobine.

3 Régime libre d'un circuit RC**Exemple : Régime libre**

On étudie maintenant le circuit suivant où le condensateur est initialement chargé avec une tension initiale $u(0) = E$. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

En régime permanent on a : $u_\infty = 0$.

La condition initiale nous donne rapidement : $u(0) + Ri(0^+) = 0 \Rightarrow i(0^+) = E/R$

**Exemple : Équation différentielle en fonction du courant**

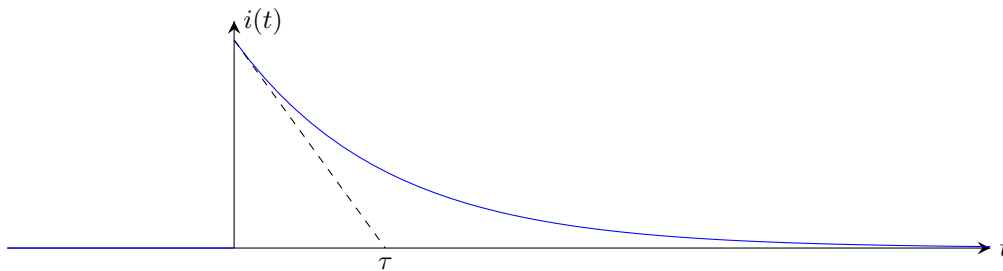
On cherche l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. On applique la loi des mailles puis on dérive :

$$u(t) + Ri(t) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} + R \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$$

On a alors une équation différentielle homogène de solution : $i(t) = Ae^{-t/\tau}$

En utilisant la condition initiale on a : $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

On peut alors tracer la courbe sachant que $i(t = 0^-) = 0$!

**Exemple : Temps de réponse à 99%**

On cherche l'instant t_{99} où la variation de $i(t)$ à atteint 99% de sa valeur finale :

$$i(t_{99}) - i(0) = 0.99(i_\infty - i(0)) \Rightarrow i(t_{99}) = 0.01E/R \Rightarrow \frac{0.1E}{R} = \frac{E}{R} (e^{-t_{99}/\tau})$$

soit $t_{99} = \tau \ln(100) \simeq 4,6\tau$

Exemple : Bilan énergétique lors de la décharge

On applique la loi des mailles au circuit et on multiplie par $i(t)$:

$$u(t) + Ri(t) = 0 \Rightarrow u(t)i(t) + Ri^2(t) = 0$$

On intègre entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{E}_C(+\infty) - \mathcal{E}_C(0) + \Delta \mathcal{E}_J = 0 \Rightarrow \Delta \mathcal{E}_J = \frac{1}{2} CE^2$$

4 Circuit RL

Méthode : Obtenir l'équation différentielle du circuit

- Appliquer la loi des mailles ;
- Appliquer la loi d'Ohm ;
- Si le circuit possède une seconde maille, appliquer la loi des nœuds ;
- Appliquer la propriété de la bobine :

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

- Mettre l'équation différentielle sous forme canonique.

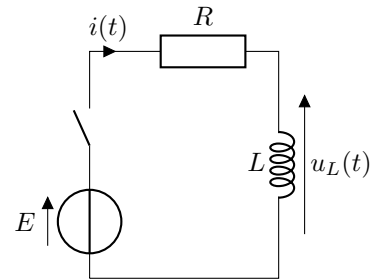
Exemple : Échelon de tension d'un circuit RL série

On branche en série un générateur idéal de f.e.m. $e(t)$ indépendante du temps, un interrupteur, un résistor de résistance R et une bobine d'inductance L initialement déchargée.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. De cette façon on a $e(t)$ qui est de la forme :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

On étudie alors dans un premier temps la réponse du circuit à un échelon de tension.



Exemple : Étude du régime transitoire

Pour étudier le régime transitoire on doit obtenir l'équation différentielle du circuit. On applique la loi des mailles :

$$e(t) = u_L(t) + u_R(t)$$

D'après la loi d'Ohm on a $u_R(t) = Ri(t)$, or la tension aux bornes d'une bobine est $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$, on obtient alors :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t)$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre. En posant $\tau = \frac{L}{R}$ on peut mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{R\tau}$$

La solution de cette équation différentielle d'ordre 1 est :

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

Propriété : Continuité de l'énergie stockée dans la bobine

L'énergie stockée dans la bobine est continue au cours du temps.

$$E_{\text{bob}}(t = 0^-) = E_{\text{bob}}(t = 0^+)$$

Comme on a $E_{\text{bob}} = \frac{1}{2}Li_L^2(t)$ on a alors

$$i_L(t = 0^-) = i_L(t = 0^+)$$

On parle de condensateur initialement déchargé lorsque son énergie stockée initiale est nulle, donc $i_L(t = 0) = 0$.

Exemple : Utilisation de la condition initiale

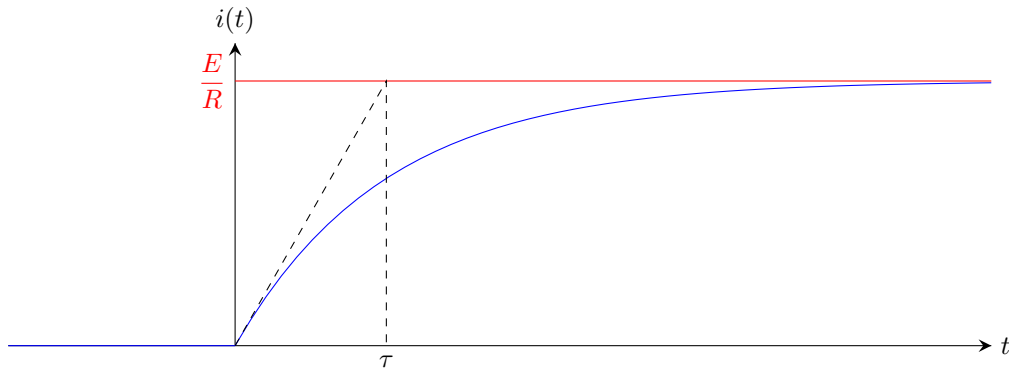
Comme l'équation différentielle est d'ordre 1, on a une seule constante d'intégration et il nous faut une condition initiale. L'énergie stockée dans la bobine est continue au cours du temps. Comme on a $E_{\text{bob}} = \frac{1}{2}Li^2(t)$ on a alors continuité de $i(t)$. On utilise alors comme condition initiale $i(t = 0)$.

Initialement la bobine est déchargée, c'est-à-dire son énergie stockée est nulle. On a alors :

$$i(t=0) = 0 \implies A + \frac{E}{R} = 0 \implies A = -\frac{E}{R}$$

On obtient alors : $i(t) = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$

En sachant qu'initialement on a : $\frac{di}{dt} = \frac{E}{R\tau}$ on peut tracer la courbe.



5 Capacité numérique : Méthode d'Euler

Definition : Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler est une méthode itérative qui calcule numériquement une solution approchée de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dt}(t) = F(y(t), t) \quad \text{avec } t \in [t_i, t_f] \quad \text{et } y(t_i) = y_i$$

On utilise l'expression approchée de la dérivée suivante :

$$\frac{dy}{dt}(t) \simeq \frac{y(t + \delta t) - y(t)}{\delta t}$$

On peut alors construire les suites de N nombres suivantes :

- $t_k = t_0 + k \times \delta t$ avec $k \in [0; N - 1]$ et $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N - 1}$
- $y_{k+1} = y_k + F(y_k, t_k) \times \delta t$ avec $y_0 = y_i$

Les N couples de points (t_k, y_k) représentent les coordonnées des N points approchés de la courbe $y(t)$.

Propriété : Capacité numérique 1

Mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide de python pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.

Propriété : Création fonction Euler

On cherche à définir une nouvelle fonction python qui prendra en paramètre y_i, t_i, t_f, F les paramètres mathématiques et N le paramètre numérique.

```

1 | import numpy as np
2 | def Euler(y0, t0, tf, F, N):
3 |     y=[]
4 |     dt=(tf-t0)/(N-1)
5 |     t=[t0+k*dt for k in range(N)]
6 |     y[0]=y0
7 |     for k in range(1,N):
8 |         y[k]=y[k-1]+F(y[k-1], t[k-1])*dt
9 |     return t, y
10 | def F(y, t):
11 |     return (e(t)-y)/Tau

```

Signaux 3 : Circuits linéaires du deuxième ordre

Remarque : Contexte

On est toujours sur l'étude des régimes transitoires dans les circuits électroniques. On enrichit dans ce chapitre nos capacités à résoudre des systèmes en abordant l'ordre 2, c'est à dire un mélange de condensateur et de bobine dans un circuit.

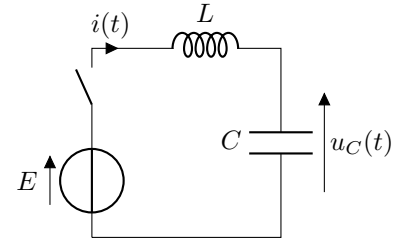
1 Modèle de l'oscillateur harmonique électrique

Exemple : Description du circuit

On étudie le circuit LC série composé d'un générateur idéal de tension de f.e.m. E , d'un interrupteur, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L .

la bobine et le condensateur sont initialement déchargés, et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur de manière à avoir :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



Exemple : Équation différentielle

On applique la loi des mailles on a alors :

$$\begin{aligned} e(t) &= u_L(t) + u_C(t) & \text{or : } u_L(t) &= L \frac{di}{dt} \\ e(t) &= L \frac{di}{dt} + u_C(t) & \text{or : } i(t) &= C \frac{du_C}{dt} \\ e(t) &= LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C(t) \end{aligned}$$

Soit avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $u_{Ceq} = E$ on obtient l'équation sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 u_{C\infty}$$

Definition : Oscillateur harmonique (OH)

On appelle oscillateur harmonique un système dont la grandeur u satisfait l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$$

avec ω_0 la **pulsation propre du système** en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Propriété : Solution de l'équation d'un OH

La solution de cette équation différentielle peut se mettre sous la forme suivante :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

avec $u_h(t)$ solution de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{d^2 u_h}{dt^2} + \omega_0^2 u_h = 0$$

et $u_p(t)$ solution particulière de l'équation différentielle.

On retiendra que :

$$u_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, deux constantes d'intégration. Pour $u_\infty = C^{te}$ on a $u_p(t) = u_\infty$:

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + u_\infty$$

Propriété : Autre forme trigonométrique

On utilise souvent une autre forme pour exprimer la solution :

$$u(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) + u_\infty$$

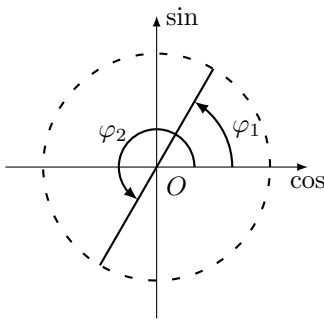
avec $C \in \mathbb{R}^+$ appelé **amplitude de l'oscillation** et $\varphi \in [-\pi; \pi]$ appelé **phase initiale**.

Grâce aux relations mathématiques à connaître par cœur on obtient :

$$\begin{aligned} A &= C \cos \varphi & B &= -C \sin \varphi \\ C &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ \cos \varphi &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} & \sin \varphi &= \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

Méthode : Calcul de φ

Pour connaître φ à partir de $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ il est recommandé de tracer un cercle trigonométrique :



Si $\cos(\varphi) \geq 0$ alors $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ on peut alors calculer :

$$\tan(\varphi) = \frac{-B}{A} \implies \varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

Si $\cos(\varphi) \leq 0$ alors $\varphi - \pi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ on peut alors calculer :

$$\tan(\varphi - \pi) = \frac{-B}{A} \implies \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

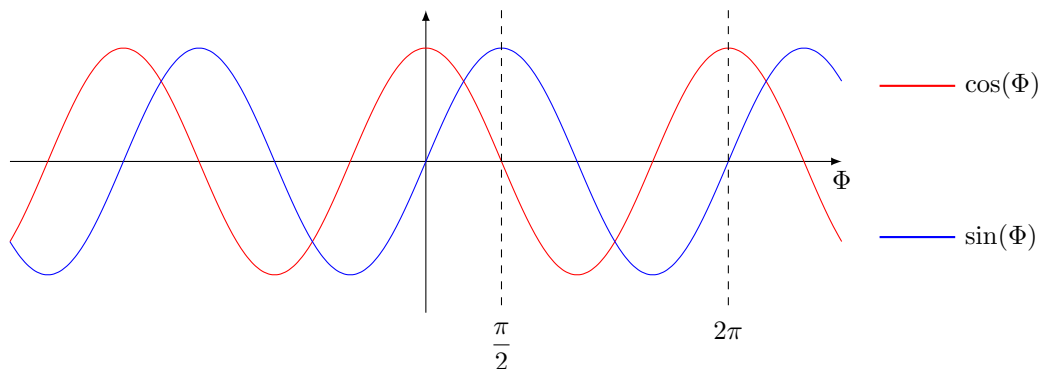
Propriété : Rappel sur les fonctions sin et cos

Pour les fonctions sinusoïdales on définit la phase Φ comme l'argument de la fonction cos ou sin. L'argument d'une fonction en physique doit être sans dimension on a alors :

$$[\Phi] = 1$$

La phase s'exprime généralement en angle radian noté rad.

Si on trace les fonction $\cos(\Phi)$ et $\sin(\Phi)$ en fonction de Φ on obtient :



Dans notre cas on a $\Phi(t) = \omega_0 t - \varphi$

Propriété : Relation pulsation, fréquence, période

La période d'un signal est la plus petite durée T non nulle de répétition d'un motif tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t+T) = s(t)$$

La fréquence est définie comme l'inverse de la période, c'est un nombre de motif répété par unité de temps et s'exprime en Hertz (Hz).

La pulsation ω correspond à une variation de phase par unité de temps. Son unité est le $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et on a les relations avec T et f :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

On a alors par analyse dimensionnelle : $[\omega t] = [\varphi]$

Propriété : Conditions initiales

Pour résoudre totalement l'équation différentielle, il est nécessaire de trouver les valeurs des deux constantes d'intégrations. Pour ça on utilise les deux conditions initiales :

- La tension aux bornes du condensateur est continue donc : $u_C(t=0) = u_0$;
- Le courant qui traverse la bobine est continue donc : $i_L(t=0) = i_0$.

Exemple : Résolution

Soit $u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + E$, on a utilisé comme condition initiale que $u(t=0)$ et $i(t=0)$:

$$u(0) = 0 \implies A + E = 0 \implies A = -E$$

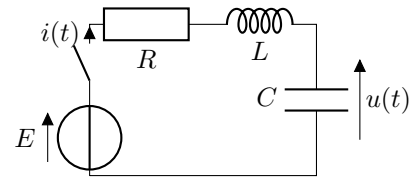
$$i(0) = 0 \implies B\omega_0 = 0 \implies B = 0$$

Soit $u(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$

2 Oscillateur électrique amorti

Exemple : Description du circuit

On étudie le circuit RLC série composé d'un générateur de idéal de tension de f.e.m. E , d'un interrupteur, d'une résistance R , d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L . La bobine et le condensateur sont initialement déchargés, et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur.



Exemple : Équation différentielle

On applique la loi des mailles on a alors :

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u(t) \quad \text{or : } u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + u(t) \quad \text{or : } i(t) = C \frac{du}{dt}$$

$$e(t) = RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C(t)$$

Soit avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, $u_\infty = E$ et $\lambda = \frac{R}{2L}$ on obtient l'équation sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u_\infty$$

Il existe une deuxième forme canonique de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u_\infty$$

Avec $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité et λ le coefficient d'amortissement.

Definition : Équation différentielle d'ordre 2

On appelle équation différentielle d'ordre 2 une équation qui relie une fonction $u(t)$, sa dérivée temporelle $\frac{du}{dt}$ et sa dérivée temporelle seconde $\frac{d^2 u}{dt^2}$. On retiendra les deux formes canoniques de l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\omega_0 \xi \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$$

La solution se met sous la forme :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

avec $u_h(t)$ solution de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{d^2 u_h}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_h}{dt} + \omega_0^2 u_h = 0$$

et $u_p(t)$ solution particulière de l'équation différentielle.

Pour $u_\infty = C^{te}$ on a $u_p(t) = u_\infty$.

3 Régime apériodique

Propriété : Régime apériodique

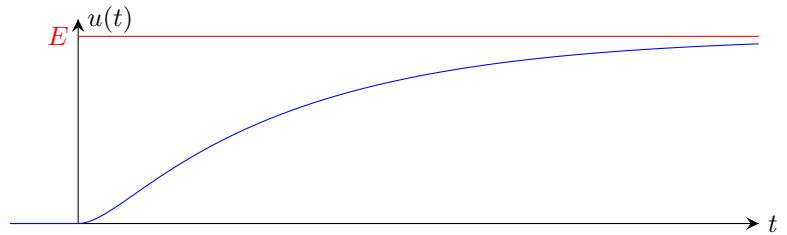
Dans le cas où $Q < \frac{1}{2}$, le régime est dit alors apériodique on a alors la solution homogène qui est :

$$u_h(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t)] \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \quad \text{et} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple : Cas apériodique de réponse à un échelon

Si on considère le circuit RLC série avec une bobine et un condensateur initialement déchargés, on obtient la solution suivante dans le cas apériodique :

$$u_C(t) = E - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[E \operatorname{ch}(\Omega t) + \frac{E}{\sqrt{1 - 4Q^2}} \operatorname{sh}(\Omega t) \right]$$



Démonstration : Solution apériodique

Pour trouver la solution homogène on cherche des solutions de la forme $u(t) = A \exp(rt)$, on doit alors résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Pour résoudre cette équation et trouver les racines on calcule le déterminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q} \right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

Dans le cas où $\Delta > 0$ et où $Q < \frac{1}{2}$, on a les racines de l'équation caractéristique :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \Omega$$

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} - \Omega$$

On a alors la solution homogène qui est $u_h(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t})$

On peut mettre cette solution sous une autre forme en utilisant les fonctions hyperboliques, on utilise $e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$:

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\underbrace{(A+B)}_{A'} \operatorname{ch}(\Omega t) + \underbrace{(A-B)}_{B'} \operatorname{sh}(\Omega t) \right) \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

Exemple : Détermination de A et B

On considère que la bobine et le condensateur sont initialement déchargés soit $i(0) = 0$ et $u(0) = 0$:

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} [A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t)] + E$$

$$u(0) = 0 = A + E \implies A = -E$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q}(u(t) - E) + \Omega e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (A \operatorname{sh}(\Omega t) + B \operatorname{ch}(\Omega t))$$

$$\frac{du}{dt}(0) = 0 \implies -\frac{\omega_0}{2Q}(u(0) - E) + B\Omega \implies B = -\frac{\omega_0 E}{\Omega 2Q}$$

4 Régime critique**Propriété : Régime critique**

Dans le cas où $Q = \frac{1}{2}$, le régime est dit alors critique on a alors la solution homogène qui est :

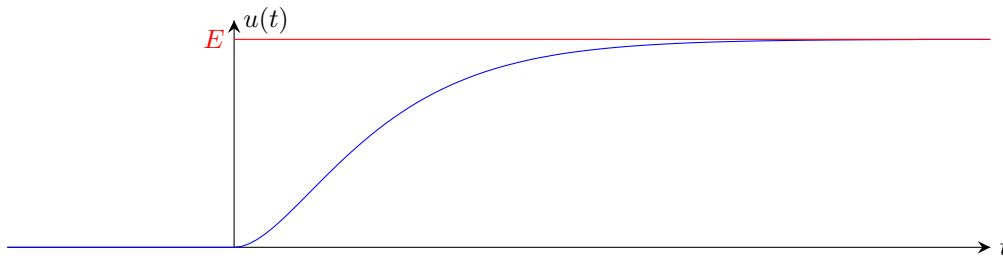
$$u_h(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple : Cas critique de réponse à un échelon

Si on considère le circuit *RLC* série avec une bobine et un condensateur initialement déchargés, on obtient la solution suivante dans le cas critique :

$$u_C(t) = E - E \left(1 + \frac{\omega_0 t}{2Q}\right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

**Démonstration : Solution critique**

Pour trouver la solution homogène on cherche des solutions de la forme $u(t) = A \exp(rt)$, on doit alors résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Pour résoudre cette équation et trouver les racines on calcule le déterminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

Dans le cas où $\Delta = 0$ et où $Q = \frac{1}{2}$, on a la racine double de l'équation caractéristique :

$$r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}$$

On a alors la solution homogène qui est :

$$u_h(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

Exemple : Calcul de A et B

Soit $u(t) = E + (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$ avec $u(0) = 0$ et $i(0) = 0$ donc $\frac{du}{dt}(0) = 0$:

$$u(0) = 0 = E + A \implies A = -E$$

$$\frac{du}{dt} = (B - A\omega_0 - \omega_0 Bt)e^{-\omega_0 t}$$

$$\frac{du}{dt}(0) = 0 = B - A\omega_0 \implies B = -E\omega_0$$

5 Régime pseudo-périodique**Propriété : Régime pseudo-périodique**

Dans le cas où $Q > \frac{1}{2}$, le régime est dit alors pseudo-périodique on a alors la solution homogène qui est :

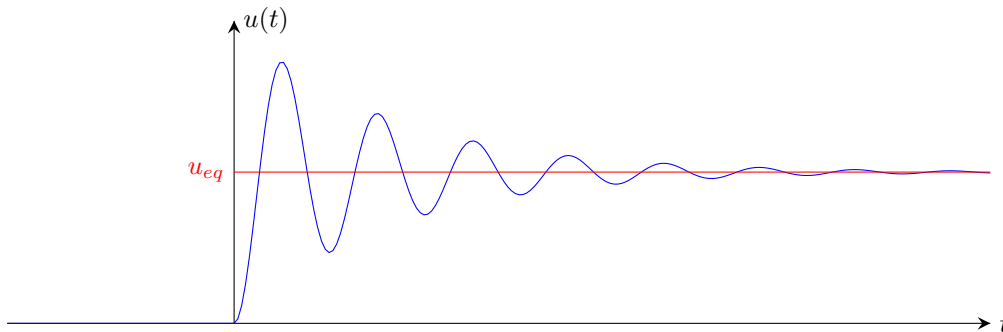
$$u_h(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple : Cas pseudo-périodique de réponse à un échelon

Si on considère le circuit *RLC* série avec une bobine et un condensateur initialement déchargés, on obtient la solution suivante dans le cas pseudo-périodique :

$$u_C(t) = E - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[E \cos(\omega t) + \frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\omega t) \right]$$

**Démonstration : Solution pseudo-périodique**

Pour trouver la solution homogène on cherche des solutions de la forme $u(t) = A \exp(rt)$, on doit alors résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Pour résoudre cette équation et trouver les racines on calcule le déterminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

Dans le cas où $\Delta < 0$ et où $Q > \frac{1}{2}$, on a les racines de l'équation caractéristiques :

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + j\sqrt{\omega_0^2 \left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega \\ \underline{r}_2 &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - j\sqrt{\omega_0^2 \left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega \end{aligned}$$

On a alors la solution homogène qui est :

$$u_h(t) = \underline{A}e^{\underline{r}_1 t} + \underline{B}e^{\underline{r}_2 t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\underline{A}e^{j\omega t} + \underline{B}e^{-j\omega t} \right)$$

On peut mettre cette solution sous une autre forme en utilisant les fonctions hyperboliques, on utilise $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$:

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\underbrace{(A+B)}_{A'} \cos(\omega t) + j \underbrace{(A-B)}_{B'} \sin(\omega t) \right)$$

On peut alors renommer les constantes $A' = A + B$ et $B' = j(A - B)$ et alors :

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t))$$

avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

6 Exemples et remarques

Méthode : Résolution d'un circuit linéaire d'ordre 2

- Utiliser le circuit équivalent en régime permanent pour prévoir les valeurs des tensions et courant lors du régime permanent.
- Utiliser la loi des mailles et la loi des nœuds ainsi que les conditions initiales pour connaître les valeurs initiales des différentes tensions et courants.
- Appliquer la loi des mailles et la loi des nœuds pour obtenir l'équation différentielle demandée.
- Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier ω_0 et Q .
- Calculer le discriminant de l'équation caractéristique et les racines. En déduire le régime et proposer la forme de la solution homogène adéquate.

Remarque : Durée du régime transitoire

On évalue la durée du régime transitoire grâce à l'exponentielle décroissante $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$, on peut alors dire que l'ordre de grandeur du régime transitoire T_R est :

$$T_R \sim 10 \frac{Q}{\omega_0}$$

Remarque : Analogie oscillateur électrique/mécanique

On a l'analogie entre les grandeurs suivantes :

Grandeurs électriques	E	$q(t)$	L	C	R
Grandeurs mécaniques	F_0	$x(t)$	m	$\frac{1}{k}$	μ

Signaux 4 : Régime des oscillations forcées et filtre d'ordre 1

Remarque : Contexte

On s'intéresse dans ce chapitre au cas où le second membre d'une équation différentielle n'est pas constant. On s'intéresse ici à un cas particulier très simple et très utile en maths et en physique, l'excitation sinusoïdale. On se contentera dans un premier temps d'étudier des circuits linéaire d'ordre 1.

1 Régime sinusoïdal forcé :

Exemple : Excitation sinusoïdale

On étudie la circuit RC série composé d'un générateur basse fréquence de tension de f.e.m. $e(t)$, d'un interrupteur, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C .

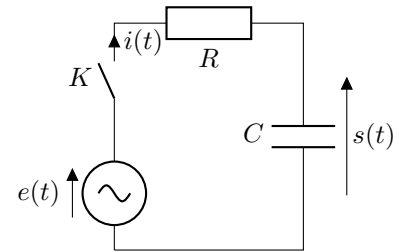
Le condensateur est initialement déchargé, et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur de manière à avoir :

$$e(t) = \begin{cases} E_m \cos(\omega t) & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

On applique la loi des mailles on a alors : $e(t) = RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C(t)$ On a alors l'équation différentielle sous forme canonique suivante :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{E_m}{\tau} \cos(\omega t)$$

On a alors $s(t) = s_h(t) + s_p(t)$ avec $s_h(t)$ la solution homogène et $s_p(t)$ la solution particulière.



Exemple : Régime transitoire

On sait que $s_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ donc on obtient : $s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + s_p(t)$

Or au bout d'une durée de l'ordre de 5τ On sait que $s_h(t) \approx 0$ donc on aura : $s(t) \approx s_p(t)$

Lors d'un régime sinusoïdal forcé, la durée de l'observation est forcément supérieure à plusieurs τ . On cherche donc simplement à connaître la réponse en régime permanent.

Definition : Régime sinusoïdal forcé

On appelle régime sinusoïdal forcé la réponse en régime permanent à une excitation sinusoïdale d'un système. Cette réponse correspond à la solution particulière de l'équation différentielle du système, de forme sinusoïdale et de même fréquence que l'excitation.

$$s(t) = S_m(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega))$$

Ici l'amplitude de la réponse $S_m(\omega)$ et sont retard de phase $\varphi(\omega)$ dépendent de la pulsation de l'excitation ω .

Exemple : Régime permanent

On a alors les expressions suivantes :

$$s(t) = S_m(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega))$$

$$\frac{ds}{dt} = -\omega S_m(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega))$$

et on intègre dans l'équation canonique : $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{E_m}{\tau} \cos(\omega t)$

$$-\omega S_m(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega)) + \frac{S_m(\omega)}{\tau} \cos(\omega t - \varphi(\omega)) = \frac{E_m}{\tau} \cos(\omega t)$$

$$S_m(\omega) [A(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) - B(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega))] = E_m \cos(\omega t)$$

Avec $A(\omega) = 1$ et $B(\omega) = \tau\omega$. On sait qu'une fonction de cette forme pouvait aussi se mettre sous la forme :

$$A(\omega) \cos(\Phi(\omega)) - B(\omega) \sin(\Phi(\omega)) = C(\omega) \cos(\Phi(\omega) + \psi(\omega))$$

avec $C(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ et $\psi(\omega) = \arctan(\tau\omega)$. Ici on a $\Phi(\omega) = \omega t - \varphi(\omega)$:

$$\underbrace{S_m(\omega) \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}_{=E_m} \cos(\underbrace{\omega t - \varphi(\omega) + \psi(\omega)}_{=0}) = \omega_0^2 E_m \cos(\omega t)$$

On en déduit donc :

$$S_m(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arctan(\tau\omega)$$

On sait résoudre ce problème, mais c'est long et assez dur.

Definition : L'amplitude complexe

On utilise une méthode très classique en mathématiques pour résoudre des équations différentielles. Comme les équations différentielles que nous étudions sont linéaires, on définit pour une tension $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ et un courant $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re}(\underline{u}(t)) & \text{avec : } \underline{u}(t) &= U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \\ i(t) &= \operatorname{Re}(\underline{i}(t)) & \text{avec : } \underline{i}(t) &= I_m e^{j(\omega t + \psi)} = \underline{I}_m e^{j\omega t} \end{aligned}$$

avec U_m et I_m les amplitudes réelles du courant et de la tension, et \underline{U}_m et \underline{I}_m les amplitudes complexes. et on a :

$$\varphi = \arg \underline{U}_m \quad \text{et} \quad \psi = \arg \underline{I}_m$$

Remarque : La notation complexe

En physique, on note le nombre imaginaire pure j tel que $j^2 = -1$ pour ne pas confondre avec i l'intensité du courant.

On note les nombre complexe en souligné : \underline{u} , \underline{i} , ...

La loi des mailles, la loi des nœuds et les ponts diviseurs de tension et de courant sont toujours valable en notation complexe.

Propriété : Équation différentielle complexe

On utilise les définitions du courant complexe et des tensions complexes suivantes :

$$s(t) = \operatorname{Re}(\underline{s}(t)) \quad \text{avec : } \underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t - \varphi)} = \underline{S}_m e^{j\omega t}$$

De la même manière on a : $e(t) = \operatorname{Re}(\underline{e}(t))$ avec : $\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$

L'équation différentielle réelle devient alors :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{E_m}{\tau} \cos(\omega t) \iff \operatorname{Re} \left(\frac{d\underline{s}}{dt} + \frac{\underline{s}}{\tau} = \frac{\underline{e}}{\tau} \right)$$

On étudie alors l'équation différentielle : $\frac{d\underline{s}}{dt} + \frac{\underline{s}}{\tau} = \frac{\underline{e}}{\tau}$

Propriété : Dérivation d'une grandeur complexe

On peut alors calculer les dérivées suivantes : $\frac{d\underline{s}}{dt} = j\omega \underline{S}_m e^{j(\omega t - \varphi)} = j\omega \underline{s}(t)$ On retiendra : $\frac{d^n \underline{s}}{dt^n} = (j\omega)^n \underline{s}$

Exemple : Résolution en complexe

L'équation différentielle complexe peut alors se simplifier :

$$\frac{d\underline{s}}{dt} + \frac{\underline{s}}{\tau} = \frac{\underline{e}}{\tau} \iff \left(j\omega + \frac{1}{\tau} \right) \underline{s} = \frac{\underline{e}}{\tau} \iff \underline{s} = \frac{\underline{e}}{1 + j\tau\omega}$$

On obtient alors deux égalités, l'égalité de module et l'égalité d'argument :

$$|\underline{s}| = S_m = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \arg \underline{s} = \omega t - \varphi = \arg \underline{e} - \arg 1 + j\tau\omega \implies \varphi = \arctan(\tau\omega)$$

Remarque : La puissance

On définit la puissance instantanée comme :

$$P(t) = u(t)i(t) = \Re e(\underline{u}(t)) \times \Re e(\underline{i}(t)) \neq \Re e(\underline{u} \times \underline{i}) !!!!!$$

Il faut toujours calculer la puissance à partir des grandeurs réelles !

2 Étude d'un circuit :

Definition : Impédance

En régime permanent pour un dipôle linéaire, on peut relier la relation entre la tension complexe $\underline{u}(t)$ à ses bornes en convention récepteur, et l'intensité complexe du courant $\underline{i}(t)$ qui traverse le dipôle.

On définit alors \underline{Z} , l'impédance complexe du dipôle comme le rapport :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$$

L'impédance complexe peut se mettre sous forme algébrique :

$$\underline{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

La partie réelle de l'impédance complexe est appelée résistance du dipôle $R(\omega)$, la partie imaginaire de l'impédance complexe est appelée réactance du dipôle $X(\omega)$.

Propriété : Impédances à connaître

Pour une résistance on a :

$$u(t) = Ri(t)$$

$$\underline{u}(t) = R\underline{i}$$

On a alors $\underline{Z}_R = R$.

Pour une bobine on a :

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$\underline{u}_L = L \frac{d\underline{i}}{dt}$$

$$= jL\omega \underline{i}$$

On a alors : $\underline{Z}_L = jL\omega$

Pour un condensateur on a :

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

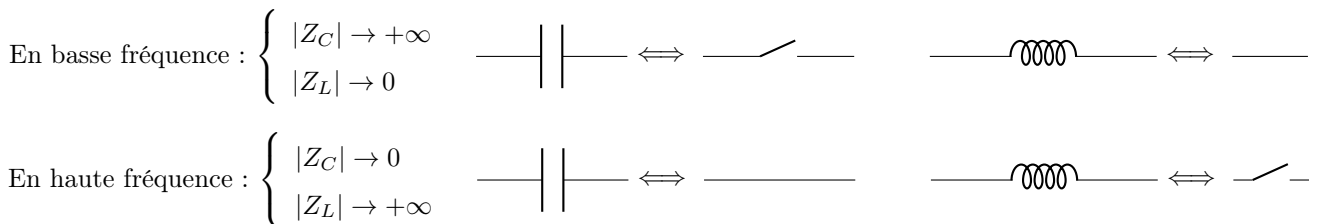
$$\underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}_C}{dt}$$

$$= jC\omega \underline{u}_C(t)$$

On a alors : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

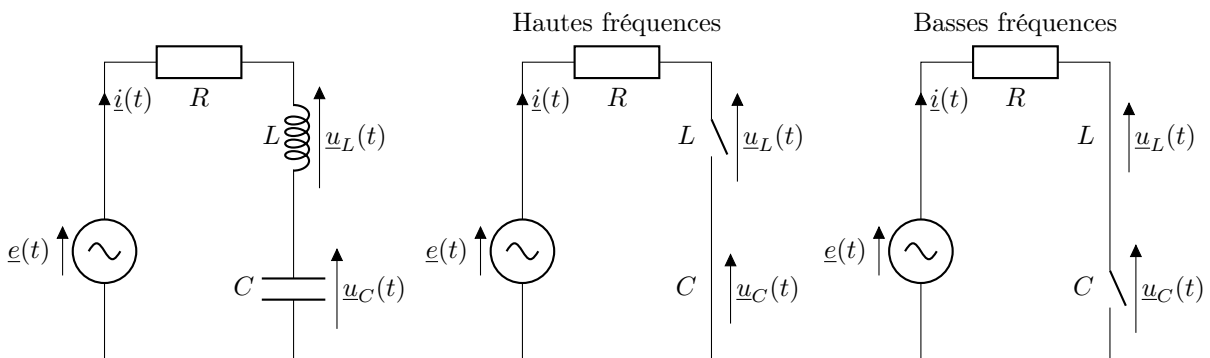
Propriété : Comportement haute fréquence/basse fréquence

On peut faire l'approximation du comportement du condensateur dans la limite des hautes fréquences (lorsque $\omega \rightarrow +\infty$) et des basses fréquences (lorsque $\omega \rightarrow 0$).



Exemple :

Soit un circuit RLC série, on donne les circuits équivalent en hautes fréquences et basses fréquences :



Remarque : Association d'impédances

Toutes les lois d'associations restent valable en complexe avec les impédances. On peut notamment utiliser le pont diviseur de tension sur des circuits avec bobine et condensateur. C'est le point fort de la notation complexe.

Exemple : Circuit RC

Soit le circuit RC série suivant, alimenté par un générateur basse fréquence de f.e.m :

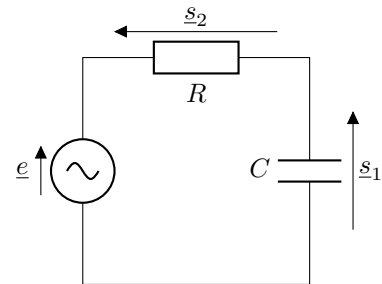
$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

En notation complexe on applique le pont diviseur de tension pour obtenir directement :

$$s_1 = \frac{Z_c}{Z_c + R} e \implies s_1 = \frac{e}{1 + jRC\omega}$$

Ou bien :

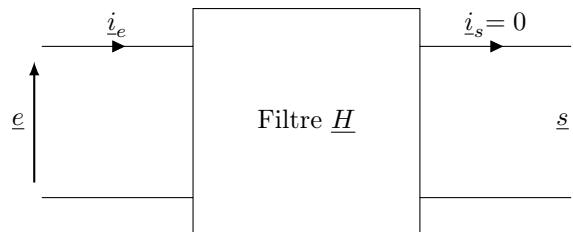
$$s_2 = \frac{R}{Z_c + R} e \implies s_2 = \frac{jRC\omega e}{1 + jRC\omega}$$



3 Description d'un filtre

Definition : Fonction de transfert

On considère un circuit quadripôle avec 2 bornes pour un signal d'entrée $e(t)$ et 2 bornes pour le signal de sortie $s(t)$.



En RSF $e(t) = E_m e^{j\omega t}$ et $s(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$, on définit la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ à la pulsation ω en circuit ouvert avec $i_s = 0$:

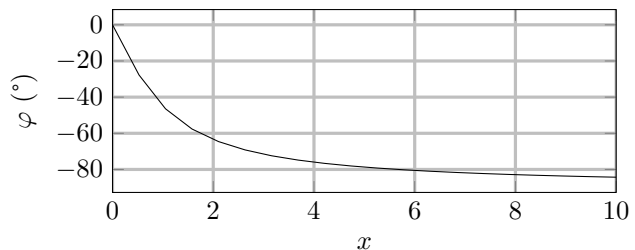
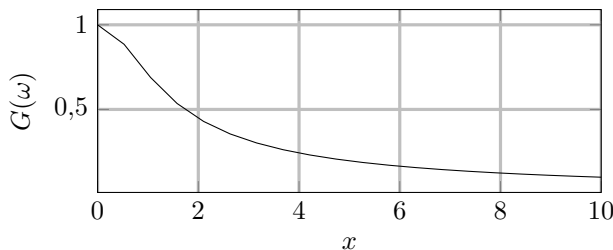
$$\underline{H} = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{S}{E} = \frac{S_m}{E_m} e^{j\varphi}$$

On peut alors exprimer le rapport des amplitudes réelle : $|\underline{H}| = S_m/E_m$ et le déphasage $\varphi = \arg(\underline{H})$

Propriété : Représentation graphique

On définit $G(\omega) = |\underline{H}|$ le gain et $\varphi = \arg \underline{H}$ la phase, dont on trace la représentation graphique en fonction de ω :

Exemple avec $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_{ref}}$



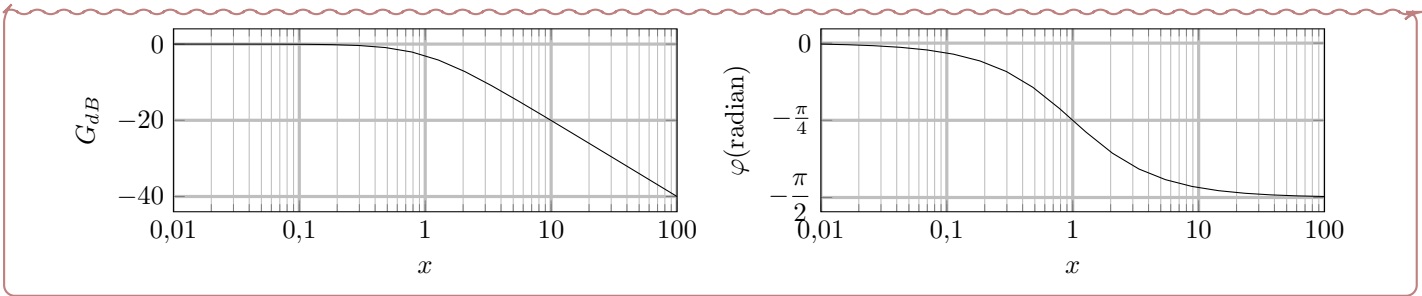
Definition : Diagramme de Bode

On définit le gain en décibel :

$$G_{dB} = 20 \log(G(\omega))$$

On utilise alors le diagramme de Bode pour représenter la variation de l'action d'un filtre en fonction de la fréquence. Le diagramme de Bode est composé de deux figures, on représente le G_{dB} et le déphasage φ en fonction de ω en échelle logarithmique. Une échelle logarithmique est une échelle où l'augmentation d'une graduation consiste à une multiplication par 10 de l'abscisse. On a par exemple :

Exemple avec $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_{ref}}$



Propriété : Courbes asymptotiques

Dans une zone de fréquence où la courbe d'amplitude du diagramme de Bode est quasiment rectiligne, de pente p en dB/décade, le gain du filtre $G(\omega)$ est quasiment proportionnel à $\omega^{\frac{p}{20}}$.

Propriété : Domaine dérivateur

Un filtre se comporte comme un dérivateur dans un domaine de pulsation sur lequel la courbe d'amplitude a une pente de $+20\text{dB/dec}$.

Propriété : Domaine intégrateur

Un filtre se comporte comme un intégrateur dans un domaine de pulsation sur lequel la courbe d'amplitude a une pente de -20dB/dec .

Définition : Pulsation de coupure

On définit conventionnellement la pulsation de coupure ω_c du filtre comme :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \iff G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{db,max}} - 3 \text{ dB}$$

4 Filtre passe-bas d'ordre 1

Définition : Passe-bas d'ordre 1

La forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 1 est : $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\tau\omega}$

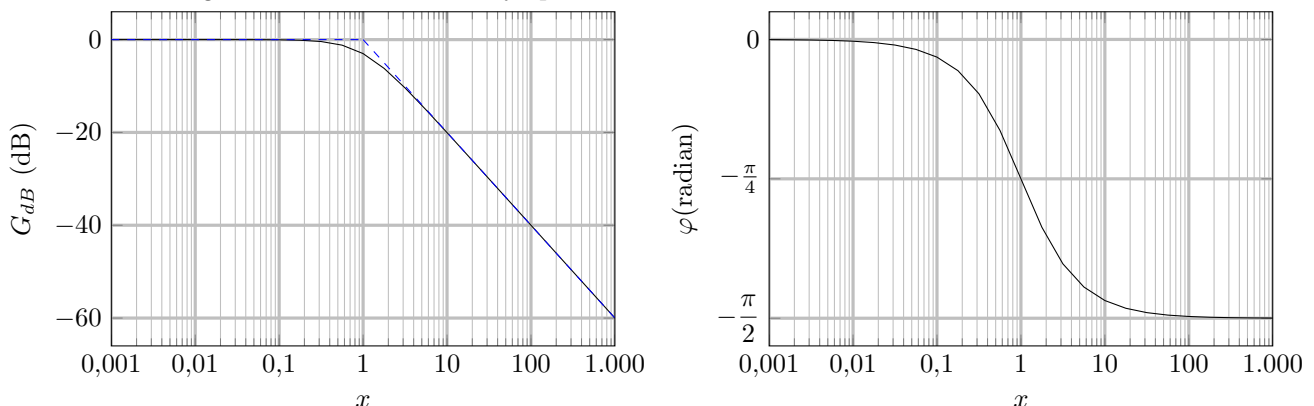
On peut alors poser $x = \tau\omega$ et on obtient : $\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jx}$

Propriété : Diagramme de Bode d'un PB d'ordre 1

On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $x \rightarrow 0$ alors $G_{\text{dB}} \approx 20 \log(H_0)$ et $\varphi \approx 0$;
- $x \rightarrow +\infty$ alors $G_{\text{dB}} \approx 20 \log(H_0) - 20 \log(x)$ et $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$.

On trace alors le diagramme de Bode et ses asymptotes :



Pour cette fonction de transfert l'amplitude du signal de sortie est du même ordre de grandeur que l'amplitude du signal d'entrée en basse fréquence. Elle est atténuée en haute fréquence. On appelle alors ce filtre un filtre passe-bas.

Propriété : Caractère intégrateur

Lorsque $\omega \gg \omega_c$ on a $|\underline{H}| \approx \left| \frac{H_0 \omega_c}{j\omega} \right|$ et $\varphi \approx -\frac{\pi}{2} = \arg \frac{H_0 \omega_c}{j\omega}$ on peut alors faire l'approximation en haute fréquence :

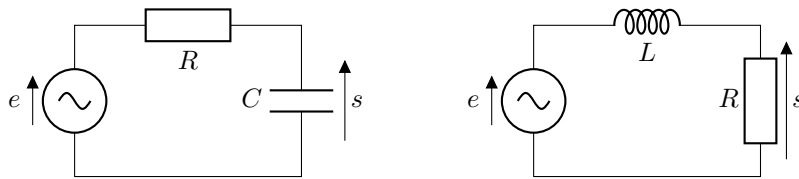
$$\underline{H} \approx \frac{\omega_c H_0}{j\omega}$$

or une fonction de transfert de la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0 \omega_c}{j\omega} = \frac{s}{e} \iff \frac{ds(t)}{dt} = H_0 \omega_c e(t)$$

On a alors le signal $s(t)$ qui correspond au signal $e(t)$ intégré au cours du temps. On dit que le filtre présente un caractère intégrateur en haute fréquence.

Exemple : Circuit PB d'ordre 1



5 Filtre passe-haut d'ordre 1

Definition : Passe-haut d'ordre 1

La forme canonique d'un filtre passe-haut d'ordre 1 est : $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0 j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$

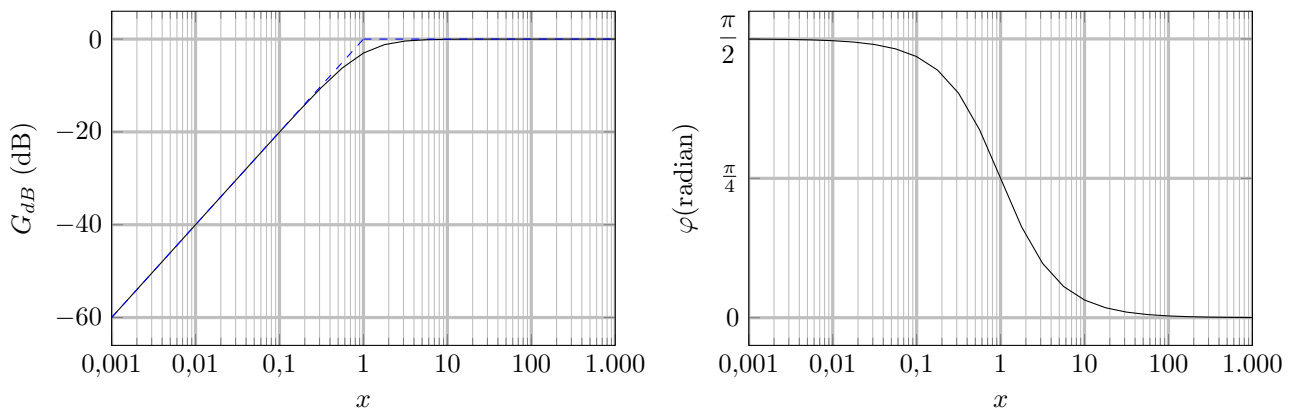
On peut alors poser $x = \tau\omega$ et on obtient : $\underline{H}(x) = \frac{H_0 jx}{1 + jx}$

Propriété : Diagramme de Bode d'un PH d'ordre 1

On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $x \rightarrow 0$ alors $G_{dB} \approx 20 \log(H_0) + 20 \log(x)$ et $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$;
- $x \rightarrow +\infty$ alors $G_{dB} \approx 20 \log(H_0)$ et $\varphi \approx 0$.

On trace alors le diagramme de Bode et ses asymptotes :



Pour cette fonction de transfert l'amplitude du signal de sortie est du même ordre de grandeur que l'amplitude du signal d'entrée en haute fréquence. Elle est atténuée en basse fréquence. On appelle alors ce filtre un filtre passe-haut.

Propriété : Caractère dérivateur

Lorsque $\omega \ll \omega_c$ on a $|\underline{H}| \approx \left| H_0 j \frac{\omega}{\omega_c} \right|$ et $\varphi \approx \frac{\pi}{2} = \arg \frac{H_0 j\omega}{\omega_c}$ on peut alors faire l'approximation en haute fréquence :

$$\underline{H} \approx \frac{j\omega H_0}{\omega_c}$$

or une fonction de transfert de la forme :

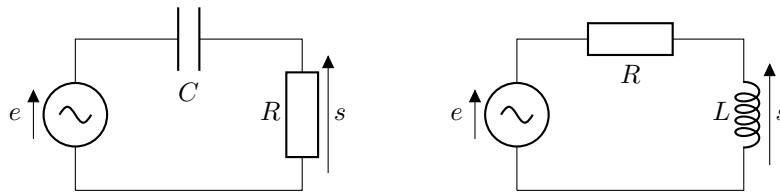
$$\underline{H} = \frac{j\omega H_0}{\omega_c} = \frac{s}{\underline{e}} \iff s(t) = \frac{H_0}{\omega_c} \frac{de}{dt}$$

On a alors le signal $s(t)$ qui correspond au signal $e(t)$ dérivé au cours du temps. On dit que le filtre présente un caractère dérivateur en basse fréquence.

Propriété : Pulsation de coupure

L'intersection des deux asymptotes se fait à ce qu'on appelle la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ pour $x_c = 1$. La pulsation de coupure sépare les deux régimes, le régime des basses fréquences et des hautes fréquences.

Exemple : Circuit PH ordre 1



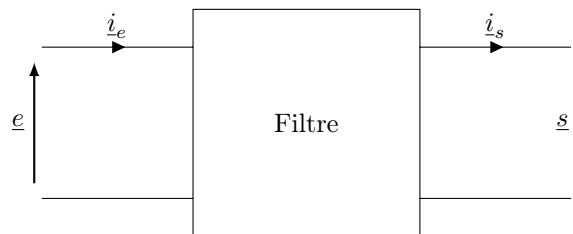
Méthode : Étude d'un filtre

- Utiliser les circuits équivalents en HF et BF pour prévoir la nature du filtre.
- Appliquer le pont diviseur de tension et éventuellement calculer une impédance équivalente pour obtenir la fonction de transfert.
- Mettre la fonction de transfert sous forme canonique en factorisant pour obtenir $1 + \dots$ au dénominateur.
- Calculer la pulsation de coupure.
- Calculer les équations des asymptotes du diagramme de Bode (G_{dB} et φ).
- Tracer le diagramme de Bode asymptotique, préciser les pentes des asymptotes et les valeurs à l'intersection entre les asymptotes.

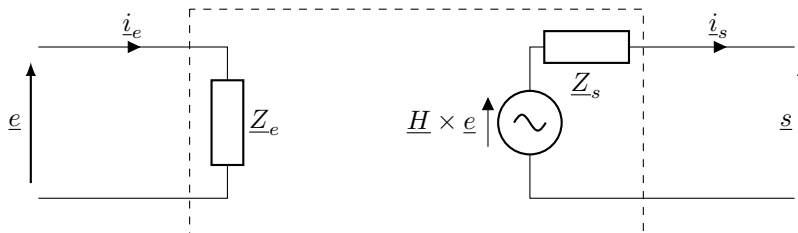
6 Influence du circuit

Definition : Impédance de sortie/entrée d'un filtre

Soit un filtre modélisé par un quadripôle :



On peut modéliser le quadripôle comme deux circuits :



On définit alors :

L'impédance d'entrée du filtre :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{e}}{\underline{i}_e}$$

La fonction de transfert du filtre à vide ($i_s = 0$) :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

L'impédance de sortie du filtre :

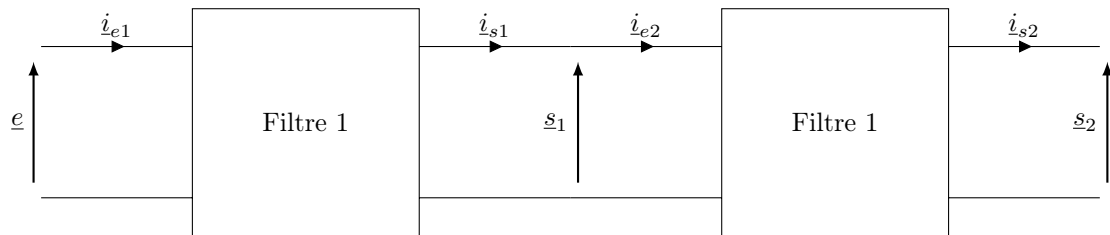
$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{s} - \underline{H} \times \underline{e}}{\underline{i}_s}$$

En dehors de la fonction de transfert, les expressions de \underline{Z}_e et \underline{Z}_s dépendent forcément des composant branché après le

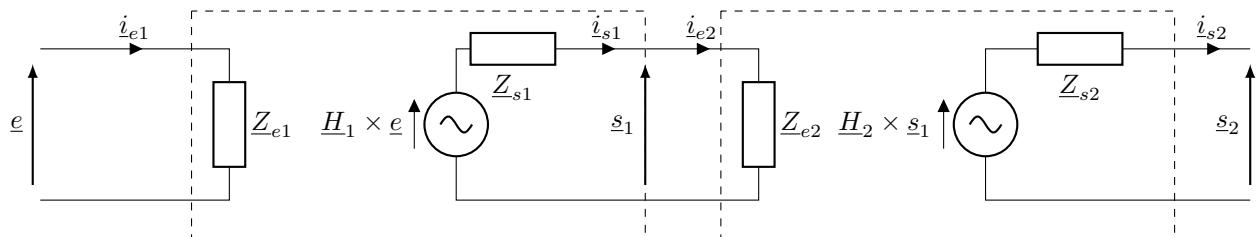
filtre car ils dépendent des courants.

Propriété : Mise en cascade de filtres

On considère la mise en cascade de deux filtres :



En définissant les fonctions de transfert \underline{H}_1 et \underline{H}_2 pour $i_{s1} = 0$ et $i_{s2} = 0$ on obtient la modélisation suivante :



En observant qu'on a forcément $i_{s1} = i_{e2}$ on obtient alors rapidement :

$$\underline{s}_1 = \underline{H}_1 \times \underline{e} - \frac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \times \underline{H}_1 \times \underline{e} = \underline{H}_1 \times \underline{e} \times \left(\frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{e2}}} \right)$$

Si $i_{s2} = 0$, on a également : $\underline{s}_2 = \underline{H}_2 \underline{s}_1$ Si $\left| \frac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{e2}} \right| \ll 1$. On peut alors obtenir : $\underline{s}_2 \approx \underline{H}_2 \times \underline{H}_1 \times \underline{e}$

Signaux 5 : Filtrés d'ordre 2 et résonance

1 Modèles de filtres d'ordre 2

Definition : Passe-bas d'ordre 2

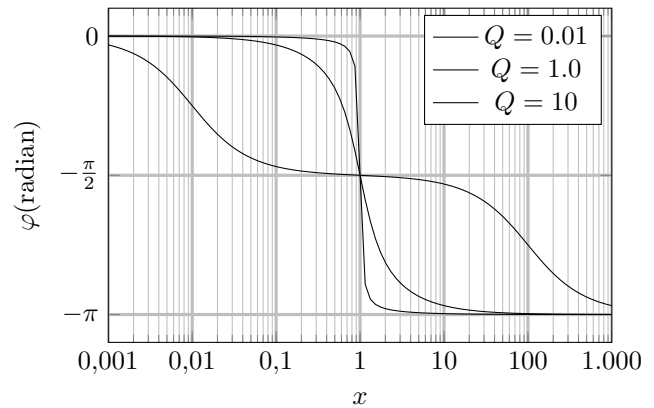
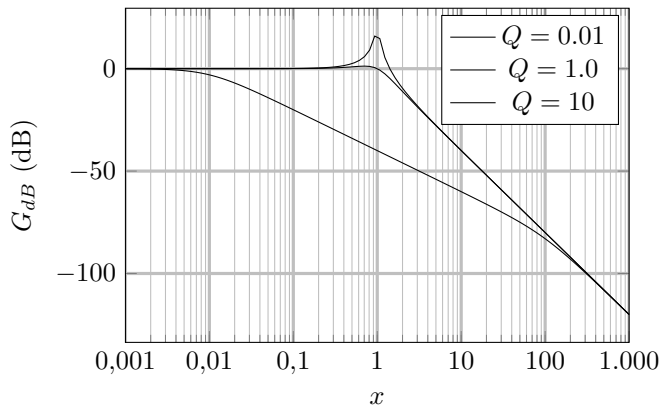
La forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 2 est : $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \iff \underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$

Propriété : Diagramme de Bode d'un PB d'ordre 2

On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $\omega \ll \omega_0$: on a $G_{dB} \approx 20 \log(H_0)$ et $\varphi \approx 0$;
- $\omega_0 \ll \omega$: on a $G_{dB} \approx 20 \log(H_0) - 40 \log(x)$ et $\varphi \approx -\pi$.

On trace ensuite le diagramme de Bode et ses asymptotes :



2 Passe-bande d'ordre 2

Definition : Passe-bande d'ordre 2

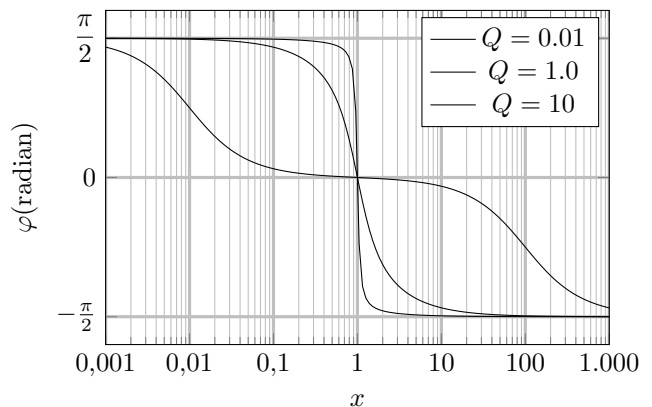
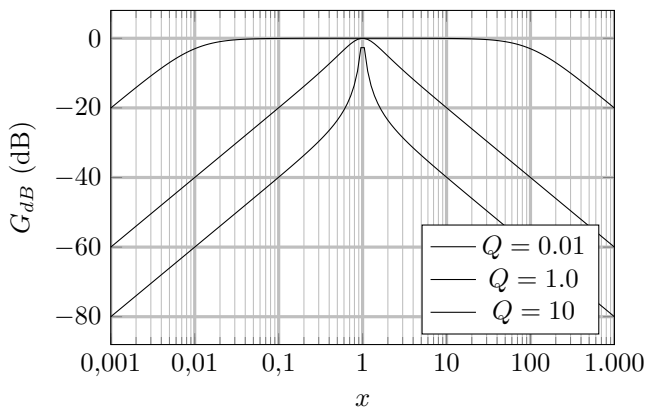
La forme canonique d'un filtre passe-bande d'ordre 2 est : $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

On peut alors poser $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et on obtient : $\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ ou $\underline{H}(x) = \frac{H_0 \frac{jx}{Q}}{(1 - x^2 + \frac{jx}{Q})}$

Propriété : Diagramme de Bode d'un Passe-bande d'ordre 2

On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $\omega \ll \omega_0$: on a $G_{dB} \approx 20 \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) + 20 \log x$ et $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$;
- $\omega_0 \ll \omega$: on a $G_{dB} \approx 20 \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) - 20 \log x$ et $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$.



Definition : Passe-haut d'ordre 2

La forme canonique d'un filtre passe-haut d'ordre 2 est :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \times \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} \Rightarrow \underline{H}(jx) = \frac{-H_0 x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Propriété : Diagramme de Bode d'un Passe-haut d'ordre 2

On a alors : $|\underline{H}(x)| = \frac{H_0 x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

et $\varphi = \arg \underline{H} = \arg -H_0 x^2 - \arg 1 - x^2 + j\frac{x}{Q} = \pi - \arg 1 - x^2 + j\frac{x}{Q}$

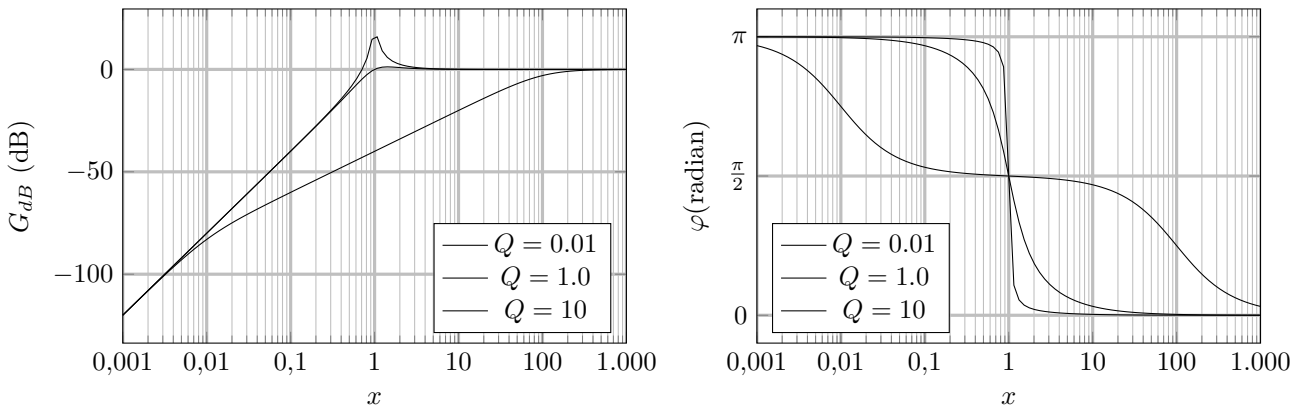
En basse fréquence $\omega \ll \omega_0$ et $x \ll 1$ on a :

$$|\underline{H}(x)| \approx \frac{H_0 x^2}{1} \Rightarrow G_{dB} \approx 20 \log(H_0) + \underbrace{40 \log(x)}_{+40dB/dec} \text{ et } \varphi \approx \pi - 0$$

En haute fréquence $\omega \gg \omega_0$ et $x \gg 1$ on a :

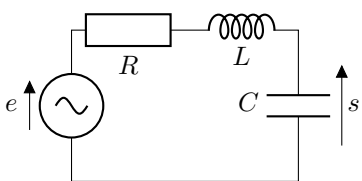
$$|\underline{H}(x)| \approx \frac{H_0 x^2}{x^2} \Rightarrow G_{dB} \approx 20 \log(H_0) = C^{te} \text{ et } \varphi \approx \pi - \pi = 0$$

On obtient alors le diagramme de Bode suivant :

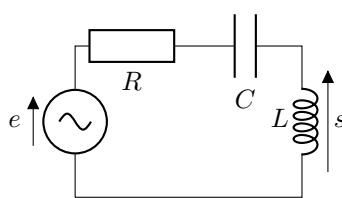


Exemple : Circuits à connaître

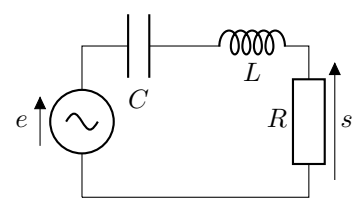
Circuit passe-bas d'ordre 2 :



Circuit passe-haut d'ordre 2 :



Circuit passe-bande d'ordre 2 :



3 Résonance d'un passe-bande d'ordre 2

Definition : Phénomène de résonance

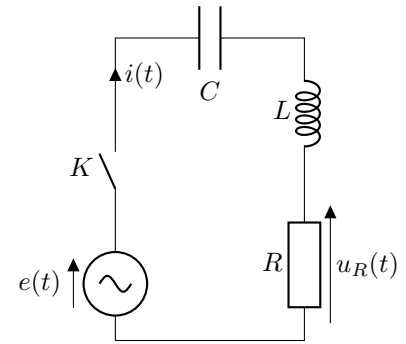
En régime sinusoïdal forcé, lorsque l'excitation sinusoïdale est d'amplitude constante, si on observe un maximum d'amplitude pour une fréquence $f_r \neq 0$, on appelle ce phénomène la résonance et f_r la fréquence de résonance.

Exemple : Circuit RLC série

On étudie un circuit RLC série alimenté par un GBF en régime sinusoïdale forcé de f.e.m. $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ avec E_m fixé et on fait varier ω .

On souhaite observer l'image de l'intensité du courant dans le circuit, on observe donc la tension $u_R(t) = Ri(t)$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} \underline{u}_R(t) &= \frac{R}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \underline{e} = \frac{R\underline{e}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \\ &= \frac{jRC\omega\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}Q\underline{e}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}Q} \\ &= \frac{\underline{e}}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$



En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ on obtient : $i = \frac{u_R}{R} = \frac{\underline{e}}{R} \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

Exemple : Recherche de la fréquence de résonance

On cherche x_r telle que la pulsation de résonance $\omega_r = x_r\omega_0$ pour laquelle l'amplitude réelle de l'intensité du courant est maximale. L'amplitude de l'intensité du courant s'exprime :

$$I_m = |\underline{i}| = \left| \frac{\underline{e}}{R} \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \right| = \frac{|\underline{e}|}{R} \frac{1}{\left| 1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right) \right|} = \frac{E_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

On cherche alors $x_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$ tel que : $\frac{dI_m}{dx}(x = x_r) = 0 \iff x_r = 1$

On a résonance en intensité lorsque la fréquence d'excitation est la fréquence propre du système. Soit $\omega_r = \omega_0$.

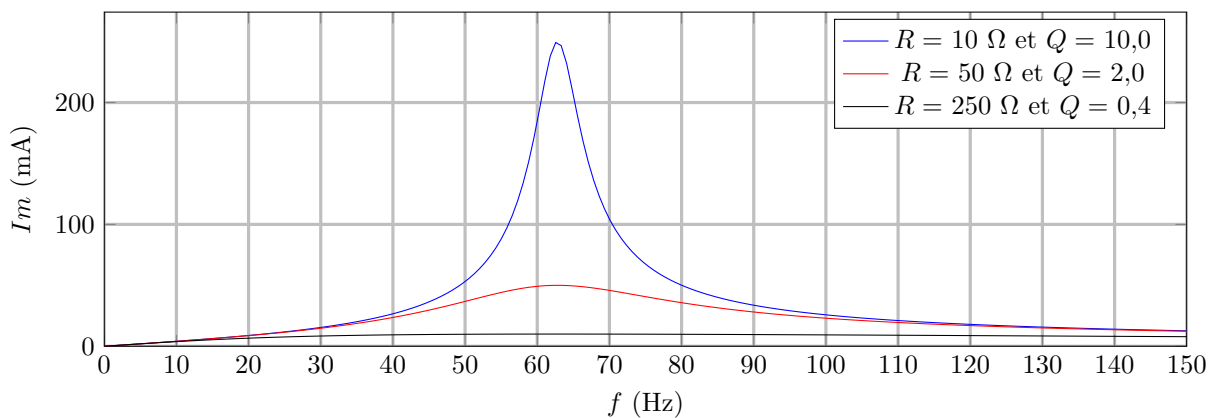
Exemple : Amplitude de résonance

L'amplitude de résonance $I_m(\omega_r)$ est donc : $I_m(\omega_r) = \frac{E_m}{R}$

Exemple : Influence de R

On trace la courbe de résonance en fonction de f pour différentes valeurs de R :

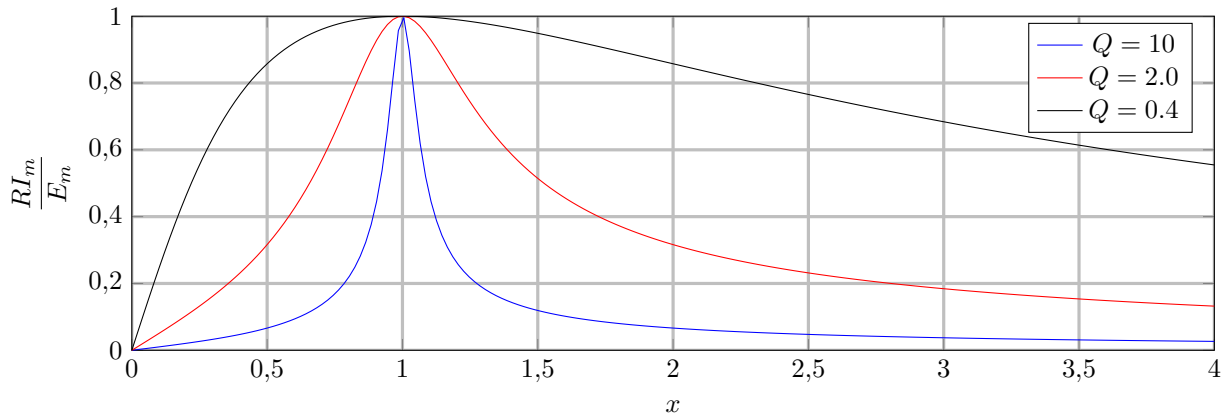
$$L = 10 \text{ mH} ; C = 1 \text{ }\mu\text{F} ; E_m = 2,5 \text{ V}$$



On constate que plus R diminue, plus Q augmente et plus l'amplitude de résonance augmente.

Exemple : Influence de Q

On trace la courbe de résonance normalisée $\frac{I_m}{\max(I_m)}$ en fonction de x pour différentes valeurs de Q :



On constate que plus Q augmente, plus la largeur du pic augmente.

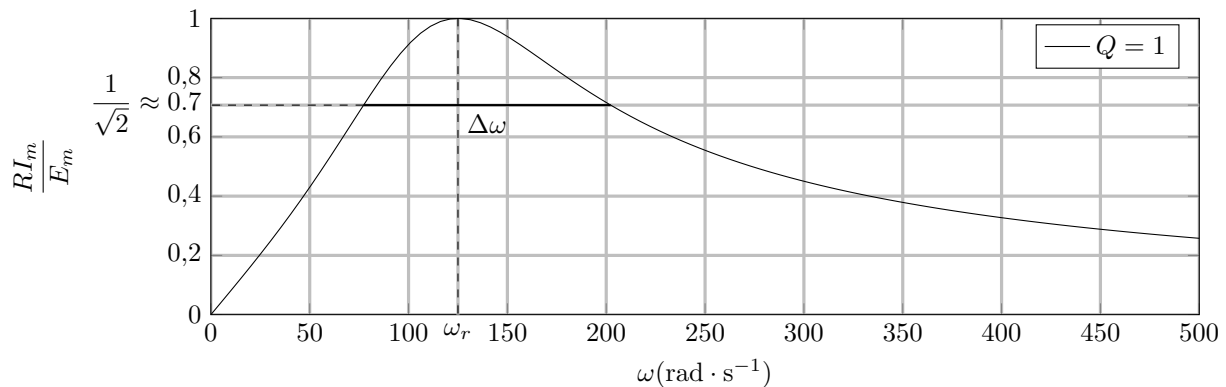
Definition : Acuité d'une résonance

Si on définit $\Delta f = f_2 - f_1$ (ou $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ou $\Delta x = x_2 - x_1$) comme la plage de fréquence pour lequel l'amplitude du signal respecte :

$$I_m(\omega) \geq \frac{\max(I_m)}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad I_m(\omega_{1/2}) = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

On définit l'acuité d'un résonance par le rapport :

$$\boxed{\frac{f_r}{\Delta f} = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{x_r}{\Delta x}}$$



Propriété : Relation acuité-facteur de qualité

On cherche à exprimer l'acuité de la résonance en fonction de Q , pour cela on cherche x_1 et x_2 tel que :

$$I_m(x_{1/2}) = \frac{I_m(x_r)}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

Ce qui revient à calculer : $Q^2 \left(x_{1/2} - \frac{1}{x_{1/2}} \right)^2 = 1$

On a alors deux équations du second degré :

$$\left. \begin{aligned} Q \left(x_1 - \frac{1}{x_1} \right) = 1 &\iff x_1^2 - \frac{1}{Q}x_1 - 1 = 0 \\ Q \left(x_2 - \frac{1}{x_2} \right) = -1 &\iff x_2^2 + \frac{1}{Q}x_2 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > \frac{1}{Q^2} > 0$$

Chaque équation possède une solution positive : $x_1 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$ $x_2 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$

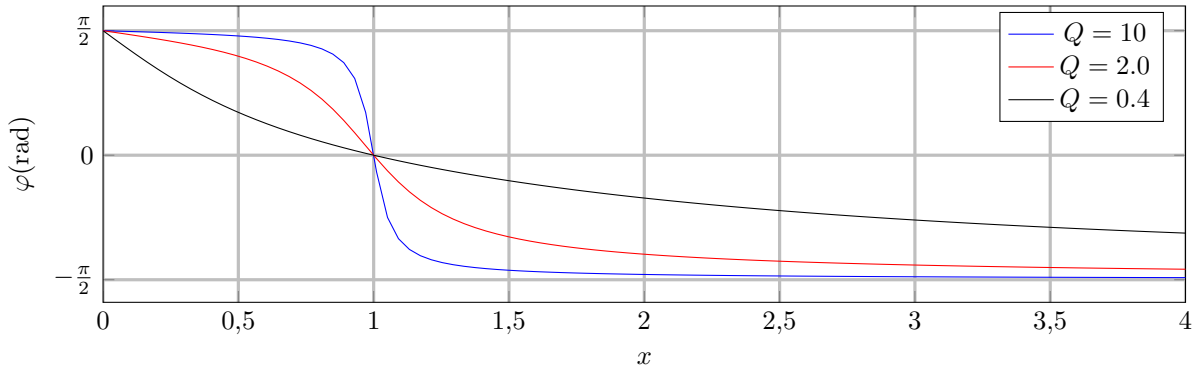
On obtient la relation : $\boxed{Q = \frac{f_r}{\Delta f} = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{x_r}{\Delta x}}$

Exemple : Déphasage

On cherche à regarder la différence de phase entre l'intensité du courant i et la f.e.m e du générateur. Soit $\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t - \varphi)}$:

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_R}{R} = \frac{\underline{e}}{R} \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} \iff I_m e^{-j\varphi} = \frac{E_m}{R} \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} \implies \varphi = \arg 1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Comme $\Re e \left(1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = 1 > 0$ alors on peut exprimer le déphasage : $\varphi(x) = -\arctan \left[Q \left(x - \frac{1}{x}\right) \right]$



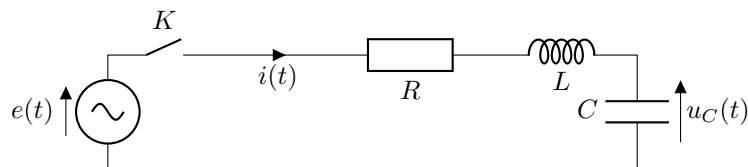
On remarque également que pour $\omega = \omega_0$ le courant est en phase avec la tension du générateur.

Propriété : Déphasage et pulsation propre

Lorsque le système oscille à $\omega = \omega_0$ la pulsation propre du système. L'intensité du courant et la tension du générateur sont en phase $\forall Q$.

4 Résonance d'un passe-bas d'ordre 2**Exemple : Circuit RLC série**

On étudie un circuit RLC série alimenté par un GBF en régime sinusoïdale forcé de f.e.m. $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ avec E_m fixé et on fait varier ω .



On cherche cette fois à mesurer la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$:

$$\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \underline{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega} \underline{e}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ on obtient : $\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$

Exemple : Recherche de la fréquence de résonance

On cherche la pulsation de résonance ω_r pour laquelle l'amplitude réelle de la tension aux bornes du condensateur est maximale. L'amplitude de u_C s'exprime :

$$U_{Cm} = |\underline{u}_C| = \left| \frac{\underline{e}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \right| = \frac{|\underline{e}|}{\left| 1 - x^2 + j\frac{x}{Q} \right|} = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

On cherche alors $x_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$ tel que :

$$\frac{dU_{Cm}}{dx}(x = x_r) = 0 \iff \frac{d((1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2})}{dx}(x = x_r) = 0 \iff x_r = 0 \text{ ou } x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On a résonance en intensité lorsque la fréquence d'excitation est la fréquence propre du système. Soit $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

Exemple : Amplitude de résonance

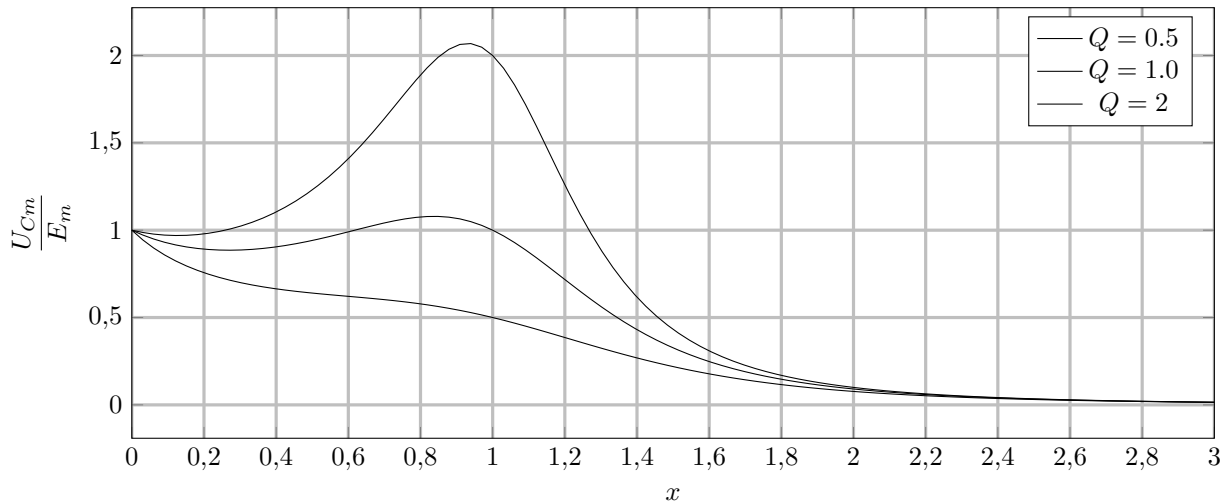
L'amplitude de résonance $U_{Cm}(\omega_r)$ est donc :

$$U_{Cm}(\omega_r) = \frac{E_m}{\sqrt{\left(1 - 1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q^2}}{Q^2}}} = \frac{E_m}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}} = \frac{E_m Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Dans le cas d'un système faiblement amorti où $Q \gg 1$, on a $U_{Cm}(\omega_r) \approx E_m Q$

Exemple : Influence de Q

On peut alors tracer en fonction de x pour différentes valeurs de Q la fonction U_{Cm} :



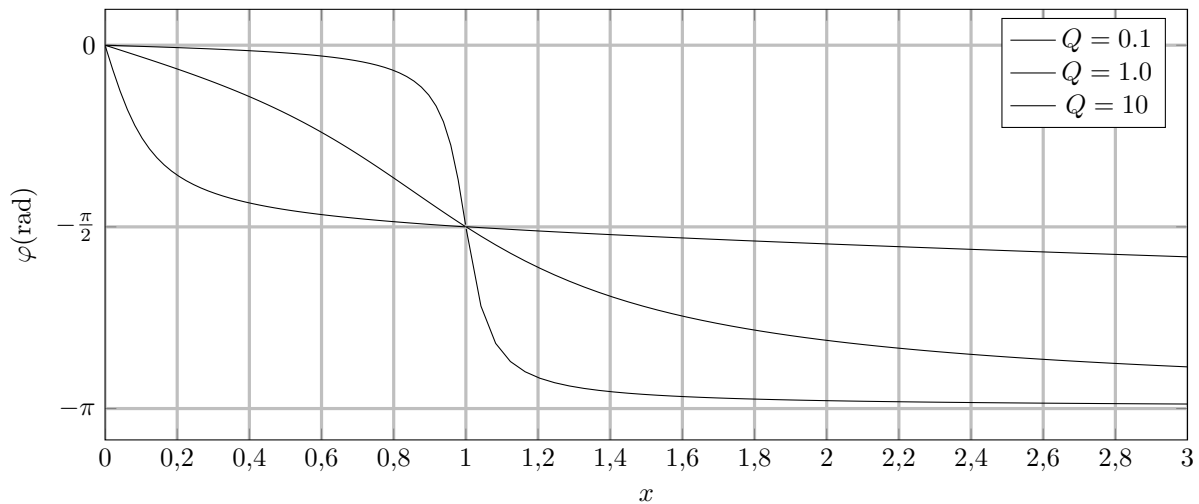
Exemple : Déphasage

Soit $\underline{e}(t = E_m e^{j\omega t})$ et $\underline{u}_C(t) = U_{Cm} e^{j(\omega t + \varphi)}$. On peut également calculer le déphasage de l'intensité du courant par rapport à la source de tension :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \iff U_{Cm} e^{j\varphi} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \implies \varphi = -\arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right)$$

Comme $\Re\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right) = 1 - x^2$ alors on peut exprimer le déphasage :

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right) & \text{pour } x < 1 \\ -\pi - \arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right) & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$



On remarque également que pour $\omega = \omega_0$ le courant est en phase avec la tension du générateur.

Propriété : Déphasage et pulsation propre

Lorsque le système oscille à $\omega = \omega_0$ la pulsation propre du système. La tension aux bornes du condensateur et la tension du générateur sont déphasés de $-\frac{\pi}{2} \forall Q$.

5 Signaux périodiques

Propriété : Décomposition

Soit un signal $s(t)$ périodique de période $T_S = \frac{1}{f_S}$. Un théorème mathématique découvert par Joseph Fourier indique que :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$$

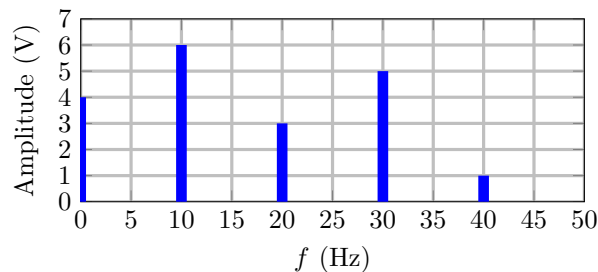
avec A_n des constantes positives et φ_n des constantes.

On peut donc décomposer n'importe quel signal périodique en son développement en série de Fourier. A_n et φ_n représentent l'amplitude et la phase initiale de la $n^{\text{ième}}$ composante sinusoïdale du signal $s(t)$.

A_0 est la composante continue du signal, c'est aussi sa valeur moyenne. La composante pour $n = 1$ est appelée fondamentale. Les composantes $n > 1$ sont appelées harmoniques de rang n .

Propriété : Spectre

On peut caractériser un signal périodique par son spectre, la courbe des amplitudes associée à chaque fréquence :



Définition : Valeur moyenne

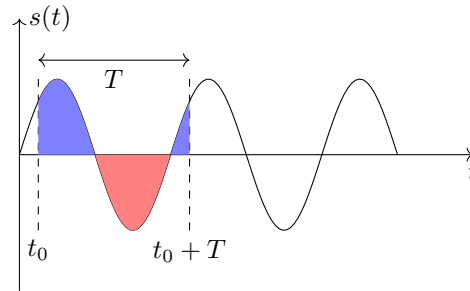
On peut calculer la valeur moyenne d'un signal périodique $s(t)$ de période T :

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$$

Propriété : Valeur moyenne d'un signal sinusoïdal

Pour un signal sinusoïdal de la forme $s(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$ on a comme valeur moyenne :

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A_1 \cos(\omega t + \varphi) dt = 0$$

**Propriété : Valeur moyenne d'un signal périodique**

Pour un signal périodique quelconque $s(t)$ de période T , on a alors grâce à la décomposition en série de Fourier :

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \right) dt = A_0$$

Définition : Valeur efficace

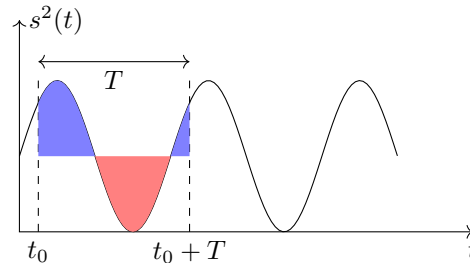
On peut calculer la valeur efficace d'un signal périodique $s(t)$ de période T :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt}$$

Propriété : Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

Pour un signal sinusoïdal de la forme $s(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$ on a comme valeur moyenne :

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} \\ &= \frac{A_1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

**Propriété : Valeur efficace d'un signal périodique**

Pour un signal périodique quelconque $s(t)$ de période T , on a alors grâce à la décomposition en série de Fourier :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \right)^2 dt} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n^2}{2}}$$

Propriété : Linéarité d'un filtre

On définit un filtre linéaire un opérateur qui permet de sélectionner des signaux utiles, sur un critère fréquentiel. Il est composé d'un circuit électrique recevant un signal d'entrée $e(t)$ et délivrant un signal de sortie $s(t)$ tous deux analogiques.



On considère un filtre linéaire lorsque la relation entre le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$ est une équation différentielle linéaire de la forme :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de}{dt}$$

L'ordre de l'équation différentielle est également appelé ordre du filtre.

Le filtre étant linéaire, comme un signal d'entrée peut être décomposé suivant son spectre, on a pour :

$$e(t) = \sum_{\omega_1}^{\omega_n} E_i \cos(\omega_i t)$$

Pour chaque ω_i on a la réponse $s_i(t) = \mathcal{R}e(\underline{H}(\omega_i)e_i(t)) = S_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$. On peut alors calculer :

$$s(t) = \sum_{\omega_1}^{\omega_n} \mathcal{R}e\left(\underline{H}(\omega_i)E_i e^{j\omega_i t}\right)$$

6 Capacité numérique : Filtrage numérique d'un signal périodique

Propriété : Capacité numérique

Simuler, à l'aide de python, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

Definition : Spectre d'un signal périodique

Soit un signal $e(t)$ périodique de période $T_S = \frac{1}{f_S}$. Un théorème mathématique découvert par Joseph Fourier indique que :

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$$

avec C_n des constantes positives et φ_n des constantes.

On peut donc décomposer n'importe quel signal périodique en son développement en série de Fourier. C_n et φ_n représentent l'amplitude et la phase initiale de la $n^{\text{ième}}$ composante sinusoïdale du signal $s(t)$.

Exemple : Signal rectangulaire

Soit un signal rectangulaire $e(t)$ d'amplitude E et de période T , défini sur $[0; T[$ comme : $e(t) = \begin{cases} E & \text{pour } t \in [0; T/2[\\ -E & \text{pour } t \in [T/2; T[\end{cases}$

```

1 | def Crenau(t, nmax):
2 |     e=np.zeros(len(t))
3 |     N=np.array([n for n in range(1, nmax, 2)])
4 |     En=np.array([4/(np.pi*n) for n in N])
5 |     phin=np.array([3*np.pi/2 for n in N])
6 |     for k in range(len(N)):
7 |         n=N[k]
8 |         e=e+En[k]*np.cos(2*np.pi*n*f1*t+phin[k])
9 |     return e, N, En, phin
10 |

```

Definition : Linéarité d'un filtre

Si on considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(f)$. Si le signal d'entrée est périodique de fréquence f_1 , et de décomposition qui donne les suites C_n et φ_n alors le signal de sortie sera :

$$e(t) = |H(0)| C_0 \cos(\arg \underline{H}(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty} |H(nf_1)| C_n \cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n - \arg \underline{H}(nf_1))$$

Propriété : Fonction transfert

On peut écrire des fonctions pour simuler l'action d'un filtre pour chaque type de filtre :

- Filtre passe-bas d'ordre 1 :

```

1 | def gainPB1(f, fc):
2 |     return 1/np.sqrt(1+(f/fc)**2)

```

```

3 |     def argPB1(f, fc):
4 |         return -np.arctan(f/fc)
5 |

```

Propriété : Action du filtre

Pour connaître la signal de sorti, on utilise la linéarité du filtre, et en utilisant les fonctions définies ci-dessus :

```

1 |     def PB1(N, En, phin, t, f, fc):
2 |         s=np.zeros(len(t))
3 |         for k in range(len(N)):
4 |             n=N[k]
5 |             s=s+En[k]*gainPB1(n*f1, fc)*np.cos(2*np.pi*n*t+phin[k]+argPB1(n*f1, fc))
6 |         return s
7 |         nmax=100
8 |     n=10000
9 |     f1=1
10 |    dt=2/(f1*(n-1))
11 |    t=np.array([k*dt for k in range(n)])
12 |    plt.figure()
13 |    e,N,En,phin=Crenau(t,nmax)
14 |    plt.plot(t,e)
15 |    fc=0.1*f1
16 |    s=PB1(N,En,phin,t,f1,fc)
17 |    plt.plot(t,s)
18 |    fc=1*f1
19 |    s=PB1(N,En,phin,t,f1,fc)
20 |    plt.plot(t,s)
21 |    fc=10*f1
22 |    s=PB1(N,En,phin,t,f1,fc)
23 |    plt.plot(t,s)
24 |    plt.legend(['e(t)', 's(t) pour fc=f1/10', 's(t) pour fc=f1', 's(t) pour fc=10f1'])
25 |    plt.xlabel(['t$_{\text{en}}$s'])
26 |    plt.ylabel(['e$_{\text{et}}$s$_{\text{en}}$V'])
27 |    plt.show()

```

Signaux 6 : Champ magnétique et ses actions

1 Champ magnétique

Definition : Champ magnétique

Le champ magnétique noté \vec{B} est défini par la force magnétique s'exerçant sur une particule chargée de charge q animée d'une vitesse \vec{v} dans le référentiel d'étude :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ avec } \vec{B} \text{ en T}$$

Propriété : Source de champ magnétique

On retiendra qu'un champ magnétique peut être produit par :

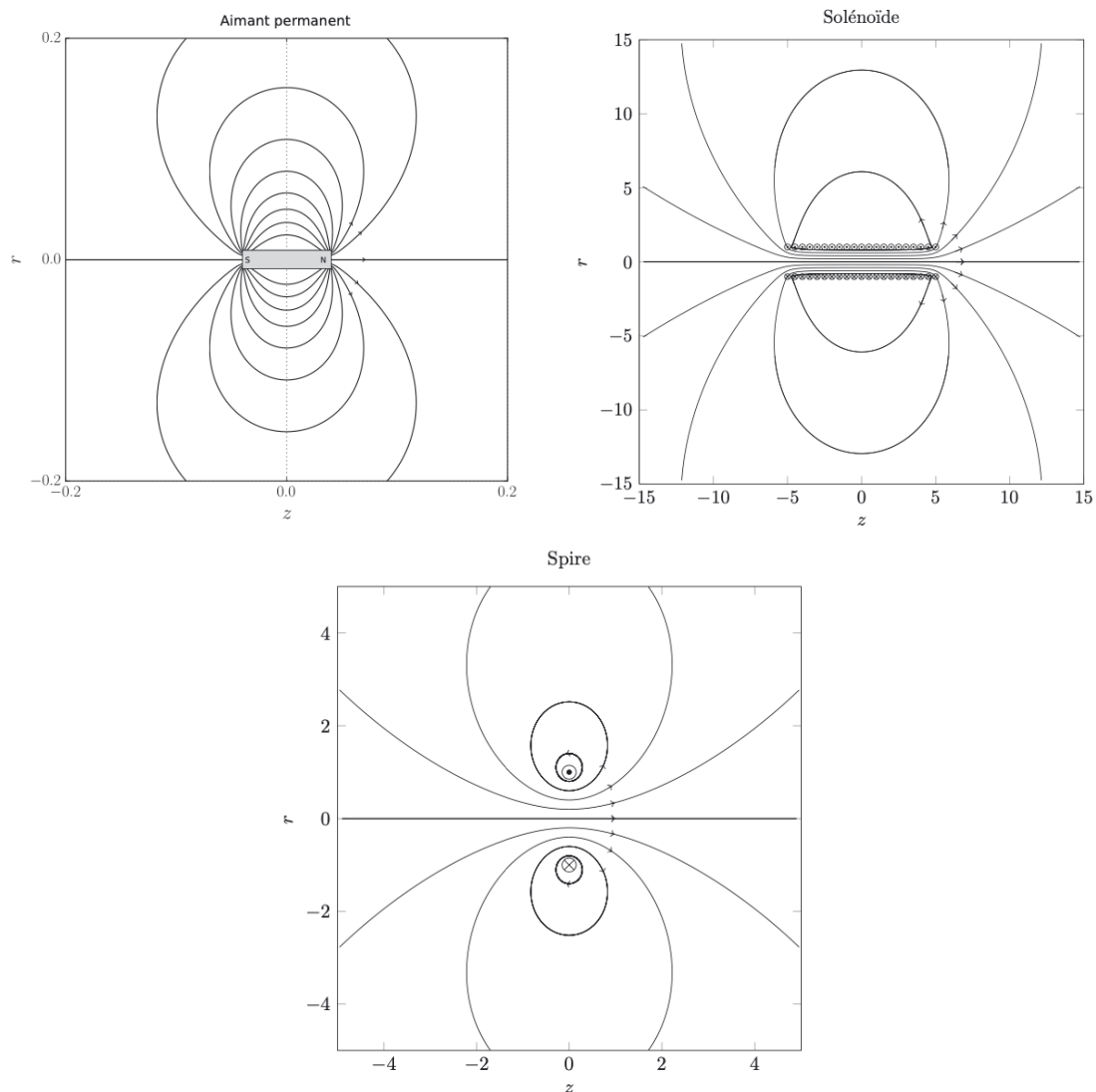
- Un aimant permanent possédant deux pôles magnétiques.
- Une boucle (circuit électrique fermé) parcouru par un courant.

Definition : Lignes de champ

Les lignes de champ magnétique sont tangentes en chaque point au vecteur champ magnétique en ce point et sont orientées dans le sens de ce champ.

Definition : Carte de champ

Une carte de champ est un ensemble de lignes de champ. On montre par exemple :



Propriété : Lecture d'une carte de champ

En lisant une carte de champ on obtient les informations suivantes :

- Le sens du courant : en utilisant la règle de la main droite, les lignes de champ tournent autour d'une boucle de courant.
- Le pôle nord et le pôle sud : sur un aimant permanent, les lignes partent du pôle nord pour aller vers le pôle sud.
- Les zones de champ intense/faible : plus les lignes de champs sont proches, plus le champ magnétique est intense.
- Les zones de champ uniforme : lorsque les lignes de champs sont parallèles et équitablement espacées, le champ dans la zone le champ est uniforme et de direction constante.

Definition : Moment magnétique

Soit un circuit filiforme plan constitué d'une boucle de courant parcourue par un courant d'intensité I . Le moment magnétique \vec{m} du circuit (en $A \cdot m^2$) est défini par :

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

où $\vec{S} = S \vec{n}$ est le vecteur surface de norme S (aire du circuit) et \vec{n} le vecteur unitaire :

- orthogonal au plan contenant le circuit,
- orienté par le sens d'orientation du courant et donné par la règle de la main droite (coordonnées cylindriques avec \vec{u}_θ tangent au courant).

Dans le cas d'un aimant permanent, comme la carte de champ magnétique ressemble à celle d'une bobine, on considère que le moment magnétique est celui d'une bobine qui produirait le même champ.

Propriété : Symétrie des sources de champ magnétique

Soit un point M de l'espace, on considère :

- si $M \in \mathcal{P}$ où \mathcal{P} désigne un plan de symétrie des courants, alors le champ magnétique créé par les courants au point M est orthogonal au plan \mathcal{P} .

$$\vec{B}(M) \perp \mathcal{P}$$

- si $M \in \mathcal{P}'$ où \mathcal{P}' désigne un plan d'antisymétrie des courants passant par M alors le champ magnétique créé par les courants au point M est contenu dans le plan \mathcal{P}' .

$$\vec{B}(M) \in \mathcal{P}'$$

Propriété : Réalisation d'un champ magnétique uniforme

On retiendra les dispositifs suivant pour réaliser une zone de champ quasi-uniforme :

- bobine longue (solénoïde) : zone de champ uniforme à l'intérieur de la bobine ;
- deux bobines de Helmholtz : deux bobines placées face à face, le champ entre les deux est quasi-uniforme ;
- Aimant permanent en U : zone de champ uniforme entre les deux pôles.

Remarque : Ordre de grandeur

On donne les ordres de grandeurs de champs magnétiques :

- Au voisinage d'un aimant : 0,01 T à 1 T
- Dans un IRM : 1 T à 10 T
- Du champ magnétique terrestre : 5×10^{-5} T

On donne les ordres de grandeurs de moment magnétique :

- Boussole : $10^{-2} A \cdot m^2$
- Aimant permanent : $1 A \cdot m^2$
- Terre : $7,5 \times 10^{22} A \cdot m^2$

2 Actions d'un champ magnétique

Definition : Force de Laplace

On considère une portion de longueur dl de conducteur parcouru par un courant $i(t)$. En présence d'un champ magnétique extérieur \vec{B}_0 l'élément de conducteur est soumis à la force linéique de Laplace :

$$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}_0$$

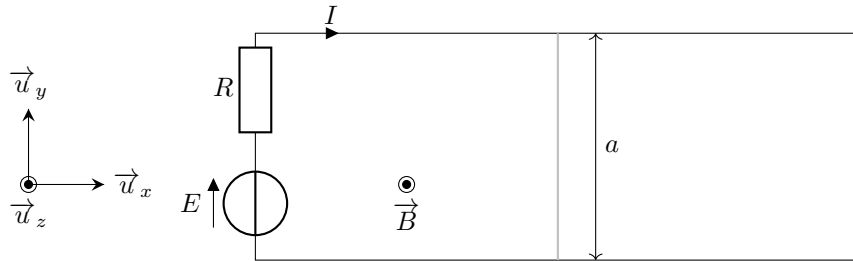
où le vecteur \vec{dl} est orienté dans le sens algébrique choisi pour l'intensité du courant.
 Si le champ \vec{B}_0 est uniforme et le conducteur rectiligne de longueur L :

$$\vec{F} = i \vec{L} \wedge \vec{B}_0$$

où \vec{L} est orienté dans le sens algébrique du courant et de norme L .

Propriété : Rail de Laplace

On considère un circuit ouvert composé d'un générateur de tension idéale et d'une résistance. On ferme le circuit à l'aide d'un conducteur métallique de longueur a posé sur le circuit.



Le circuit est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ avec $B_0 > 0$.
 Le conducteur métallique est soumis à la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = -IB_0a \vec{u}_x$$

La force de Laplace met alors en mouvement le conducteur métallique qui se dirige vers le générateur.
 La puissance fournie au conducteur métallique de vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$ vaut alors :

$$\mathcal{P} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -IB_0v$$

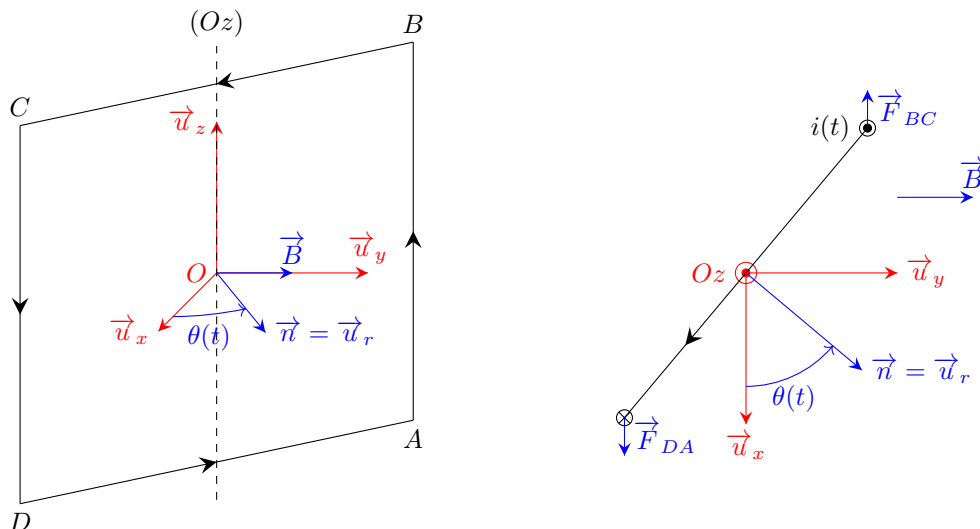
Definition : Couple de Laplace

Soit un circuit rectangulaire de côtés a et b fermé parcouru par un courant i et de moment magnétique $\vec{m} = i \vec{S}$ plongé dans un champ magnétique \vec{B} , le circuit est soumis au couple de Laplace :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Propriété : Spire carré en rotation

On considère une spire carrée de côté a parcourue par un courant $i(t)$. La spire est en liaison pivot idéale d'axe (Oz) qui passe par son centre. Elle est plongée dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_y$.



On calcule le couple de Laplace en utilisant la formule :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B} = ia^2 \vec{n} \wedge (B_0 \vec{u}_y) = ia^2 B_0 \cos(\theta) \vec{u}_z$$

Démonstration : on calcule la force de Laplace exercée sur chaque segment puis le moment scalaire de la force par rapport à l'axe (Oz)

- Segment AB : $\vec{F}_{AB} = iaB_0 \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -iaB_0 \vec{u}_x$ soit $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{AB}) = +\frac{a}{2} \cos(\theta) iaB_0$
- Segment BC : $\vec{F}_{BC} = iB_0 \vec{BC} \wedge \vec{u}_y = +iaB_0 \sin(\theta) \vec{u}_z$ soit $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{BC}) = 0$
- Segment CD : $\vec{F}_{CD} = -iaB_0 \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = +iaB_0 \vec{u}_x$ soit $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{CD}) = +\frac{a}{2} \cos(\theta) iaB_0$
- Segment BC : idem qu'en BC soit $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{DA}) = 0$

On obtient à la fin le même résultat que précédemment.

Signaux 7 : Circuit fixe dans un champ magnétique variable

1 Lois de l'induction

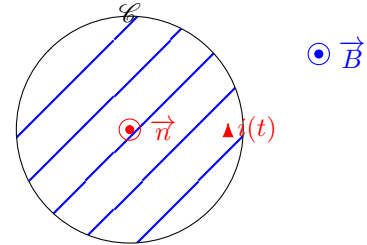
Definition : Flux d'un champ magnétique

Soit une spire \mathcal{C} fermée dans un champ magnétique extérieur \vec{B} . Le flux Φ du champ \vec{B} à travers la spire \mathcal{C} est défini par :

$$\Phi = \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

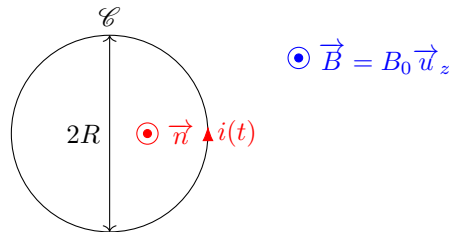
où $d\vec{S} = dS\vec{n}$ est le vecteur surface élémentaire, \vec{n} le vecteur normal à la surface orienté en fonction de l'orientation de $i(t)$ en utilisant la règle de la main droite.

Si \vec{B} est uniforme : $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$

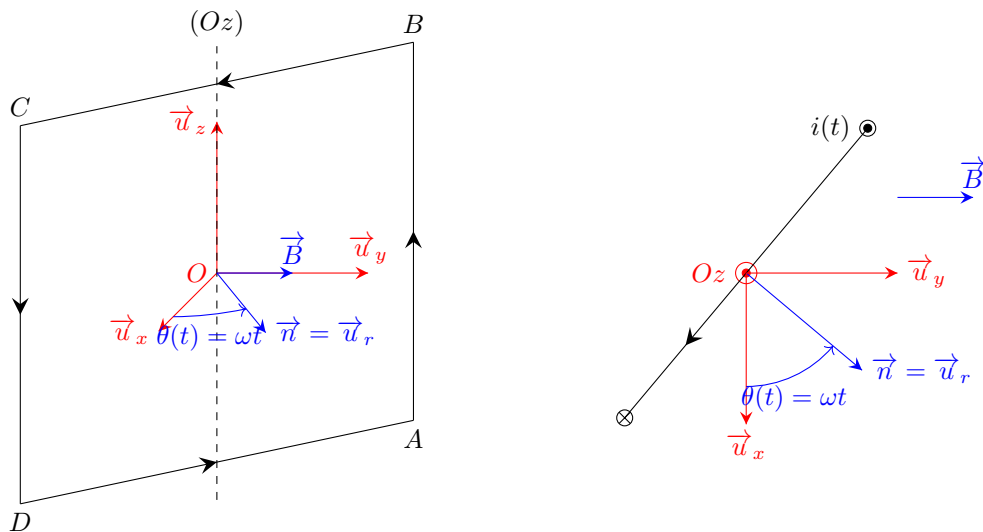


Exemple : Calculs de Φ

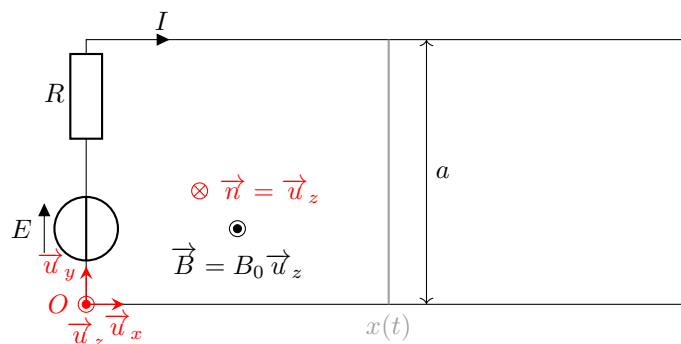
- Une spire circulaire : $\Phi = \pi R^2 B_0$



- Une spire carrée en rotation à la vitesse ω : $\Phi = B_0 a^2 \vec{n} \cdot \vec{u}_y = B_0 a^2 \sin(\omega t)$



- Rail de Laplace : $\Phi = B_0 a x(t) \vec{n} \cdot \vec{u}_z = -B_0 a x(t)$



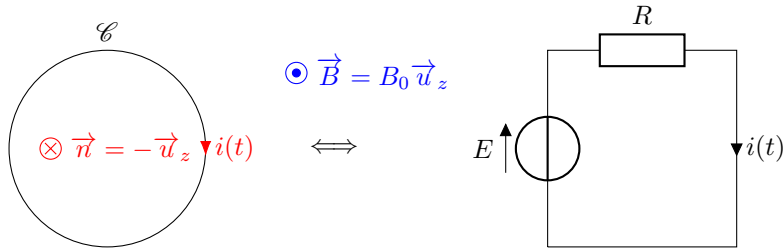
Loi de Faraday

Soit un circuit conducteur fermé \mathcal{C} de résistance R plongé dans un champ magnétique \vec{B} et dont le flux à travers le

circuit fermé est noté Φ . Le circuit voit apparaître une f.e.m. à ses bornes :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où e est la f.e.m. d'un générateur équivalent orientée en convention générateur dans le circuit électrique vis à vis du sens du courant choisi.



Loi de modération de Lenz

Les phénomènes d'induction tendent à s'opposer, par leurs effets, aux causes qui leur ont donné naissance.

Propriété : Courant induit

Lors d'un phénomène d'induction dans un circuit fermé, la force électromotrice induite entraîne l'apparition d'un courant induit ayant deux effets :

- création d'un champ magnétique propre qui s'oppose à la variation du flux ;
- création d'une force de Laplace dans le circuit qui tend à s'opposer à la variation du flux, dans le cas de circuits mobiles.

2 Auto-induction

Definition : Flux propre et inductance propre

Un circuit électrique filiforme parcouru par un courant d'intensité i crée un champ magnétique, dont le flux à travers le circuit est proportionnel à i :

$$\Phi_p = Li$$

Le coefficient L est appelé coefficient d'auto-inductance, ou inductance propre du circuit. Il s'exprime en henry (H).

Exemple : Inductance propre d'une bobine

Considérons une bobine d'axe \vec{u}_z longue de longueur l et composé de N spires de rayon R . On peut montrer que le champ magnétique à l'intérieur de la bobine vaut :

$$\vec{B}(t) = \mu_0 \frac{N}{l} i(t) \vec{u}_z$$

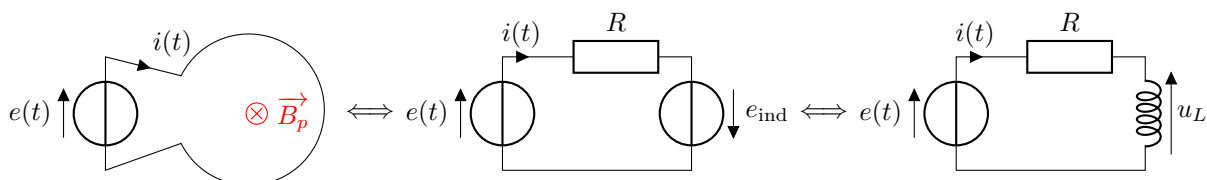
On note S la surface d'une spire, le flux propre à travers la bobine vaut :

$$\Phi_p = NSB(t) = NS\mu_0 \frac{N}{l} i(t) = Li(t) \implies L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

avec $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$, $R = 3 \text{ cm}$, $l = 30 \text{ cm}$ et $N = 1000$ spires on a : $L = 12 \text{ mH}$

Propriété : Schéma électrique équivalent

On considère un circuit électrique \mathcal{C} de résistance R parcouru par un courant i et de coefficient d'auto-induction L , le circuit est alimenté par un générateur de tension de f.e.m. $e(t)$, il produit donc un champ magnétique propre \vec{B}_p et n'est en présence d'aucun champ magnétique extérieur :



En utilisant la loi de Faraday, on obtient :

$$e_{\text{induit}} = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt} = -u_L$$

On a alors comme schéma électrique équivalent :

Remarque : Loi de Lenz

L'augmentation du courant i dans la bobine génère une force électromotrice qui doit, d'après la loi de Lenz, s'opposer à cette augmentation, c'est-à-dire être négative.

Propriété : Bilan de puissance

À partir du schéma électrique équivalent on peut réaliser un bilan de puissance en appliquant la loi des mailles :

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} \implies e(t)i(t) = Ri^2(t) + i(t)L\frac{di}{dt}$$

$$\mathcal{P}_G = P_J + \frac{d\mathcal{E}_{\text{magn}}}{dt}$$

avec \mathcal{P}_G la puissance fournie par le générateur, \mathcal{P}_J la puissance dissipée par effet joule et $\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2}Li^2(t)$ l'énergie magnétique produite par le circuit.

3 Induction mutuelle

Definition : Inductance mutuelle

On considère un circuit \mathcal{C}_1 de résistance R_1 et le coefficient d'auto-induction L_1 alimenté par un générateur de tension de f.e.m. $e(t)$.

On place en face un circuit \mathcal{C}_2 fermé de résistance R_1 et de coefficient d'auto-induction L_2 .

On suppose que les deux circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont parcourus respectivement par les courants i_1 et i_2 . Les deux circuits électriques créent chacun un champ propre \vec{B}_1 et \vec{B}_2 .

On calcule le flux du champ magnétique total $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ à travers le circuit électrique \mathcal{C}_1 :

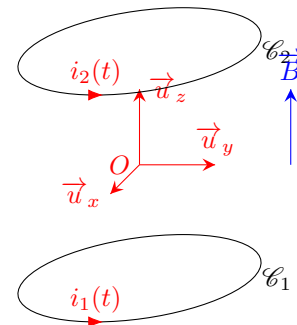
$$\Phi_1 = \Phi_{p1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

On calcule le flux du champ magnétique total $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ à travers le circuit électrique \mathcal{C}_2 :

$$\Phi_2 = \Phi_{p2} + \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

On définit l'inductance mutuelle comme le coefficient qui dépend du couplage $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$:

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2 \text{ et } \Phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1$$



Exemple : Couplage de deux bobines longues

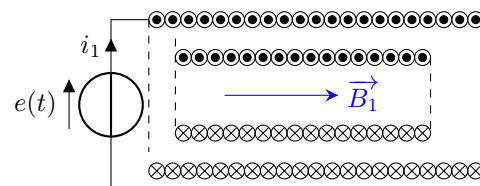
On considère une bobine \mathcal{C}_1 de rayon a_1 , de résistance R_1 et de coefficient d'auto-induction L_1 alimentée par un générateur de tension de f.e.m. $e(t)$ qui délivre un courant i_1 .

On place en face une bobine \mathcal{C}_2 de rayon $a_2 < a_1$, de résistance R_2 et de coefficient d'auto-induction L_2 . On suppose que la bobine est fermée et parcourue par un courant i_2 .

On calcule alors :

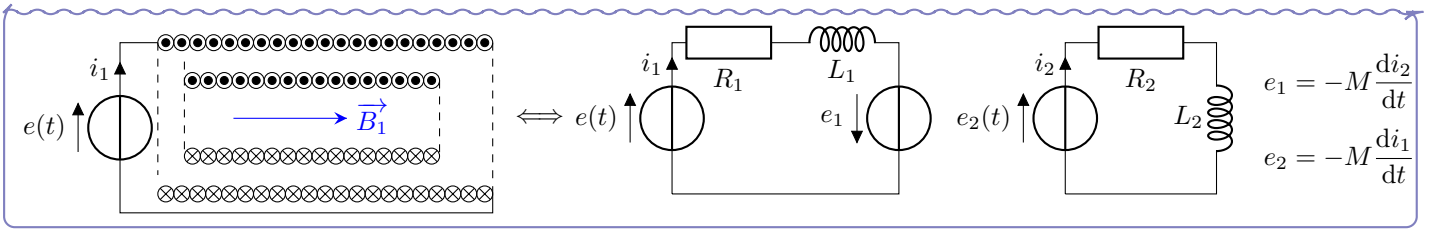
$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = N_2 \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \pi a_2^2 = Mi_1$$

avec $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi a_2^2}{l_1}$



Propriété : Schéma électrique équivalent

On peut alors modéliser les deux bobines par les circuits électriques suivants :



$$e_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$

Propriété : Bilan de puissance

On peut établir un bilan de puissance sur chaque circuit :

$$e(t) - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$e(t) i_1(t) - M i_1(t) \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1^2(t) + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$-M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$-M i_2(t) \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2^2(t) + L_2 i_2(t) \frac{di_2}{dt}$$

On fait alors la somme et on obtient :

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_{J1} + \mathcal{P}_{J2} + \frac{d \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)}{dt}$$

Exemple : Table à induction

On place un anneau métallique assimilé à une spire de rayon $r = 2,5 \text{ cm}$ et de résistance $R = 0,1 \Omega$ dans la bobine que l'on considérera comme infiniment longue possédant une densité linéique de spires n .

On alimente la bobine par un courant sinusoïdal de la forme $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. La bobine et l'anneau ont le même axe de révolution (Oz).

Le champ à l'intérieur de la bobine infiniment longue, appelé solénoïde, vaut : $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$.

- Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans l'anneau en fonction du temps. En déduire la puissance dissipée en moyenne.
- Sachant que la bobine possède 200 spires par mètre et que l'on alimente avec une fréquence de 100 kHz, calculer l'amplitude du courant I_0 nécessaire pour chauffer avec une puissance de 500 MW dans l'anneau.

On calcule le flux du champ \vec{B} produit par la bobine à travers l'anneau : $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_0 n i(t) \pi r^2$

On en déduit la f.e.m. induite dans l'anneau : $e_{\text{induit}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 n \pi r^2 \frac{di}{dt} = \mu_0 n \pi r^2 \omega I_0 \sin(\omega t)$

Comme on néglige l'auto-induction dans l'anneau : $e_{\text{induit}} = R i_{\text{induit}} \implies i_{\text{induit}} = \frac{\mu_0 n \pi r^2 \omega}{R} I_0 \sin(\omega t)$

On en déduit alors la puissance dissipée par effet joule dans l'anneau : $\mathcal{P}_J = R i_{\text{induit}}^2 = \frac{\mu_0^2 n^2 \pi^2 r^4 \omega^2 I_0^2}{R} \cos^2(\omega t)$

En moyenne sur une période on a donc : $\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\mu_0^2 n^2 \pi^2 r^4 \omega^2 I_0^2}{2R} \iff I_0 = 8,1 \text{ A}$

Propriété : Découplage en RSF

Si on a $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ on peut passer en complexe :

$$\underline{e} = (R_1 + j\omega L_1) \underline{i}_1 + jM\omega \underline{i}_2$$

$$0 = (R_2 + j\omega L_2) \underline{i}_2 + jM\omega \underline{i}_1$$

On peut alors découpler les équations pour obtenir :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\underline{e}}{\underline{i}_1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_1 + jL_2\omega}$$

Remarque : Transfert d'énergie sans contact

L'inductance mutuelle permet de faire un transfert d'énergie sous forme magnétique sans contact. Ce transfert est utile lors :

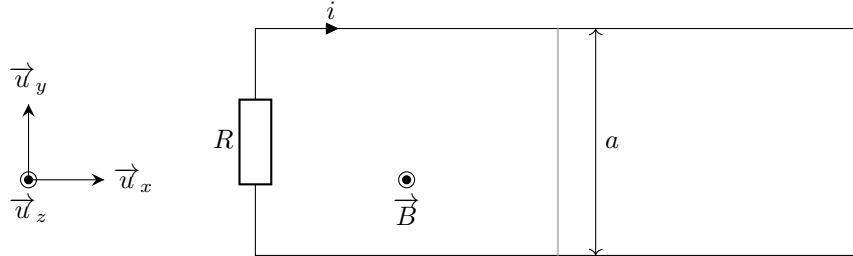
- D'un chauffage d'une casserole sur une plaque à induction ;
- De l'utilisation d'un transformateur pour adapter l'énergie transportée par le réseau électrique à une utilisation domestique.

Signaux 8 : Conversion électromécanique de puissance

1 Rail de Laplace : Conversion mécanique-électrique

Definition : Rail de Laplace

On considère une tige métallique de masse m conductrice qui glisse sans frottement à la vitesse $\vec{v} = v(t)\vec{u}_x$ sur deux rails conducteurs. Le circuit est plongé dans un champ magnétique extérieur \vec{B}_0 stationnaire orthogonal au circuit :



Propriété : Équation électrique

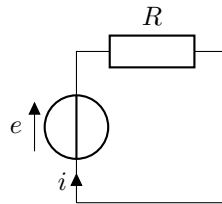
On calcule le flux du champ magnétique à travers la surface formée par le circuit :

$$\Phi = \vec{B}_0 \cdot \vec{S} = -B_0 a x(t)$$

On a alors une f.e.m. induite donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 a \frac{dx}{dt} = B a v(t)$$

On trace le circuit électrique équivalent :



L'application de la loi des mailles nous donne alors :

$$e(t) = R i(t) \implies i(t) = \frac{B_0 a v(t)}{R}$$

Remarque :

Dans cet exemple on néglige totalement le flux propre qui en pratique est négligeable lorsque l'inductance du circuit est faible, ce qui est le cas lorsqu'on n'a qu'une seule spire en général.

Propriété : Équation mécanique

Système : $\{M(m)\}$ tige conductrice assimilée à un point M

Référentiel : Terrestre supposé galiléen de repère $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Bilan :

- $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{u}_x$ force constante de l'opérateur qui met la tige en mouvement tout au long de l'expérience.
- \vec{F}_L la force de Laplace qui s'exerce sur la tige lors de l'apparition du courant i dans le circuit.

$$\vec{F}_L = i(t) a B_0 \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = i(t) B_0 a \vec{u}_x$$

- Le poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$;
- La réaction normale aux rails \vec{R}_N

PFD : $m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{F}_{op} + \vec{F}_L + \vec{P} + \vec{R}_N$

On projette le principe fondamental de la dynamique sur \vec{u}_x :

$$m \ddot{x} = F_{op} + i(t) B_0 a$$

Propriété : Découplage des équations électro-mécanique

Sachant que $i(t) = -\frac{B_0 a v(t)}{R}$ on obtient l'équation du mouvement :

$$m \frac{dv}{dt} = f - \frac{(B_0 a)^2}{R} v(t)$$

On voit alors que la force de Laplace agit comme une force de frottement fluide qui vient s'opposer au mouvement qui la cause. C'est une manifestation de la loi de Lenz.

Propriété : Bilan de puissance

On fait un bilan de puissance sur deux équations électrique et mécanique :

$$\begin{aligned} -B_0 a v(t) i(t) &= R i^2(t) \\ m \frac{dv}{dt} v(t) &= f + a B_0 i(t) v(t) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\frac{dE_c}{dt} + R i^2 = f v(t)$$

La puissance fournie par l'opérateur est transformée en énergie cinétique et dissipée par effet joule.

Propriété : Freinage par induction

On a vu que la force de Laplace s'oppose au mouvement, on retiendra :

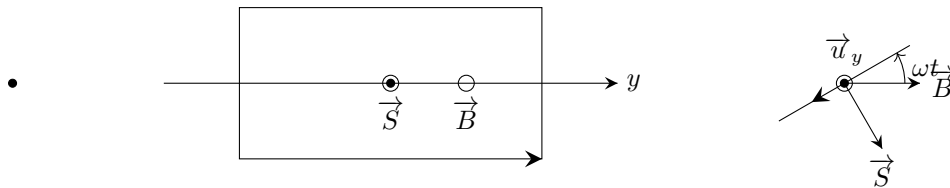
Dans tous les dispositifs où il y a conversion de puissance mécanique en puissance électrique, l'action mécanique de Laplace est une action de freinage.

2 Rotation autour d'un axe fixe d'une spire carré**Definition : Alternateur**

Un alternateur sert à transformer une puissance mécanique de rotation en une puissance électrique. L'alternateur est modélisé par une spire rectangulaire \mathcal{C} , de surface $a \times b$, conductrice de résistance électrique R .

Cette spire est en liaison pivot d'axe (Oy) par rapport à un stator. Elle est en rotation autour de l'axe (Oy) à la vitesse angulaire ω constante. Son moment d'inertie par rapport à l'axe est noté J_{Oy} .

Le circuit est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire \vec{B} perpendiculaire à (Oy) .

**Propriété : Équation électrique**

On calcule le flux du champ magnétique à travers la surface formée par le circuit :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B a b \sin(\omega t)$$

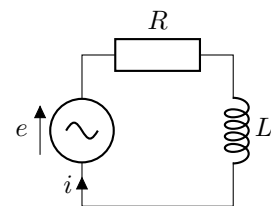
On a alors une f.e.m. induite donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B a b \cos(\omega t)$$

On prend en compte le phénomène d'auto-inductance en considérant que la spire possède une inductance propre L , on trace le circuit électrique équivalent.

L'application de la loi des mailles nous donne alors :

$$e(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} \implies -B a b \cos(\omega t) = R i(t) + L \frac{di}{dt}$$



Propriété : Équation mécanique

On effectue le bilan des actions mécaniques sur le conducteur en mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

- $\vec{\Gamma}_{ext} = \Gamma_{ext} \vec{u}_y$ couple extérieur qui maintient la rotation constante.
- $\vec{\Gamma}_L$ le couple de Laplace qui s'exerce sur la spire lors de l'apparition du courant i dans le circuit.

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B} = i(t) \vec{S} \wedge \vec{B} = iSB \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

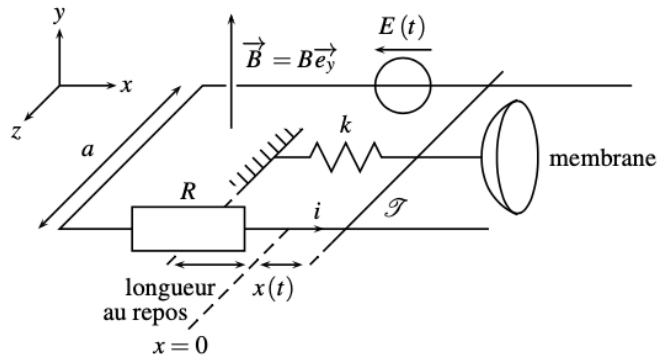
On applique la loi scalaire du moment cinétique à la spire suivant l'axe (Oy) :

$$J_{Oy} \dot{\omega} = \Gamma_{ext} + iSB \cos(\omega t) = 0$$

3 Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

Definition : Principe du haut parleur

Un haut-parleur est un appareil électromécanique qui transforme un signal électrique en signal sonore. On décide de modéliser le haut-parleur par une tige conductrice posée sur un rail de Laplace de résistance R et reliée via à une membrane élastique de raideur k au châssis. Le haut-parleur est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{u}_y$. Un générateur de tension impose une f.e.m. $E(t)$ au circuit.



Propriété : Équation mécanique

On effectue le bilan des actions mécaniques sur le système {Bobine / membrane} en mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

- $\vec{T} = -kx \vec{u}_x$ avec $z = 0$ pour $E(t) = 0$.
- $\vec{f} = -\alpha \dot{x} \vec{u}_z$ la force de frottement fluide.
- \vec{F}_L la force de Laplace qui s'exerce sur la bobine lors de l'apparition du courant i dans le circuit.

$$\vec{F}_L = iaB \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = i(t)aB \vec{u}_x$$

On applique le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe (Oz) :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x} + aBi(t)$$

Propriété : Équation électrique

On calcule le flux du champ magnétique à travers la surface formée par le circuit :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Ba(b + x(t))$$

On a alors une f.e.m. induite donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\dot{x}$

L'application de la loi des mailles nous donne alors : $e(t) + E(t) = Ri(t) \implies -Ba\dot{x} + E(t) = Ri(t)$

Propriété : Bilan de puissance

On fait un bilan de puissance sur deux équations électrique et mécanique :

$$\begin{aligned} -Bav(t)i(t) + E(t)i(t) &= Ri^2(t) \\ m\dot{v} &= -kxv - \alpha v^2 + aBi(t)v(t) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\frac{d(E_c + E_p)}{dt} + Ri^2 + \alpha v^2 = E(t)i(t)$$

La puissance fournie par le générateur est transformée en énergie mécanique et dissipée par effet joule et converti en énergie acoustique par l'intermédiaire de la force de frottement fluide.

Propriété : Régime sinusoïdal forcé

En régime sinusoïdal forcé on peut découpler les équations :

$$\begin{aligned} -Bav + \underline{E} &= Ri \\ m\dot{v} &= -kx - \alpha v + aBi \end{aligned}$$

Qui deviennent :

$$\begin{aligned} -Bav + \underline{E} &= Ri \\ jm\omega v &= -\frac{k}{j\omega}v - \alpha v + aBi \end{aligned}$$

On élimine v et on obtient :

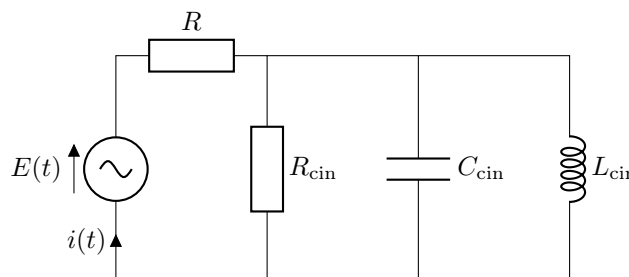
$$\underline{E} = \left(R + \frac{(Ba)^2}{jm\omega + \frac{k}{j\omega} + \alpha} \right) \underline{i} = (R + \underline{Z}_{\text{cin}})\underline{i}$$

On peut alors modéliser le couplage électromécanique par une impédance d'origine cinétique $\underline{Z}_{\text{cin}}$ qu'on modélise par l'association en parallèle d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{cin}}} = jC_{\text{cin}}\omega + \frac{1}{jL_{\text{cin}}\omega} + \frac{1}{R_{\text{cin}}}$$

avec :

$$\begin{aligned} C_{\text{cin}} &= \frac{m}{(Ba)^2} \\ L_{\text{cin}} &= \frac{(Ba)^2}{k} \\ R_{\text{cin}} &= \frac{(Ba)^2}{\alpha} \end{aligned}$$



Deuxième partie

Mécanique

Liste des chapitres Mécanique

1 Cinématique du point matériel	59
1 Relativité du mouvement	59
2 Repérage d'un point	60
3 Vitesse d'un point	62
4 Accélération d'un point	64
5 Exemples :	65
2 Dynamique du point matériel	67
1 Principe d'inertie	67
2 Principe fondamental de la dynamique	67
3 Le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme	70
4 Mouvement avec forces de frottements fluides	72
5 Mouvement circulaire	73
3 Les oscillateurs mécanique	75
1 Le système masse-ressort	75
2 Les oscillateurs amorti	76
3 Les oscillations forcées	77
4 Capacité numérique	78
4 Énergie, travail, puissance	79
1 Les grandeurs énergétiques	79
2 Le théorème de l'énergie cinétique	80
3 Étude qualitative de mouvements à une dimension	84
4 Application : Oscillation proche de l'équilibre	85
5 Mouvement de particules chargées	87
1 Force de Lorentz et notions de champs	87
2 Aspect énergétique	88
3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme	88
4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme	90
6 Loi du moment cinétique	93
1 Moment cinétique d'un point matériel	93
2 Moment d'une force	94
3 Théorème du moment cinétique	94
4 Application : le pendule simple	95
7 Champ de force centrale conservatif	97
1 Champ newtonien	97
2 Force centrale conservative	98
3 Aspects énergétiques	99
4 Trajectoire circulaire	101
5 Satellites terrestres	102
6 Capacité numérique	103

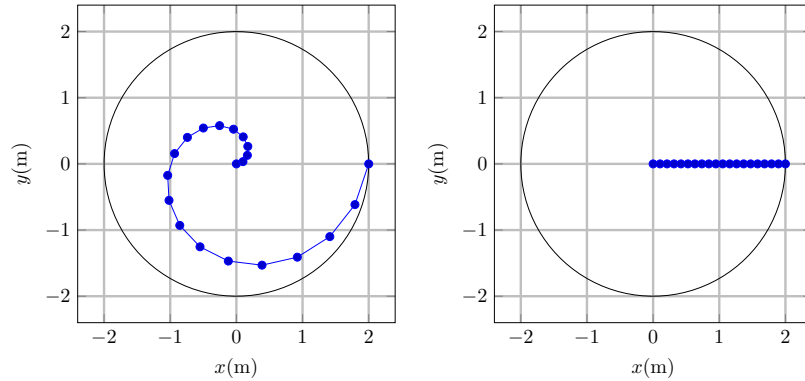
8	Introduction à la mécanique du solide	105
1	Cinématique du solide	105
2	Loi du moment cinétique scalaire	106
3	Énergie cinétique d'un solide en rotation	107
4	Le pendule pesant	107
5	Capacité numérique	108

Mécanique 1 : Cinématique du point matériel

1 Relativité du mouvement

On considère un homme qui marche sur un manège en rotatin du centre vers le bord en ligne droite :

- une caméra située sur le plafond du manège filme ;
- une caméra située sur un arbre filme



Question : Quelle figure correspond à quel point de vue ? On voit alors que le mouvement est relatif à l'observateur.

Definition : Référentiel

C'est un solide qu'on considère comme fixe et auquel est lié l'observateur du mouvement.

Le référentiel est caractérisé par :

- un repère $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$;
- une horloge qui définit une origine des temps $t = 0$ et la mesure des instants suivants t .

Remarque :

- Un instant t ou t_1 , qui correspond à une coordonnée temporelle par rapport à son origine.
- Une durée $\Delta t = t_2 - t_1$ qui correspond à la variation de temps séparant deux instants t_1 et t_2 .
- Les trois vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ peuvent être quelconques tant qu'ils ne sont pas colinéaires et qu'ils sont fixes dans \mathcal{R} .
- Définir un référentiel est la première étape lors d'une étude de mécanique. On ne peut étudier un mouvement si on ne sait pas dans quel référentiel on se place. Pour le définir, il faut préciser à quel objet le référentiel est lié, et donner une origine et trois axes.

Definition : Base orthonormée directe (BOND)

Une base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est orthonormée directe si :

- Vecteurs normés : $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$
- Vecteurs orthogonaux : $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = 0$
- Base directe : $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$ (règle de la main droite)

Propriété : Produit scalaire

Pour deux vecteur \vec{P} et \vec{Q} qu'on exprime dans une BOND $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\vec{P} = P_x \vec{u}_x + P_y \vec{u}_y + P_z \vec{u}_z \text{ et } \vec{Q} = Q_x \vec{u}_x + Q_y \vec{u}_y + Q_z \vec{u}_z$$

Le produit scalaire de \vec{P} et \vec{Q} s'écrit :

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = \|\vec{P}\| \|\vec{Q}\| \cos(\alpha) \text{ avec } \alpha(\vec{P}, \vec{Q})$$

Propriété : Hypothèses non-relativistes

Lors d'une description classique on a :

- les durées $\Delta t = t_2 - t_1$ qui ne dépendent pas du référentiel d'étude ;

- les distances entre deux points M_1 et M_2 :

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_2}$$

qui ne dépendent pas du référentiel d'étude.

Ces deux propriétés ne sont valables que lorsqu'on peut décrire de manière classique le mouvement. Si la vitesse des objets devient non négligeable devant la vitesse de la lumière c , on assiste à une dilatation du temps et de l'espace en fonction du référentiel d'observation. C'est la mécanique relativiste d'Einstein.

Propriété : Produit vectoriel

Pour deux vecteur \vec{P} et \vec{Q} qu'on exprime dans une BOND $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ on définit le produit vectoriel :

$$\vec{P} \wedge \vec{Q} = -\vec{Q} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_y Q_z - P_z Q_y \\ P_z Q_x - P_x Q_z \\ P_x Q_y - P_y Q_x \end{pmatrix} = \vec{W}$$

avec \vec{W} qui est orthogonal au plan défini par \vec{P} et \vec{Q} . On a également

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{P}\| \|\vec{Q}\| \sin(\alpha) \text{ avec } \alpha(\vec{P}, \vec{Q})$$

Exemple : Référentiel héliocentrique

Lié au centre du Soleil et à trois étoiles «fixes», c'est-à-dire suffisamment lointaines pour nous paraître fixes sur la durée du problème. Le soleil tourne dans le référentiel mais son centre est fixe. Noté \mathcal{R}_K .

Exemple : Référentiel géocentrique

Lié au centre de la Terre et à trois étoiles «fixes». En translation par rapport au référentiel héliocentrique. La Terre tourne dans le référentiel mais son centre est fixe. Noté \mathcal{R}_G .

Exemple : Référentiel Terrestre

Lié à la Terre, il peut se présenter en un point quelconque de la planète. Il est en rotation autour du centre de la Terre par rapport au référentiel géocentrique. C'est très souvent le référentiel classique en laboratoire. Noté \mathcal{R}_T .

Definition : Trajectoire

La trajectoire d'un point M , dans un référentiel donné, est l'ensemble des positions de ce point au cours du temps, rapportées à un repère fixe dans ce référentiel.

2 Repérage d'un point

Definition : Point matériel

Un point matériel est un solide dont on peut négliger l'extension spatiale et la rotation sur lui-même.

Remarque :

Pour un même système d'étude on pourra en fonction de la situation considérer le système comme un point matériel ou pas. Par exemple dans le cas de la rotation de la Terre autour du Soleil, l'étude de la trajectoire ne nécessite pas de prendre en compte la rotation de la Terre sur elle-même ni son rayon qui est très petit devant la distance Terre-Soleil ($R_T = 6400 \text{ km} \ll d_{ST} = 150 \times 10^6 \text{ km}$). En revanche si on souhaite étudier le mouvement de rotation de la Terre on ne pourra alors plus la considérer comme un point matériel.

Definition : vecteur position

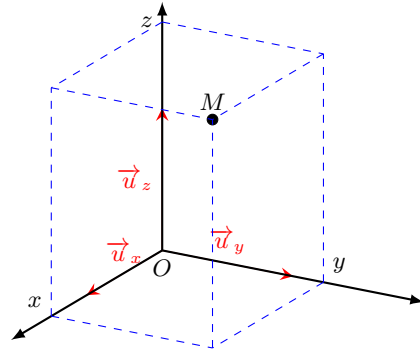
La position du point M , par rapport au point O fixe dans un référentiel \mathcal{R} , à un instant donné, est défini par la vecteur position :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

Definition : Coordonnées Cartésiennes

C'est le repère fixe par définition dans le référentiel d'étude. Il est défini à partir d'une origine O fixe et d'une BOND $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe également.
Le vecteur position s'exprime dans ce repère en fonction des coordonnées cartésienne (x, y, z) :

$$\vec{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$$



Propriété :

Pour un vecteur \vec{P} quelconque dans le repère cartésien, on peut calculer ses coordonnées (P_x, P_y, P_z) en faisant la projection du vecteur sur chaque axe du repère. Pour ça on utilise le produit scalaire :

$$P_x = \vec{P} \cdot \vec{u}_x; P_y = \vec{P} \cdot \vec{u}_y; P_z = \vec{P} \cdot \vec{u}_z$$

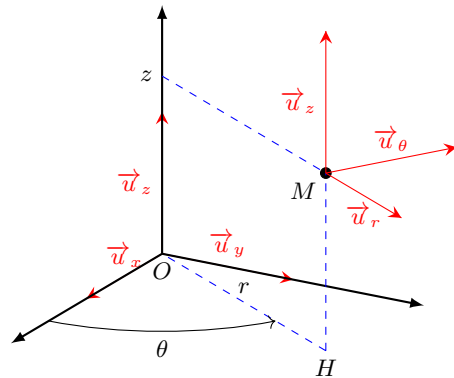
Definition : Coordonnées cylindriques

On définit une BOND mobile liée au point M tel que :

- On projette le point M dans le plan Oxy pour obtenir le point H ;
- On définit $r = \|\vec{OH}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{OH}}{\|\vec{OH}\|}$;
- On définit $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}_r)$ et $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$;

On peut alors exprimer le vecteur position en fonction des coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\vec{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r(t) + z(t)\vec{u}_z$$

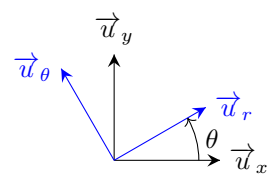


Propriété : Liens entre coordonnées cylindriques et cartésiennes

On peut projeter les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ dans la base cartésienne :

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_x)\vec{u}_x + (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_y)\vec{u}_y \\ \vec{u}_r &= \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y \\ x &= \vec{OM} \cdot \vec{u}_x = r \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_\theta &= (\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_x)\vec{u}_x + (\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_y)\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y \\ y &= \vec{OM} \cdot \vec{u}_y = r \sin(\theta) \end{aligned}$$



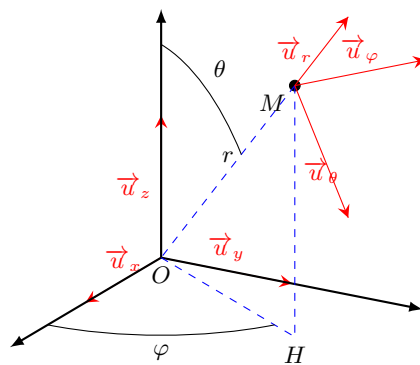
Definition : Coordonnées sphériques

On définit une BOND mobile tel que :

- $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ et $r = \|\vec{OM}\|$;
- l'angle $\theta = (\vec{u}_z, \vec{u}_r)$;
- \vec{u}_θ est orthogonal à \vec{u}_r et dans le plan OMH et orienté dans le sens de θ ;
- \vec{u}_φ correspond au \vec{u}_θ des coordonnées cylindriques ;

On peut alors exprimer le vecteur position en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\vec{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)$$



Definition : Déplacement élémentaire

On définit \vec{dl} (ou $d\vec{OM}$) tel que entre un instant t et un instant infiniment proche $t + dt$, le point M s'est déplacé de :

$$\vec{dl} = d\vec{OM} = \vec{OM}(t + dt) - \vec{OM}(t) \quad \text{avec } \vec{dl} \text{ tangent à la trajectoire}$$

Propriété : Expression de \vec{dl} à partir d'un schéma

Coordonnées cartésiennes :

On a les coordonnées du point M à l'instant t : (x, y, z)
 On a les coordonnées du point M à l'instant $t + dt$: $(x + dx, y + dy, z + dz)$
 où dx, dy et dz correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre t et $t + dt$

$$\vec{dl} \approx dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

Coordonnées cylindriques :

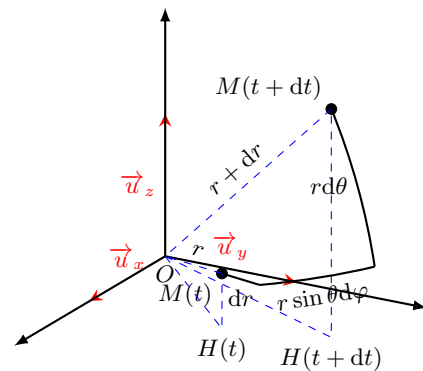
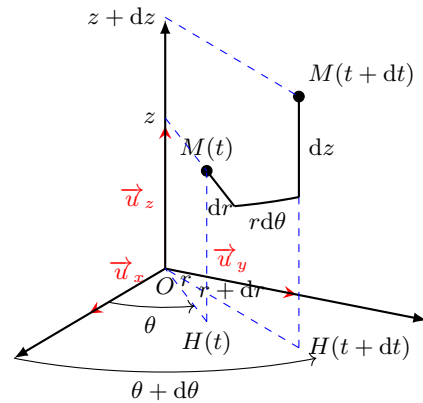
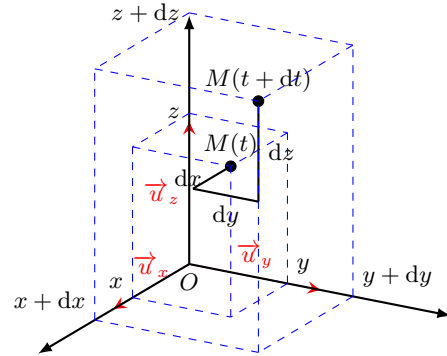
On a les coordonnées du point M à l'instant t : (r, θ, z)
 On a les coordonnées du point M à l'instant $t + dt$: $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$
 où $dr, d\theta$ et dz correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre t et $t + dt$

$$\vec{dl} \approx dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

Coordonnées sphériques :

On a les coordonnées du point M à l'instant t : (r, θ, φ)
 On a les coordonnées du point M à l'instant $t + dt$: $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$
 où $dr, d\theta$ et $d\varphi$ correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre t et $t + dt$

$$\vec{dl} \approx dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$



3 Vitesse d'un point

Definition : Vitesse expérimentale

Si on connaît la position du point M dans le référentiel \mathcal{R} à un instant t_1 et à un instant $t_2 = t_1 + \Delta t$ alors on peut approcher expérimentalement la vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} à l'instant t_1 tel que :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t_1) = \left. \frac{\vec{OM}(t_1 + \Delta t) - \vec{OM}(t_1)}{\Delta t} \right|_{\mathcal{R}}$$

Definition : Vitesse instantannée

Dans la limite où $\Delta t \rightarrow 0$ on définit la vitesse instantannée du point M dans le référentiel \mathcal{R} par :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

On note généralement $v = \|\vec{v}\|$.

Remarque :

La vitesse, tout comme la position et la trajectoire, dépend du référentiel. C'est pour cela que nous précisons toujours dans sa notation ainsi que celle de la dérivée, le référentiel.

Il ne faut pas confondre référentiel et système de coordonnées. On peut exprimer un vecteur dans une base mobile (cylindrique ou sphérique) et le dériver dans un référentiel associé à une base fixe (cartésienne).

Propriété : Expression en coordonnées cartésiennes

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} en coordonnées cartésiennes il existe deux méthodes :

- **Dérivation directe** : On calcule directement la dérivée de l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \left. \frac{d(x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z + x(t)\cancel{\left. \frac{d\vec{u}_x}{dt} \right|_{\mathcal{R}}} + y(t)\cancel{\left. \frac{d\vec{u}_y}{dt} \right|_{\mathcal{R}}} + z(t)\cancel{\left. \frac{d\vec{u}_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}}}\end{aligned}$$

On obtient alors : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$

- **À partir du déplacement élémentaire** : On divise simplement le déplacement élémentaire par dt .

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z}{dt} \\ &= \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z\end{aligned}$$

Remarque :

La norme de la vitesse en coordonnées cartésiennes vaut : $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Par soucis d'allègement des notations, les dérivées des grandeurs scalaires comme x, y, z, r, θ et φ seront notées \dot{x}, \dots

Propriété : Expression en coordonnées cylindriques

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} en coordonnées cylindriques il existe deux méthodes :

- **Dérivation directe** : On calcule directement la dérivée de l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \left. \frac{d(r(t)\vec{u}_r(t) + z(t)\vec{u}_z)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z + r(t)\cancel{\left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}}} + z(t)\cancel{\left. \frac{d\vec{u}_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}}}\end{aligned}$$

On doit alors calculer la dérivée du vecteur \vec{u}_r par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} .

$$\left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(\cos(\theta(t))\vec{u}_x + \sin(\theta(t))\vec{u}_y)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin(\theta(t))\vec{u}_x + \cos(\theta(t))\vec{u}_y) = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On obtient alors : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$

- **À partir du déplacement élémentaire** : On divise simplement le déplacement élémentaire par dt .

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) &= \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z}{dt} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z\end{aligned}$$

4 Accélération d'un point

Definition : accélération expérimentale

Si on connaît la vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} à un instant t_1 et à un instant $t_2 = t_1 + \Delta t$ alors on peut approcher expérimentalement l'accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} à l'instant t_1 tel que :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t_1) = \left. \frac{\vec{v}(t_1 + \Delta t) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t} \right|_{\mathcal{R}}$$

Definition : accélération instantanée

Dans la limite où $\Delta t \rightarrow 0$ on définit l'accélération instantanée du point M dans le référentiel \mathcal{R} par :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}$$

Remarque :

Un mouvement peut être accéléré même si la norme de la vitesse reste constante. Pour savoir si un mouvement est non accéléré il faut que le *vecteur accélération* soit nul, autrement dit $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \vec{0}$.

Propriété : Expression en coordonnées cartésiennes

On calcule directement la dérivée de l'expression de $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z)}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

On obtient alors : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$

Propriété : Expression en coordonnées cylindriques

On calcule directement la dérivée de l'expression de $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\begin{aligned}\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) &= \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z + \dot{r}\left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + r\dot{\theta}\left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + z(t)\cancel{\left. \frac{d\vec{u}_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}}} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z + r\dot{\theta}\left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

On doit alors calculer la dérivée du vecteur \vec{u}_r par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} .

$$\left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(-\sin(\theta(t))\vec{u}_x + \cos(\theta(t))\vec{u}_y)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d\theta}{dt}(-\cos(\theta(t))\vec{u}_x - \sin(\theta(t))\vec{u}_y) = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

On obtient alors : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

Definition : Repère de Frenet

On définit le vecteur tangent à la trajectoire \vec{u}_T par :

$$\vec{u}_T = \frac{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{\|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}\|}$$

On définit le vecteur normal \vec{u}_N comme le vecteur orthogonal à \vec{u}_T tourné d'un angle $+\frac{\pi}{2}$.

On admet alors que l'expression pour un trajectoire plane de l'accélération d'un point M dans le repère de Frenet s'exprime :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N + \frac{dv}{dt} \vec{u}_T$$

avec R le rayon de courbure de la trajectoire au point M , v la norme du vecteur vitesse et $\frac{dv}{dt}$ la dérivée temporelle de la norme du vecteur vitesse.

Propriété : Degrés de liberté du mouvement

Lors d'un mouvement à vecteur accélération constant, on a deux situations possibles :

- Le vecteur vitesse initiale \vec{v}_0 est colinéaire au vecteur accélération $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$, dans ce cas le mouvement est à une dimension.
- Le vecteur vitesse initiale \vec{v}_0 n'est pas colinéaire au vecteur accélération $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$, dans ce cas le mouvement est à deux dimension.

5 Exemples :**Exemple : Mouvement de vecteur accélération constant**

Système : On étudie le mouvement du point M .

Référentiel : On se place dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire (Terrestre).

On considère que $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \vec{C}^{te} = \vec{a}_0$. Quel est la base la plus adapté pour étudier le mouvement ?

Si le vecteur accélération est constant au cours du mouvement, alors on peut choisir un vecteur de la base constant et colinéaire à \vec{a}_0 dans \mathcal{R} . On définit donc le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que :

$$\vec{a}_0 = a_0 \vec{u}_z \text{ et } \vec{OM}(t=0) = \vec{0} \text{ et } \vec{v}(t=0) = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0z} \vec{u}_z = v_0(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z)$$

On obtient alors le système d'équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = a_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = a_0 t + v_{0z} \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + v_{0z} t \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha \end{cases}$$

On peut alors obtenir l'équation de la trajectoire parabolique en exprimant $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ on obtient :

$$z = \frac{a_0 x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + z \tan \alpha = \frac{a_0}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 + x \tan \alpha$$

Exemple : Mouvement circulaire

Système : On étudie le mouvement du point M .

Référentiel : On se place dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire (Terrestre).

On cherche à étudier le mouvement circulaire du point M . La base la plus adaptée pour exprimer les coordonnées du point M est la base cylindrique tel que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r + z(t)\vec{u}_z$$

Comme le mouvement est circulaire on a :

$$z(t) = C^{te} = z_0 \text{ et } r(t) = C^{te} = R$$

On choisit le base cylindrique tel que :

$$\theta(t=0) = 0 \text{ et } z_0 = 0$$

On obtient alors :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$$

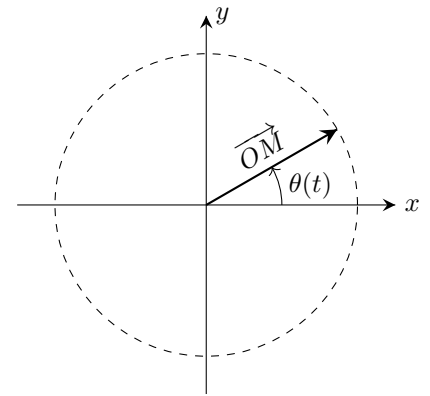
On a alors le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On a alors le vecteur accélération :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \vec{a}_N + \vec{a}_T$$



En utilisant $v = \|\vec{v}\| = R\dot{\theta}$, on peut exprimer l'accélération : $\vec{a}_N = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$ et $\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta$ On a alors deux types de mouvements circulaires :

- Le mouvement circulaire uniforme si $\frac{dv}{dt} = 0$. Alors $v = R\omega = C^{te}$ où ω est la vitesse de rotation en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Le mouvement circulaire non uniforme si $\frac{dv}{dt} \neq 0$. Alors l'accélération comporte deux composantes.

Mécanique 2 : Dynamique du point matériel

Remarque : Contexte

Dans ce chapitre nous allons voir les trois lois fondamentales sur lesquelles reposent toute la théorie classique de la mécanique Newtonienne ainsi que la liste des forces à connaître pour le programme.

Le but est d'abord d'illustrer la méthodes de résolution sur des exemples simples vu en terminal mais dont la rédaction et la rigueur devront être en cohérence avec la manipulation des vecteurs et des coordonnées cinématique vu au chapitre précédent.

On verra ensuite l'introduction des forces de frottements et l'impact sur le mouvement d'un point.

1 Principe d'inertie

Definition : Masse inertielle

C'est une grandeur caractéristique d'un point matériel qui est :

- positive ;
- conservative, elle est constante au cours du mouvement pour un système fermé ;
- extensive, additive ;
- invariante par changement de référentiel en mécanique classique.

Remarque :

Par commodité on appelle masse inertielle : masse

Definition : Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel \mathcal{R} est :

$$\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \text{ en } \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Definition : Système isolé ou pseudo-isolé

Si aucune action mécanique ne s'exerce sur un système on dit qu'il est isolé.

Si toutes les actions mécaniques qui s'exercent sur un système se compensent, alors il est pseudo-isolé.

Première loi de Newton

On postule l'existence de référentiels dit galiléens ou inertiels où un point matériel isolé ou pseudo-isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Propriété : Référentiel galiléen

Un référentiel est galiléen ssi il est en translation rectiligne et uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen.

Remarque : Les référentiels supposés galiléens classiques

Il n'existe pas de référentiel strictement galiléen. En revanche on peut supposer qu'un référentiel est supposé galiléen si le temps de l'expérience est petit devant le temps caractéristique du mouvement :

- Le référentiel terrestre \mathcal{R}_T ($\Delta t \ll T_{\text{jour}}$) ;
- Le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G ($\Delta t \ll T_{\text{année}}$) ;
- Le référentiel héliocentrique \mathcal{R}_S ($\Delta t \ll T_{\text{galaxie}}$) ;

2 Principe fondamental de la dynamique

Definition : Force

Une force est une action mécanique qui modifie le vecteur vitesse d'un point matériel.

Propriété : Modélisation d'une force

Une force se modélise mathématiquement à l'aide d'un vecteur, noté généralement \vec{F} et possède :

- Un point d'application qui est l'origine du vecteur ;
- Une direction et un sens qui sont décrits dans une BOND $\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z$;
- Une intensité $\|\vec{F}\|$ exprimée en N.

Une force s'applique forcément d'un point M_1 sur un point M_2 . On note alors :

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2}$$

Remarque :

Chaque force possède un point d'application car les objets réels ne sont pas des points matériels mais des solides. Dans le modèle du point matériel on suppose que toutes les forces s'appliquent sur le point matériel.

Seconde loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel M , de masse m est égale à la résultante $\vec{F}_{ext \rightarrow M}$ des forces extérieures s'appliquant au point matériel.

$$\left. \frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}_g}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{ext \rightarrow M}$$

Remarque :

Le PFD est une équation différentielle vectorielle, elle cache donc trois équations différentielles scalaires appelées équations du mouvements. Les solutions de ces équations du mouvements avec les conditions initiales données sont appelées équations horaires du mouvement.

Troisième loi de Newton : le principe des actions réciproques

Soient deux points matériels M_1 et M_2 . Si M_1 exerce une force $\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2}$ sur M_2 alors le point M_2 exerce une force $\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}$ tel que :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

Les deux forces ont alors :

- Même direction ;
- Même intensité ;
- Des sens opposés.

L'Interaction gravitationnelle

On considère deux points matériels M_1 et M_2 de masse respectives m_1 et m_2 et de position dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ \vec{OM}_1 et \vec{OM}_2 .

On caractérise alors la force gravitationnelle $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ de M_2 sur M_1 :

Expression : $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$

direction : colinéaire à $\vec{M}_2 M_1$;

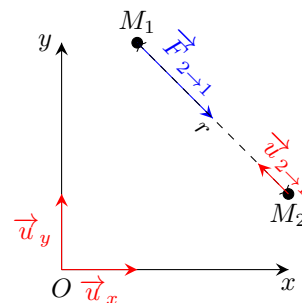
Sens : Toujours attractive.

Norme : $\|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}\| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$;

Point d'application : Le centre de gravité ;

Type : Force à distance.

avec $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ la constante de gravitation universelle, r la distance entre M_1 et M_2 et $\vec{u}_{2 \rightarrow 1}$ le vecteur unitaire qui part de M_2 en direction de M_1 .



Le poids

On considère une masse m soumise au champ de pesanteur terrestre \vec{g} . On caractérise alors le poids \vec{P} qu'exerce la

Terre sur la masse m :

Expression : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$

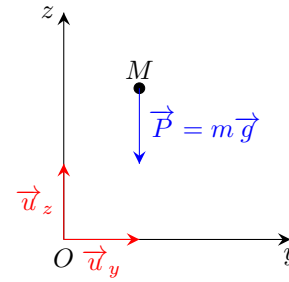
direction : verticale ;

Sens : dirigée vers le sol ;

Norme : $\|\vec{P}\| = mg$;

Point d'application : Le centre de gravité de la masse m ;

Type : Force à distance.



avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur de direction verticale et dirigée vers le bas.

La direction et la norme de \vec{g} dépendent en pratique de l'altitude et des coordonnées du point M à la surface de la Terre.

La tension d'un fil

On considère une masse m accrochée à un fil. Un fil inextensible possède une tension \vec{T} constante tout le long du fil.

On caractérise la tension \vec{T} qu'exerce le fil sur la masse m par :

Expression : $\vec{T} = -\|\vec{T}\|\vec{u}$

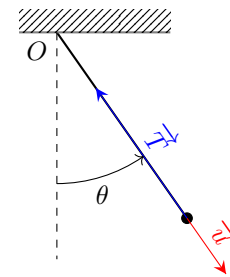
direction : colinéaire au fil ;

Sens : Du support vers le système ;

Norme : À calculer ;

Point d'application : L'attache du fil ;

Type : Force de contact.



Réaction normale du support

On considère une masse m en contact avec une surface. La surface exerce une force appelée réaction normale et notée \vec{R}_N sur la masse m . On caractérise alors \vec{R}_N :

Expression : $\vec{R}_N = \|\vec{R}_N\|\vec{n}$

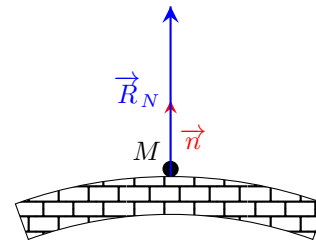
direction : orthogonale à la surface ;

Sens : De la surface vers la masse ;

Norme : À calculer ;

Pt d'application : Barycentre de la surface de contact ;

Type : Force de contact.



Les frottements fluides

On considère une masse m en mouvement par rapport à un fluide visqueux, le fluide exerce une action mécanique appelée frottement fluide \vec{f} qu'on peut modéliser suivant deux modèles :

Expression : $\vec{f} = \begin{cases} -\lambda\vec{v}(M)_{/fluide} \\ -\kappa v\vec{v}(M)_{/fluide} \end{cases}$

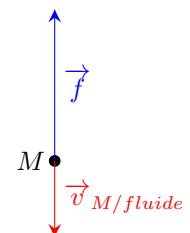
direction : tangente au mouvement, colinéaire au vecteur vitesse ;

Sens : opposé au vecteur vitesse, opposé au mouvement ;

Norme : $\|\vec{f}\| = \begin{cases} \lambda v \\ \kappa v^2 \end{cases}$;

Point d'application : barycentre de la surface de contact ;

Type : Force de contact.



Ces deux modèles découlent de l'analyse via la mécanique des fluides, le modèle linéaire s'applique pour des vitesses faibles par rapport au fluide, et le modèle quadratique pour des vitesses plus importantes.

La poussée d'Archimède

Soit un système immergé dans un fluide au repos. La résultante des forces de pression est appelée poussée d'Archimède

$\vec{\Pi}_A$ est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

On caractérise $\vec{\Pi}_A$ par :

Expression : $\vec{\Pi}_A = -\rho_{\text{fluide}} V \vec{g}$

direction : verticale ;

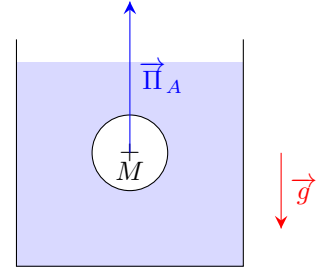
Sens : vers la surface (vers le haut) ;

Norme : $\|\vec{\Pi}_A\| = V \rho_{\text{fluide}} g$;

Point d'application : centre de gravité du fluide déplacé ;

Type : Force de contact.

Avec V le volume de fluide déplacé, et ρ_{fluide} la masse volumique du fluide déplacé.



Exemple :

Un glaçon de forme cylindrique (hauteur $h = 3$ cm, rayon $R = 1$ cm) flotte à la surface d'une eau à 0°C . Le cylindre est immergé d'une hauteur $x = 2,8$ cm. Quelle est la norme de la poussée d'Archimède ?

On calcule tout d'abord le volume du glaçon immergé $V_i = \pi R^2 x$. On en déduit alors la norme de la poussée d'Archimède :

$$\|\vec{\Pi}_A\| = \pi R^2 x \rho_{\text{eau}} g = 3,14 \times (1 \times 10^{-2})^2 \times 1,00 \times 10^3 \times 9,81 \approx 30,1 \text{ N}$$

Méthode : Résoudre un problème de dynamique du point

- Faire un schéma en utilisant des couleurs avec en évidence la ou les BOND utiles, les coordonnées du points M , d'autres paramètres importants.
- Définir le système étudié ! (Dans certains exercices plusieurs points matériels existent et il faut bien définir le système).
- Choisir un référentiel et préciser sa nature (galiléen, supposé galiléen, ou non galiléen).
- Faire le bilan des actions mécaniques extérieur s'appliquant au système, dans le bilan exprimer chaque action mécanique dans la BOND utilisée.
- Appliquer le PFD.
- Faire une projection du PFD dans la BOND choisie.
- Obtenir la ou les équations du mouvement.
- Résoudre la ou les équations du mouvement pour obtenir les équations horaires du mouvement.
- Obtenir l'équation de la trajectoire en éliminant le temps dans les équations horaire.

3 Le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

Definition : Champ de pesanteur uniforme

On appelle champ de pesanteur uniforme lorsque la résultante des forces extérieure qui s'applique à un point M de masse m s'écrit :

$$\vec{F} = m \vec{g} \quad \text{où} \quad \vec{g} = \vec{C}^{te}$$

Propriété : Mouvement à accélération constante

Dans un champ de pesanteur uniforme \vec{g} le mouvement d'un point M de masse m est à vecteur accélération constante tel que :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{g}$$

Exemple : Chute libre

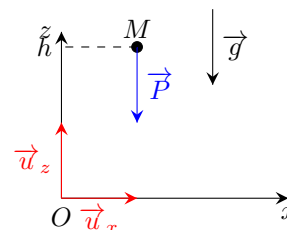
Soit un point M de masse m , lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h :

Système : $\{M(m)\}$

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces : $\bullet \vec{P} = m \vec{g}$

PFD : $m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = m \vec{g}$



Coordonnées : Cartésienne et mouvement à un degrés de liberté.

$$\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{u}_z \implies \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{z}\vec{u}_z \implies \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{z}\vec{u}_z$$

Équation du mouvement : $/\vec{u}_z : \quad \ddot{z} = -g$

Équation horaire : $\dot{z}(t) - \dot{z}(\theta) = -gt \implies z(t) - h = -\frac{1}{2}gt^2$

Temps de chute : $z(t_f) = 0 \implies t_f = \sqrt{2h/g}$

Vitesse d'impact : $|\dot{z}(t_f)| = \sqrt{2gh}$

Exemple : Mouvement parabolique

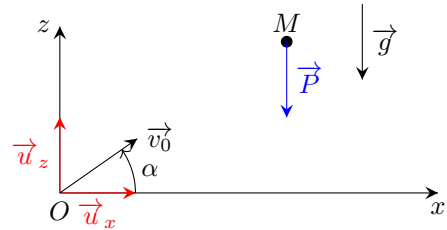
Soit un point M de masse m , lancé avec une vitesse \vec{v}_0 en 0 à $t = 0$:

Système : $\{M(m)\}$

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces : $\bullet \vec{P} = m\vec{g}$

PFD : $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{g}$



Coordonnées : Cartésienne et mouvement à deux degrés de liberté.

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u}_x + z(t)\vec{u}_z \implies \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{z}\vec{u}_z \implies \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{z}\vec{u}_z$$

Équations du mouvements : $/\vec{u}_z : \quad \ddot{z} = -g$

Équation horaire :

$$\dot{z}(t) - v_0 \sin(\alpha) = -gt \implies z(t) - z(\theta) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t$$

Équation de la trajectoire : soit $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$ d'où $t(x) = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$ pour $\alpha \neq \pi/2$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t$$

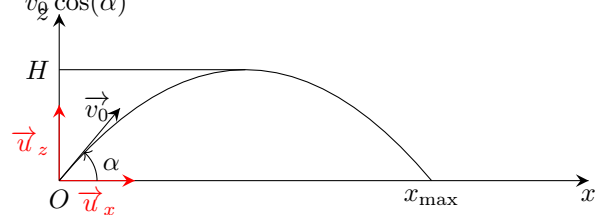
$$z(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x$$

$$z(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2} (1 + \tan^2(\alpha)) + \tan(\alpha)x$$

Équations du mouvements : $/\vec{u}_x : \quad \ddot{x} = 0$

Équation horaire :

$$\dot{x}(t) - v_0 \cos(\alpha) = 0 \implies x(t) - x(\theta) = v_0 \cos(\alpha)t$$



Portée : soit $x_{\max} \neq 0$ tel que $z(x_{\max}) = 0 \implies x_{\max} = \frac{2v_0}{g} \cos(\alpha) \sin(\alpha)$

Hauteur maximale : instant t_h tel que $\dot{z}(t_h) = 0 \implies t_h = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$

$$H = z(t_h) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

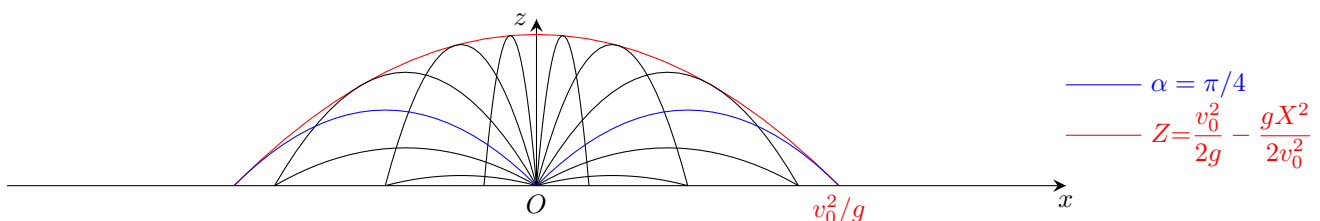
Exemple : Parabole de sureté

On cherche tous les points $M(X, Z)$ accessible via un tir de vitesse initiale v_0 fixé et en cherchant un angle initiale α :

$$Z = -\frac{1}{2}g \frac{X^2}{v_0^2} (1 + \tan^2(\alpha)) + \tan(\alpha)X \quad \frac{1}{2}g \frac{X^2}{v_0^2} \tan^2(\alpha) - X \tan(\alpha) + Z - \frac{1}{2}g \frac{X^2}{v_0^2}$$

Il existe une solution à cette équation si : $\Delta \geq 0$

$$\Delta = X^2 - 4 \times \left(Z - \frac{1}{2}g \frac{X^2}{v_0^2} \right) \frac{1}{2}g \frac{X^2}{v_0^2} = X^2 \left(1 - \frac{2gZ}{v_0^2} - g^2 \frac{X^2}{v_0^2} \right) \implies Z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gX^2}{2v_0^2}$$



4 Mouvement avec forces de frottements fluides

Definition : Vitesse limite

Lorsqu'on est en présence de frottement fluide, on suppose que le point M de masse m va suivre un mouvement transitoire jusqu'à atteindre une vitesse constante où les forces se compensent et le système devient pseudo-isolé. Alors :

$$\vec{v}(M)_{/E} = \vec{v}_{\text{lim}} = \vec{C}^{te}$$

Est une solution particulière de l'équation du mouvement.

Definition : Temps caractéristique

Si on lâche sans vitesse initiale une masse m dans un champ de pesanteur \vec{g} . Les frottements sont initialement négligeable devant les forces de frottement.

On peut alors supposer que la vitesse va évoluer pendant une durée τ comme : $v(t) = gt$

On définit alors la durée τ comme le temps pour atteindre la vitesse limite :

$$v(\tau) = g\tau = v_{\text{lim}}$$

Exemple : Force de frottement fluide linéaire

Soit un point M de masse m , lancé avec une vitesse \vec{v}_0 en 0 à $t = 0$:

Système : $\{M(m)\}$

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
- $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

PFD : $m\vec{a}(M)_{/E} = m\vec{g} - \lambda\vec{v}$

Équations vectorielle du mouvements : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{m}\vec{v} = \vec{g}$

Vitesse limite : on cherche une solution $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} = \vec{C}^{te} \implies \frac{d\vec{v}_{\text{lim}}}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m\vec{g}}{\lambda}$$

Temps caractéristique : soit $v(t) = gt$ et $v(\tau) = v_{\text{lim}}$

$$v_{\text{lim}} = g\tau \implies \tau = \frac{m}{\lambda}$$

Équation adimensionnée : on pose $\tilde{t} = t/\tau$ et $\vec{u} = \vec{v}/v_{\text{lim}}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}} \implies \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}} + \vec{u} = -\vec{u}_z$$

Temps long : (vitesse limite) $t \gg \tau$ alors le terme dérivé est négligeable et on obtient : $\vec{u} \simeq -\vec{u}_z$.

Temps courts : soit $t \ll \tau$ alors on peut faire un DL₁ de \vec{u}

$$\vec{u}(\tilde{t}) = \vec{u}(0) + \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}}(0)(\tilde{t} - 0)$$

En utilisant l'équation différentielle et $\vec{u}_0 = \vec{v}_0/v_{\text{lim}}$ on obtient :

$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0 - (\vec{u}_0 + \vec{u}_z)\tilde{t}$$

Soit $\|\vec{u}_0\| \ll 1$:

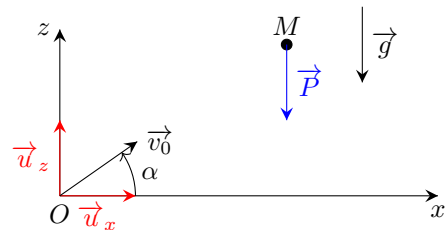
$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0 - \tilde{t}\vec{u}_z \iff \vec{v} = \vec{v}_0 - gt\vec{u}_z$$

Ce qui revient à considérer un mouvement sans frottement.

Soit $\|\vec{u}_0\| \gg 1$:

$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0(1 - \tilde{t}) \iff \vec{v} = \vec{v}_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

Ce qui donne un mouvement rectiligne uniformément décéléré.



Exemple : Force de frottement fluide quadratique

Soit un point M de masse m , lancé avec une vitesse \vec{v}_0 en 0 à $t = 0$:

Système : $\{M(m)\}$

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
- $\vec{f} = -\kappa v\vec{v}$

PFD : $m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = m\vec{g} - \kappa v\vec{v}$

Équations vectorielle du mouvements : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\kappa}{m}v\vec{v} = \vec{g}$

Vitesse limite : on cherche une solution $\vec{v} = v_{\text{lim}}\vec{e} \Rightarrow \frac{dv_{\text{lim}}}{dt} = 0$

$$v_{\text{lim}}\vec{e} = \frac{m\vec{g}}{\kappa v_{\text{lim}}} \Rightarrow v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$$

Temps caractéristique : soit $v(t) = gt$ et $v(\tau) = v_{\text{lim}}$

$$v_{\text{lim}} = g\tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{g\kappa}}$$

Équation adimensionnée : on pose $\tilde{t} = t/\tau$ et $\vec{u} = \vec{v}/v_{\text{lim}}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}} + u\vec{u} = -\vec{u}_z$$

Temps long (vitesse limite) : $t \gg \tau$ alors le terme dérivé est négligeable et on obtient : $\vec{u} \simeq -\vec{u}_z$.

Temps courts : soit $t \ll \tau$ alors on peut faire un DL₁ de \vec{u}

$$\vec{u}(\tilde{t}) = \vec{u}(0) + \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}}(0)(\tilde{t} - 0)$$

En utilisant l'équation différentielle et $\vec{u}_0 = \vec{v}_0/v_{\text{lim}}$ on obtient :

$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0 - (u_0\vec{u}_0 + \vec{u}_z)\tilde{t}$$

Soit $\|\vec{u}_0\| \ll 1$:

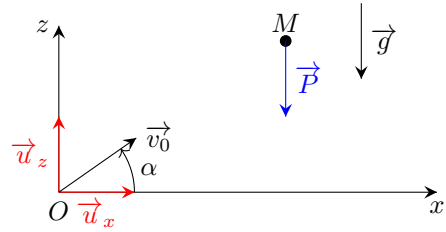
$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0 - \tilde{t}\vec{u}_z \iff \vec{v} = \vec{v}_0 - gt\vec{u}_z$$

Ce qui revient à considérer un mouvement sans frottement.

Soit $\|\vec{u}_0\| \gg 1$:

$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0(1 - u_0\tilde{t}) \iff \vec{v} = \vec{v}_0 \left(1 - \frac{v_0 t}{v_{\text{lim}}\tau}\right)$$

Ce qui donne un mouvement rectiligne uniformément décéléré.



5 Mouvement circulaire

Exemple : Pendule simple

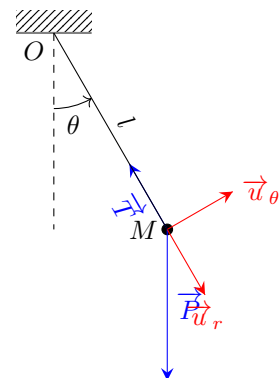
On considère un point matériel M de masse m attaché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l . On cherche à étudier le mouvement d'oscillation du pendule.

Système : Point matériel M de masse m .

Référentiel : Terrestre noté \mathcal{R}_T supposé galiléen et de repère $\mathcal{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Bilan des forces : dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

- $\vec{P} = m\vec{g} = m[(\vec{g} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r + (\vec{g} \cdot \vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta] = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$;
- $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ avec $T = \|\vec{T}\|$



Principe fondamental de la dynamique :

$$\left. \frac{d\vec{P}_{M/\mathcal{R}_T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} = \vec{P} + \vec{T} \iff m \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} = mg(\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta) - T \vec{u}_r$$

Comme la longueur l est constante alors on a :

$$\vec{OM} = l \vec{u}_r \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}_T} = l \dot{\theta} \vec{u}_\theta \implies \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} = -l \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + l \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

On projette alors le PFD sur \vec{u}_r et \vec{u}_θ :

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 &= -T + mg \cos\theta \\ ml\ddot{\theta} &= -mg \sin\theta \end{cases}$$

On obtient alors l'équation du moment : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta$

et l'expression de la norme de la tension du fil : $T = m[g \cos\theta + l\dot{\theta}^2]$

Dans le cas où $\theta \ll 1$ on a alors :

$$\sin\theta = \theta + o(\theta) \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta \approx \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta$$

On obtient alors l'équation du mouvement d'un OH de solution :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et θ_0 l'amplitude d'oscillation.

On parle d'Isochronisme car la pulsation de l'OH ne dépend pas de l'amplitude θ_0 .

Remarque :

Ce n'est pas le cas général. La période du pendule peut alors se calculer numériquement ou en faisant un développement limité d'ordre plus élevé.

Mécanique 3 : Les oscillateurs mécaniques

1 Le système masse-ressort

Definition : Équation différentielle d'un OH

Un OH à 1 degré de liberté est un système dont l'équation du mouvement est de la forme :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

où $X = x(t) - x_{eq}$ est l'écart à la position d'équilibre et ω_0 la pulsation propre.

La solution est donnée par :

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

La période de l'oscillateur est la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Loi de Hook

On considère une masse m accrochée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k . Lorsque le ressort est déformé et qu'il possède une longueur l il exerce une action mécanique sur la masse m appelée force de rappel \vec{F}_r . On caractérise alors \vec{F}_r :

Expression : $\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{u}$

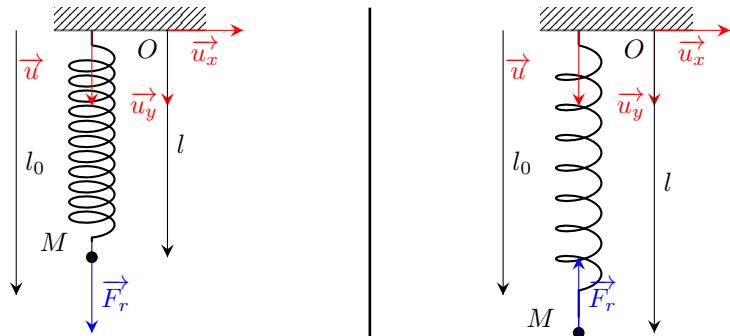
direction : colinéaire au ressort ;

Sens : opposé à l'élongation $(l - l_0)\vec{u}$;

Norme : $\|\vec{F}_r\| = k|l - l_0|$;

Point d'application : Point d'attache du ressort ;

Type : Force de contact.



Exemple : Le ressort horizontal non amorti

On considère un point M de masse m lié à un ressort de raideur k et longueur à vide l_0 qui est fixé à son extrémité en O . Le ressort et la masse sont posés sur un support horizontal et la masse glisse sans frottement.

Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

Système : $\{M (m)\}$

Bilan des actions mécaniques :

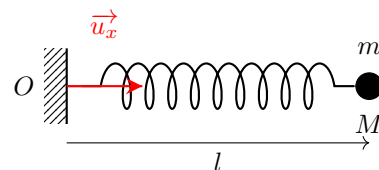
- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$;
- $\vec{R}_N = R_N\vec{u}_z$;
- $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x$;

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}$

/ \vec{u}_x : $m\ddot{x} = -k(x - l_0)$

Équation du mouvement : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0$

on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



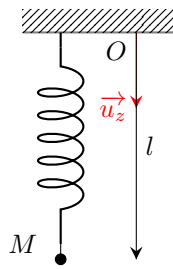
Exemple : Le ressort vertical non amorti

Soit un point M de masse m lié à un ressort vertical dont l'extrémité haute est fixée à un point O .

Système : $\{M (m)\}$

Bilan des actions mécaniques :

- $\vec{P} = mg\vec{u}_z$;
- $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$;



PFD : $m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{F} + \vec{P}$

$$/\vec{u}_z : \quad m\ddot{z} = -k(z - l_0) + mg$$

Position d'équilibre : On cherche $z = z_{\text{éq}} = C^{\text{te}}$ solution de l'équation précédente avec $\dot{z} = \ddot{z} = 0$:

$$0 = -k(z_{\text{éq}} - l_0) + mg \implies \boxed{z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

Équation du mouvement : $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m} \left(l_0 + \frac{mg}{k} \right)$

Allongement du ressort : Par commodité on pose $Z = z - z_{\text{éq}}$ tel que $\dot{z} = \dot{Z}$ et $\ddot{z} = \ddot{Z}$

$$\ddot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0 \quad \text{et on pose} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2 Les oscillateurs amorti

Definition : Rappel

On considère que le système masse-ressort amorti est soumis à une force de frottement fluide linéaire :

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v}$$

L'équation du mouvement vérifiée par l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre $X = x - X_{\text{éq}}$ peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

Pour résoudre cette équation on doit chercher les racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \implies \Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

- Si $\Delta > 0$ alors $Q < \frac{1}{2}$ et le régime est aperiodique : $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$

on pose alors $\Omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ et la solution s'écrit :

$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cosh(\Omega t) + B \sinh(\Omega t)]$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

- Si $\Delta = 0$ alors $Q = \frac{1}{2}$ et le régime est critique : $r_1 = r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q}$

La solution s'écrit : $X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A + Bt)$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

- Si $\Delta < 0$ alors $Q > \frac{1}{2}$ et le régime est pseudo-périodique : $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} -$

$$j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

on pose alors $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et la solution s'écrit :

$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

Exemple : Le ressort vertical amorti

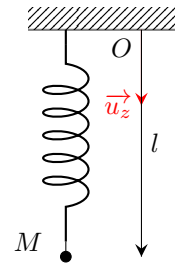
Soit un point M de masse m lié à un ressort vertical dont l'extrémité haute est fixée à un point O .

Le point M est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.

Système : $\{M (m)\}$

Bilan des actions mécaniques :

- $\vec{P} = mg\vec{u}_z$;
- $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{z} \vec{u}_z$
- $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_z$;



PFD : $m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{f}$

$$/\vec{u}_z : \quad m\ddot{z} = -k(z - l_0) + mg - \lambda \dot{z}$$

Position d'équilibre : On cherche $z = z_{\text{éq}} = C^{\text{te}}$ solution de l'équation précédente avec $\dot{z} = \ddot{z} = 0$:

$$0 = -k(z_{\text{éq}} - l_0) + mg - 0 \implies z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

Équation du mouvement : $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} \left(l_0 + \frac{mg}{k} \right)$

Allongement du ressort : Par commodité on pose $Z = z - z_{\text{éq}}$ tel que $\dot{z} = \dot{Z}$ et $\ddot{z} = \ddot{Z}$

$$\ddot{Z} + \frac{\lambda}{m} \dot{Z} + \frac{k}{m} Z = 0$$

et on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$

3 Les oscillations forcées

Definition : Régime forcé

Soit un système masse-ressort soumis à une force excitatrice : $\vec{F}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ On définit le régime des oscillations forcées pour un oscillateur linéaire à un degré de liberté, un système de masse m dont l'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

où $F(t)$ est une force excitatrice de la forme : $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

La solution particulière $x_p(t)$ peut donc se mettre sous la forme :

$$x_p(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec X_m l'amplitude d'oscillation et φ le déphasage par rapport à l'excitation.

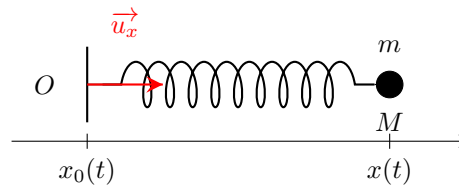
On pose alors l'abscisse complexe $\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ où \underline{X}_m est l'amplitude complexe tel que $x_p = \Re e(\underline{x})$, $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$.

On obtient après calcul :

$$\underline{X}_m = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

Exemple : Ressort horizontal accroché à un point oscillant

On considère un point M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et lié en un point O mobile de position $x_0(t) = A \cos(\omega t)$. Le point M est soumis aux forces de frottements fluides $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.



4 Capacité numérique

Definition : Méthode d'Euler appliquée aux équation d'ordre 2

On considère une équation différentielle d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F\left(\frac{dy}{dt}(t), y(t), t\right) \quad \text{avec } t \in [t_0, t_f] \text{ et } y(t_0) = y_0 \text{ et } \frac{dy}{dt}(t_0) = x_0$$

On peut appliquer la méthode d'Euler en considérant deux équations différentielle d'ordre 1 couplée :

$$\frac{dy}{dt}(t) = x(t) \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = F(x(t), y(t), t)$$

On peut alors construire les suites de N nombres suivantes :

- $t_k = t_0 + k \times \delta t$ avec $k \in [0; N - 1]$ et $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N - 1}$
- $y_{k+1} = y_k + x_k \times \delta t$ avec $y_0 = y_0$
- $x_{k+1} = x_k + F(x_k, y_k, t_k) \times \delta t$ avec $x_0 = x_0$

Les N couples (t_k, y_k) les coordonnées des N points approchés de la courbe $y(t)$.

Les N couples (t_k, x_k) représentent les coordonnées des N points approchés de la courbe $\frac{dy}{dt}(t)$.

Propriété : Capacité numérique 3

À l'aide de python, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non linéaire et faire apparaître l'effet des termes non linéaires.

Propriété : Création fonction Euler2

On cherche à définir une nouvelle fonction python qui prendra en paramètre y_0, x_0, t_0, t_f, F les paramètres mathématiques et N le paramètre numérique.

```
import numpy as np
def Euler(y0,x0,t0,tf,F,N):
    y,x=np.zeros(N),np.zeros(N)
    dt=(tf-t0)/(N-1)
    t=np.array([t0+k*dt for k in range(N)])
    y[0]=y0
    x[0]=x0
    for k in range(1,N):
        y[k]=y[k-1]+x[k]*dt
        x[k]=x[k-1]+F(y[k-1],x[k-1],t[k-1])*dt
    return t,y,x

def F(y,x,t):
    return ..... #à compléter en fonction du problème à résoudre
```

Mécanique 4 : Énergie, travail, puissance

1 Les grandeurs énergétiques

Definition : Puissance d'une force

La puissance d'une force \vec{F} appliquée à un point M animé d'une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} est la grandeur instantanée :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \text{ exprimée en watt (W)}$$

Propriété : Force motrice/résistante

On dit qu'une force \vec{F} est :

- Motrice si $\mathcal{P} > 0$;
- Résistante si $\mathcal{P} < 0$.

Definition : Travail d'une force

Le travail élémentaire, entre t et $t + dt$, d'une force \vec{F} appliquée à un point matériel M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} est défini par :

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P} dt = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} dt = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

avec $d\vec{l}$ le déplacement élémentaire du point M dans le référentiel \mathcal{R} .

Pour obtenir le travail d'une force \vec{F} appliquée à un point matériel M qui se déplace, dans le référentiel \mathcal{R} , de la position M_1 à l'instant t_1 à la position M_2 à l'instant t_2 , est défini en faisant la somme des travaux élémentaires :

$$W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

La travail d'une force s'exprime en joule (J).

Propriété : Cas d'un point matériel soumis à plusieurs forces

Soit un point matériel soumis à plusieurs forces extérieures \vec{F}_i dont la somme vaut $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$, on montre que :

$$W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2}$$

On obtient alors la relation :

$$W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \sum_{i=1}^N W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2}$$

Propriété : Cas particulier d'une force vectoriellement constante

Soit un point matériel M soumis à une force extérieure \vec{F} de vecteur constant au cours du mouvement du point A au point B (norme constante, direction constante, sens constant). On calcule alors le travail de la force \vec{F} au cours du mouvement :

$$W(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{l} = \vec{F} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA})$$

On obtient alors la relation :

$$W(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Valable uniquement dans le cas d'une force constante vectoriellement, le reste du temps il faut calculer l'intégrale du travail élémentaire.

Definition : Énergie cinétique d'un point matériel

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m , animé d'une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} , est définie par :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}^2$$

L'énergie cinétique s'exprime en joule (J).

Remarque :

Dépend de \mathcal{R}

Remarque :

Le travail exprime l'énergie reçue par le point matériel au cours du mouvement de M_1 vers M_2 . C'est un transfert d'énergie. Il ne faut pas confondre l'énergie d'un système comme son énergie cinétique qui est une variable d'état du système et ne dépend donc que de l'état du système.

Tandis qu'une énergie est calculée à un instant donnée, un transfert d'énergie s'effectue au cours d'un mouvement. Le travail n'est donc pas une variable d'état du système.

2 Le théorème de l'énergie cinétique

Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces qui lui sont appliquées :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

Démonstration :

On considère un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g et soumis à N forces \vec{F}_i . On applique le principe fondamental de la dynamique au point M :

$$m \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$m \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}$$

$$\frac{1}{2} m \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}^2}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{F}_i) \implies \left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

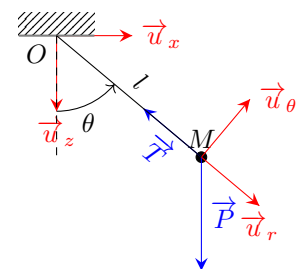
Exemple :

On étudie un pendule pensant, on assimile un solide de masse m à un point matériel accroché à un fil idéal de masse négligeable et de longueur l supposée inextensible.

Système : Point matériel M de masse m .

Référentiel : Terrestre noté \mathcal{R}_T supposé galiléen et de repère $\mathcal{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Bilan des forces : dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$



- $\vec{P} = m\vec{g} = m[(\vec{g} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r + (\vec{g} \cdot \vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta] = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$;
- $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ avec $T = \|\vec{T}\|$

Théorème de la puissance cinétique : (TPC)

On exprime la vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \implies \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

On applique le TPC :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} &= \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{T}) = mgl\dot{\theta}\vec{u}_z \cdot \vec{u}_\theta + \|\vec{T}\|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta \\ &= -mgl\dot{\theta}\sin(\theta) + 0 \\ ml\ddot{\theta} &= -mgl\dot{\theta}\sin(\theta) \implies \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0} \end{aligned}$$

On retrouve l'équation du mouvement du pendule pesant.

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel M qui se déplace de la position M_1 à l'instant t_1 à la position M_2 à l'instant t_2 est égale à la somme des travaux des forces qui lui sont appliquées :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_2) - \mathcal{E}_c(t_1) = \sum_{i=1}^N W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2}$$

Démonstration :

On considère un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g et soumis à N forces \vec{F}_i . On applique le théorème de la puissance cinétique au point M :

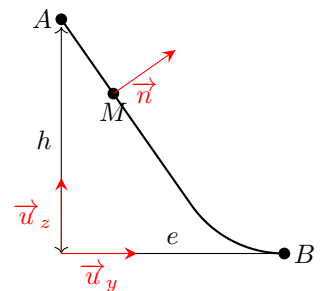
$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} &= \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{F}_i) & \mathcal{E}_c(t_2) - \mathcal{E}_c(t_1) &= \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F}_i) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{F}_i) dt & \Delta\mathcal{E}_c &= \sum_{i=1}^N W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2} \end{aligned}$$

Exemple :

Soit un pratiquant du saut à ski, il part ans élan du sommet A d'un tremplin. La vitesse du skieur en B doit être inférieure à $v_{max} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On réalise une étude pour un skieur qui s'élance sans vitesse initiale en négligeant les frottements pour évaluer la hauteur h_{max} du tremplin et sa longueur e_{max} .

Système : Skieur assimilé à un point matériel M de masse m .

Référentiel : Terrestre noté \mathcal{R}_T supposé galiléen et de repère $\mathcal{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.



Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$
- $\vec{R}_N = \|\vec{R}_N\|\vec{n} = R_N\vec{n}$

Théorème de l'énergie cinétique : (TEC) On calcule la variation d'énergie cinétique entre l'instant $t_A = 0 \text{ s}$ et l'instant t_B :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_B) - \mathcal{E}_c(t_A) = \mathcal{E}_c(t_B) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T}\|^2(t_B) < \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

On calcule les travaux des forces sur le trajet $A \rightarrow B$:

$$\begin{aligned} W(\vec{P})_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int_{z_A}^{z_B} -mgdz = mgh \\ W(\vec{R}_N)_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{R}_N \cdot d\vec{l} = \int_A^B \|\vec{R}_N\|\vec{n} \cdot d\vec{l} = 0 \end{aligned}$$

On applique alors le TEC :

$$\frac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T}\|^2(t_B) = mgh < \frac{1}{2}mv_{max}^2 \implies h_{max} = \frac{v_{max}^2}{2g}$$

La hauteur maximale est indépendante de la longueur e du tremplin dans ce modèle. Un modèle plus évolué avec prise en compte du travail des forces de frottements feraient intervenir la longueur e du tremplin.

Definition : Force conservative

Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi.

Propriété : Force conservative

Il existe alors une fonction $\mathcal{E}_p(\vec{OM})$ de la position du point M telle que le travail élémentaire d'une force conservative puisse d'écrire :

$$\delta W(\vec{F}_c) = -d\mathcal{E}_p$$

De cette manière le travail ne dépend que des valeurs initiales et finales de la fonction $\mathcal{E}_p(\vec{OM})$

Definition : Énergie potentielle

On définit la fonction énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\vec{OM})$ liée à une force conservative \vec{F}_c qui dépend de la position du point M telle que définie à une constante près on a :

$$\vec{F}_c \cdot d\vec{l} = -d\mathcal{E}_p$$

L'énergie potentielle \mathcal{E}_p d'un système se définit comme la somme des énergies potentielles des forces conservatives appliquées.

Propriété : Gradient

Lorsqu'une force est conservative et qu'on peut définir son énergie potentielle, on définit alors l'opérateur vectoriel gradient :

$$\vec{F}_c = -\vec{\text{grad}}\mathcal{E}_p \quad \text{avec} \quad \vec{\text{grad}}\mathcal{E}_p \cdot d\vec{l} = d\mathcal{E}_p$$

L'opérateur gradient d'une fonction de plusieurs variable d'espaces dépend du système de coordonnées utilisé. En coordonnées cartésiennes il s'écrit :

$$\vec{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ correspond à la dérivée partielle de f par rapport à x en considérant y et z comme des constantes, $\frac{\partial f}{\partial y}$ correspond à la dérivée partielle de f par rapport à y en considérant x et z comme des constantes, etc.

Propriété : Travail d'une force conservative

Si un point M possède une énergie potentielle \mathcal{E}_p , alors il est soumis à une force extérieure \vec{F}_c conservative et son travail entre la position M_1 et la position M_2 s'exprime :

$$W(\vec{F}_c)_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{l} = - \int_{M_1}^{M_2} dE_p = -(E_p(M_2) - E_p(M_1)) = -\Delta\mathcal{E}_p$$

Definition : Énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , l'énergie mécanique \mathcal{E}_m d'un système est la somme de son énergie cinétique \mathcal{E}_c et de son énergie potentielle \mathcal{E}_p :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

Démonstration :

On considère un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g et soumis à N forces \vec{F}_i dont N_c forces conservatives \vec{F}_i^c et N_{nc} forces non conservatives \vec{F}_i^{nc} . On applique le théorème de l'énergie cinétique au

point M entre le point M_1 à l'instant t_1 et le point M_2 à l'instant t_2 :

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{E}_c &= \sum_{i=1}^N W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2} \\ \Delta \mathcal{E}_c &= \sum_{i=1}^{N_c} W(\vec{F}_i^c)_{M_1 \rightarrow M_2} + \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\vec{F}_i^{nc})_{M_1 \rightarrow M_2} \\ \Delta \mathcal{E}_c &= -\Delta \mathcal{E}_p + \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\vec{F}_i^{nc})_{M_1 \rightarrow M_2} \\ \Delta \mathcal{E}_m &= \Delta \mathcal{E}_c + \Delta \mathcal{E}_p = \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\vec{F}_i^{nc})_{M_1 \rightarrow M_2}\end{aligned}$$

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, la variation $\Delta \mathcal{E}_m$ de l'énergie mécanique, entre deux position M_1 et M_2 , d'un point matériel soumis à des forces conservatives de résultante \vec{F}_c vaut :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(M_2) - \mathcal{E}_m(M_1) = W(\vec{F}_{nc})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

Si toutes les forces qui travaillent sont conservatives alors l'énergie mécanique est une constante du mouvement et le système est qualifié de conservatif.

Propriété : Énergie potentielle de pesanteur

Soit un référentiel terrestre de repère $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ avec \vec{u}_z orienté vers le haut. La force \vec{P} d'un point M de masse m s'exprime :

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z \implies \delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{dl} = -mgdz = -d\mathcal{E}_{p,p}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ à partir de l'intégrale :

$$\mathcal{E}_{p,p}(z) = \int_{z_0}^z mgdz = mg(z - z_0)$$

Propriété : Énergie potentielle gravitationnelle

Soit un référentiel galiléen de repère $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ avec un point matériel O de masse m_0 qui exerce une force gravitationnelle sur M de masse m :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = -G \frac{mm_0}{r^2} \vec{u}_r \implies \delta W(\vec{F}_{O \rightarrow M}) = \vec{F}_{O \rightarrow M} \cdot \vec{dl} = -G \frac{mm_0}{r^2} dr = -d\mathcal{E}_{p,G}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle $\mathcal{E}_{p,G}$ à partir de l'intégrale :

$$\mathcal{E}_{p,G}(r) = \int_{r_0}^r G \frac{mm_0}{r^2} dr = -Gmm_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Propriété : Énergie potentielle élastique

Soit un référentiel galiléen de repère $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. La force \vec{F}_r de rappel qu'exerce un ressort de longueur $\vec{l} = l\vec{u}_x$ et de longueur à vide $\vec{l} = l_0\vec{u}_x$ sur un point M s'exprime :

$$\vec{F}_r = -k(\vec{l} - \vec{l}_0) \implies \delta W(\vec{F}_r) = \vec{F}_r \cdot \vec{dl} = -k(l - l_0)dl = -d\mathcal{E}_{p,el}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,el}$ à partir de l'intégrale :

$$\mathcal{E}_{p,el}(l) = \int_{l_1}^l k(l - l_0)dl = \frac{1}{2}(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}(l_1 - l_0)^2$$

3 Étude qualitative de mouvements à une dimension

Dans cette partie on considère le mouvement conservatif à une dimension d'un point matériel M de masse m dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Le mouvement est selon l'axe Ox de vecteur unitaire \vec{u}_x et de vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$ et de résultante des forces $F(x) = \vec{F} \cdot \vec{u}_x$.

Definition : Position d'équilibre

Une position d'équilibre d'un système mécanique est une position telle que si on abandonne sans vitesse le système dans cette position, il y reste.

Propriété : Position d'équilibre

Soit un point matériel M de masse m en mouvement conservatif dans le référentiel \mathcal{R}_g . Le point M possède une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$. À l'équilibre le point M peut alors être aux positions x_{eq} tel que la somme des forces appliquées au point soit nulle :

$$F(x = x_{eq}) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x = x_{eq}) = 0$$

Definition : Stabilité

La stabilité d'une position d'équilibre se définit en abandonnant le système sans vitesse au voisinage de cette position :

- si le système se rapproche de sa position d'équilibre, c'est que celle-ci est stable ;
- si le système s'éloigne de sa position d'équilibre, c'est que celle-ci est instable.

Propriété : Stabilité

Soit un point matériel M de masse m en mouvement conservatif dans le référentiel \mathcal{R}_g . Le point M possède une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$. On étudie la position d'équilibre x_{eq} en posant $x = x_{eq} + \delta x$:

$$F(x_{eq} + \delta x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x + \delta x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x = x_{eq}) - \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x = x_{eq})\delta x + o(\delta x)$$

On a alors :

- Un équilibre stable si pour $\delta x > 0$ on a $F(x) < 0$ pour que la force ramène le point vers la gauche donc :

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x = x_{eq}) > 0$$

La position d'équilibre correspond à un minimum local de $\mathcal{E}_p(x)$.

- Un équilibre instable si pour $\delta x > 0$ on a $F(x) > 0$ pour que la force ramène le point vers la gauche donc :

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x = x_{eq}) < 0$$

La position d'équilibre correspond à un maximum local de $\mathcal{E}_p(x)$.

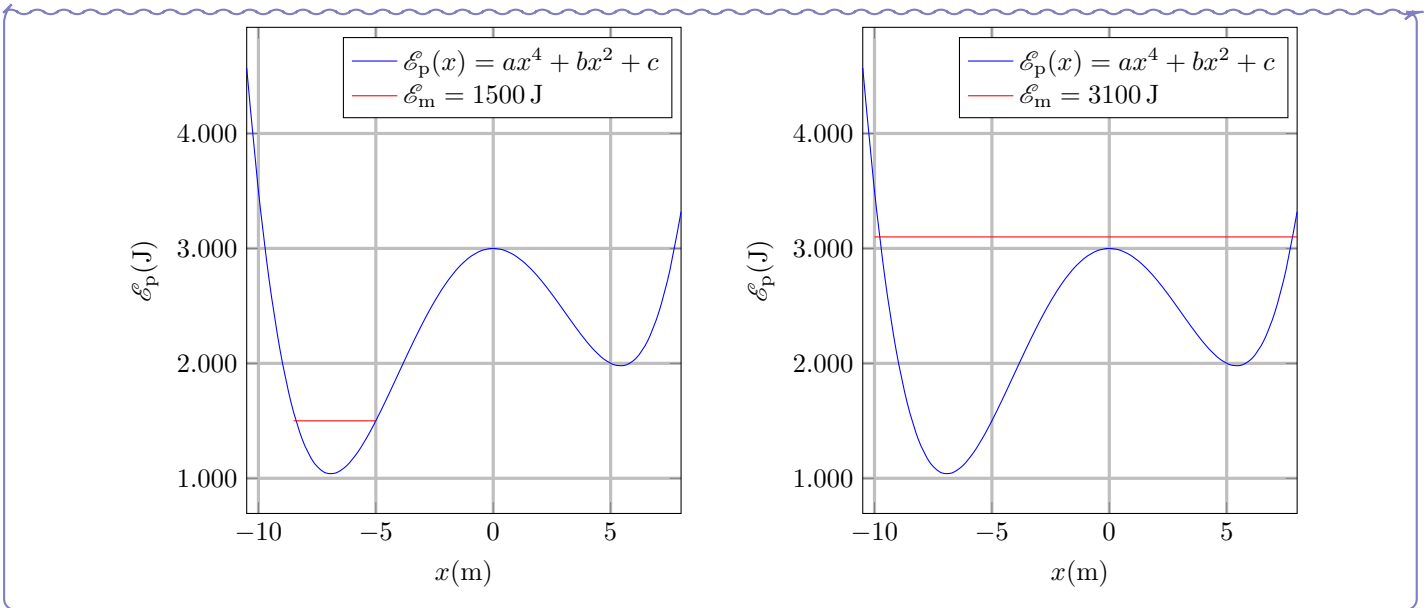
On obtiendrait le même résultat avec $\delta x < 0$.

Propriété : Barrière de potentielle

Soit un point matériel M soumis à une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$. Si le mouvement est conservatif le point M possède une énergie mécanique \mathcal{E}_m tel que :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x) \geq \mathcal{E}_p(x)$$

Sans énergie cinétique, un point matériel ne peut pas accéder aux régions de l'espace où $\mathcal{E}_p(x) > \mathcal{E}_m$.



4 Application : Oscillation proche de l'équilibre

On considère le mouvement conservatif à une dimension d'un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . On considère que le point matériel est proche d'une position d'équilibre stable notée x_{eq} . Le système possède alors une énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Il possède également une énergie potentielle dont on fait le développement limité autour de x_{eq} à l'ordre 2 :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x = x_{eq})(x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x = x_{eq})(x - x_{eq})^2 + o((x - x_{eq})^2)$$

Or par définition de la position d'équilibre stable on a :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x = x_{eq}) = 0 \text{ et } \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x = x_{eq}) = k > 0$$

On peut alors appliquer le théorème de l'énergie mécanique entre $t = 0$ et t :

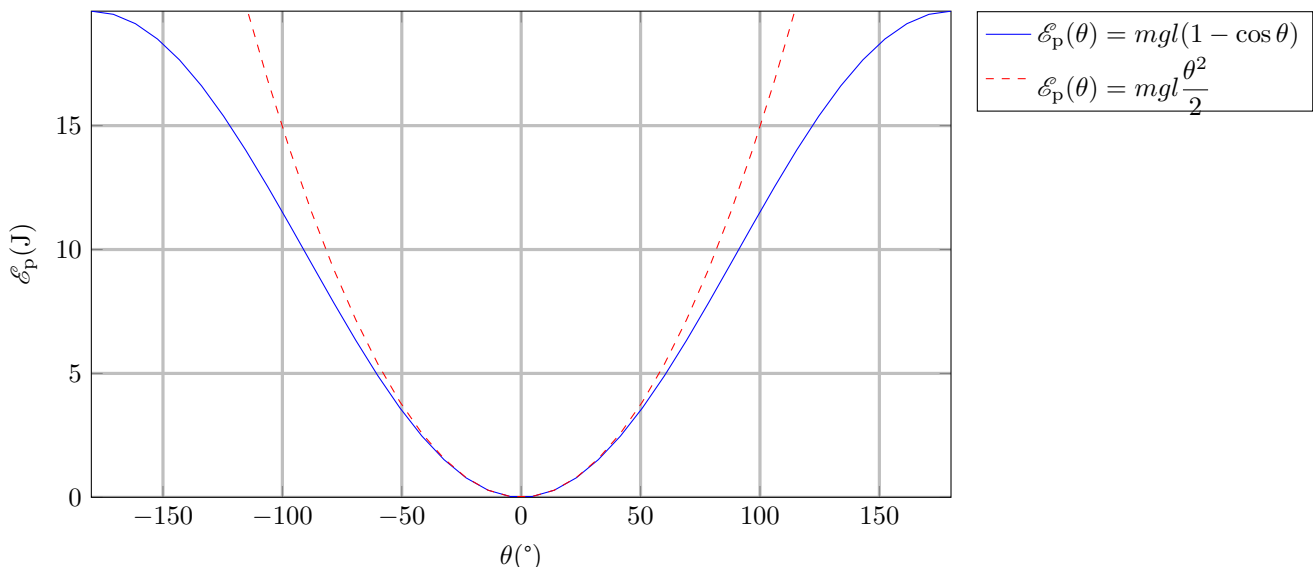
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 = \mathcal{E}_m(t = 0)$$

Si on dérive cette équation on obtient l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx = kx_{eq}$$

qui est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique correspondant à un système masse-ressort.

Au voisinage de l'équilibre on peut donc modéliser tout système conservatif par un oscillateur harmonique.



Mécanique 5 : Mouvement de particules chargées

1 Force de Lorentz et notions de champs

Definition : Champ électrostatique

On considère la force coulombienne d'une particule 2 de charge q_2 sur une particule 1 de charge q_1 :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} = q_1 \vec{E}_2(r)$$

On appelle alors $\vec{E}_2(r) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ le champ électrique créé par la particule 2.

Propriété : Champ stationnaire

Un champ stationnaire est un champ dont les caractéristiques sont indépendantes du temps :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(M)$$

Propriété : Champ uniforme

Un champ uniforme est un champ dont les caractéristiques sont les mêmes en tout point de l'espace :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(t)$$

Definition : Champ électrostatique

Un champ électrostatique est un champ stationnaire.

Definition : Champ magnétostatique

Un champ magnétostatique est un champ stationnaire.

Definition : Force de Lorentz

Une particule de charge q , animé d'une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un référentiel, placée dans un champ électrostatique uniforme \vec{E} et magnétostatique uniforme \vec{B} subit une force, appelée force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}$$

Remarque : Ordre de grandeur

Si on étudie un proton de masse $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg et de charge $q = 1,60 \times 10^{-19}$ C plongé dans un champ électrostatique uniforme de module $E = 1,0 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ à la surface de la Terre :

- $F_g \approx mg = 1,6 \times 10^{-26}$ N
- $F_e \approx qE = 1,6 \times 10^{-16}$ N

On a alors toujours $F_e \gg F_g$.

Ordre de grandeur de champ électrique ou magnétique :

- Antenne mobile $E \sim 10^1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ à $10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$;
- Condensateur $E \sim 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ à $10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$;
- Champ de claquage de l'air $E \sim 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$;
- Champ magnétique terrestre $B \sim 5 \times 10^{-5} \text{ T}$;
- Aimants puissants de moteurs $B \sim 0,3 \text{ T}$;
- IRM $B \sim 6 \text{ T}$;

Si on compare en ordre de grandeur la force électrique et la force magnétique on a :

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{E}{vB}$$

Pour un champ électrostatique $E \sim 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et un champ magnétostatique $B \sim 0,3 \text{ T}$ la vitesse pour que les deux

forces soient équivalentes doit être de :

$$v \sim 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On voit donc que la force magnétique est bien plus efficace pour modifier la trajectoire d'une particule chargée.

2 Aspect énergétique

Propriété : Puissance fournie par un champ électrique

Soit une particule de charge q soumise à un champ électrostatique \vec{E} , la puissance de la force de Lorentz s'exprime :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = q \vec{E} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Si on applique le théorème de la puissance cinétique on voit alors que :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}(\vec{F}) = q \vec{E} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Le champ électrique peut alors augmenter ou diminuer l'énergie cinétique de la particule en fonction de son orientation et du signe de q .

Propriété : Puissance fournie par un champ magnétique

Soit une particule de charge q soumise à un champ magnétostatique \vec{B} , la puissance de la force de Lorentz s'exprime :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = q \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

Si on applique le théorème de la puissance cinétique on voit alors que : $\left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = 0$ L'énergie cinétique de la particule est donc constante, la force de Lorentz magnétique peut donc modifier la trajectoire de la particule sans changer son énergie cinétique.

Propriété : Énergie potentielle électrique

On peut montrer que la force de Lorentz électrique est une force conservative telle que :

$$\vec{F} = q \vec{E} = -\text{grad} \mathcal{E}_{p,\text{elec}}$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{elec}}$ est l'énergie potentielle électrique associée dont l'expression dépend uniquement de la charge de la particule et de la forme du champ électrique \vec{E} (voir cours de physique de deuxième année).

Définition : Potentiel électrique

On définit le potentiel électrique noté V par la relation :

$$\mathcal{E}_{p,\text{elec}} = qV \implies dV = -\frac{q}{q} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Propriété : Potentiel électrique d'un champ uniforme

Soit un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$, le potentiel électrique est donné par la relation :

$$V(x) - V(x_0) = -E_0(x - x_0)$$

3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

Propriété : Équation du mouvement

Pour une particule assimilée à un point M de masse m et de charge q soumise à un champ électrostatique \vec{E} uniforme

dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . L'équation du mouvement est :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

On se ramène donc à un vecteur accélération constant, et une résolution identique au champ de pesanteur constant.

Démonstration :

On considère une particule chargée de charge q dans un référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ placée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_y$ et dans un champ magnétostatique uniformément nul $\vec{B}_0 = \vec{0}$.

À l'instant $t = 0$ la particule possède une vitesse $\vec{v}_0 = v_0(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y)$.

Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M .

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :

- $\vec{F} = q\vec{E} = qE_0 \vec{u}_y$;
- $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$ avec $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\|$;

Principe fondamental de la dynamique : On commence par exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z \implies \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

On applique alors le PFD :

$$\left. \frac{d\vec{P}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = q\vec{E} \iff m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = q\vec{E}$$

On obtient alors une accélération constante vectoriellement comme dans le cas de la chute libre :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

On peut alors retrouver l'équation de la trajectoire parabolique vu au chapitre Mécanique 2.

Exemple : Vitesse initiale parallèle au champ

Soit un champ électrostatique $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ et à $t = 0$: $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ et la particule en O .

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{u}_x = \frac{q}{m} E_0 \vec{u}_x \implies \dot{x}(t) = \frac{qE_0 t}{m} + v_0 \implies x(t) = \frac{qE_0 t^2}{2m} + v_0 t$$

Exemple : Vitesse initiale orthogonale au champ

Soit un champ électrostatique $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ et à $t = 0$: $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y$ et la particule en O .

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y = \frac{q}{m} E_0 \vec{u}_x \implies \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{qE_0 t}{m} \\ \dot{y}(t) = v_0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = \frac{qE_0 t^2}{2m} \\ y(t) = v_0 t \end{cases}$$

Propriété : Différence de potentielle entre deux électrodes

En appliquant une différence de potentiel U entre deux électrodes planes, parallèles et distantes de d , on obtient un champ électrique perpendiculaire aux grilles, dirigé vers les potentiels décroissants et de norme :

$$E = \frac{U}{d}$$

Propriété : Accélération d'une particule entre deux électrodes

Soit une particule initialement au repos dans un référentiel galiléen \mathcal{R} et assimilée à un point M , de masse m et de

charge q soumise à un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ tel qu'on impose une différence de potentiel U entre deux électrodes distantes de d . La vitesse de la particule après avoir parcouru la distance d est :

$$v_f = \sqrt{\frac{2|qU|}{m}}$$

Démonstration :

On considère deux plaques métalliques séparées d'une distance d soumise à une différence de tension U .

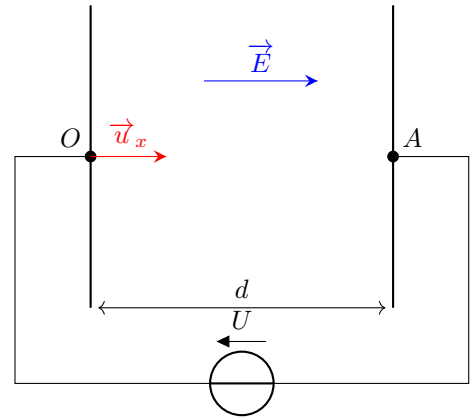
On suppose que le champ électrostatique entre les deux plaques est uniforme :

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \text{ donc } V(x) = V(x=0) - \frac{Ux}{d} \text{ donc } E_0 = \frac{U}{d}$$

et donc que le potentiel électrique est de la forme :

$$V(x) = v(x=0) + \frac{Ux}{d}$$

On étudie une particule chargée de masse m et de charge q sans vitesse initiale à la position $x = 0$.



Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M .

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :

- $\vec{F} = q\vec{v}_M \wedge \vec{B}$;
- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ avec $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\|$;

Théorème de l'énergie cinétique : On applique le TEC entre le point O et le point A :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_A) - \mathcal{E}_c(t_0) = \mathcal{E}_c(t_A) = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Le travail de la force de Lorentz électrique s'obtient en faisant la différence de potentiel :

$$W(\vec{F})_{O \rightarrow A} = -\int_O^A dE_p = -q \int_O^A dV = qV(x=0) - qV(x=d) = qU$$

D'après le TEC on obtient :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = qU \implies v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

Remarque : Limite relativiste

On considère qu'on peut appliquer les résultats issus de la mécanique Newtonienne tant que la vitesse des particules est inférieure à $0,1c$ avec $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme

Propriété : Trajectoire circulaire

Soit une particule assimilée à un point M de masse m et de charge q dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ perpendiculaire à la trajectoire. À $t = 0$ la particule est placée au point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$.

On montre que la trajectoire est circulaire de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{|qB_0|}$$

Démonstration : Rayon de la trajectoire

Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M .

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :

- $\vec{F} = qv_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}$;
- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ avec $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\|$;

On se place dans un référentiel galiléen \mathcal{R} et dans le repère de Frenet $(M, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$. Le mouvement est uniforme car on a montré que l'énergie cinétique de la particule était constante. On a alors l'accélération qui vaut :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

On a également l'expression de la vitesse : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v_0 \vec{u}_T \iff \vec{F} = |qB_0| v_0 \vec{u}_N$

Principe fondamental de la dynamique : $m \frac{v_0^2}{R} \vec{u}_N = |qB_0| v_0 \vec{u}_N$

En projetant sur le vecteur \vec{u}_N on obtient : $R = \frac{mv_0}{|qB_0|}$

Démonstration : Trajectoire circulaire

On considère le mouvement d'une particule chargée de masse m et de charge q dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. À $t = 0$ la particule est placée au point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$.

Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M .

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :

- $\vec{F} = q\vec{E} = qE_0 \vec{u}_y$;
- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ avec $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\|$;

Principe fondamental de la dynamique : On commence par exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \implies \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

On peut alors exprimer la force magnétique dans le repère cartésien :

$$\vec{F} = qv_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B} = qB_0 \dot{x} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z + qB_0 \dot{y} \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = qB_0 (\dot{y} \vec{u}_x - \dot{x} \vec{u}_y)$$

On applique le PFD :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\vec{u}_x + m\ddot{y}\vec{u}_y &= qB_0(\dot{y}\vec{u}_x - \dot{x}\vec{u}_y) \\ / \vec{u}_x : \ddot{x} &= \frac{qB_0}{m} \dot{y} \\ / \vec{u}_y : \ddot{y} &= -\frac{qB_0}{m} \dot{x} \text{ et } \ddot{z} = \dot{z} = z = 0 \end{aligned}$$

On intègre entre l'instant $t = 0$ et l'instant t :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \dot{x}(t=0) &= \frac{qB_0}{m} (y(t) - y(t=0)) \\ \dot{y}(t) - \dot{y}(t=0) &= -\frac{qB_0}{m} (x(t) - x(t=0)) \end{aligned}$$

Or à $t = 0$ on a $x(t=0) = y(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{qB_0}{m} y + v_0 \\ \dot{y} &= -\frac{qB_0}{m} x \end{aligned}$$

On injecte dans les premières équations couplées :

$$\ddot{x} = \frac{qB_0}{m} \left(-\frac{qB_0}{m} x \right) \implies \ddot{x} + \left(\frac{qB_0}{m} \right)^2 x = 0$$

$$\ddot{y} = -\frac{qB_0}{m} \left(\frac{qB_0}{m} y + v_0 \right) \implies \ddot{y} + \left(\frac{qB_0}{m} \right)^2 y = -v_0 \frac{qB_0}{m}$$

On a alors deux équations du mouvement, on pose $\omega_0 = \left| \frac{qB_0}{m} \right|$ et on a les solutions :

$$x(t) = A_x \cos(\omega_0 t) + B_x \sin(\omega_0 t) \text{ et } y(t) = A_y \cos(\omega_0 t) + B_y \sin(\omega_0 t) - v_0 \frac{qB_0}{\omega_0^2 m}$$

On utilise les conditions initiales :

$$x(t=0) = A_x = 0 \text{ et } \dot{x}(t=0) = B_x \omega_0 = v_0 \text{ et } y(t=0) = A_y - \frac{mv_0}{|qB_0|} = 0 \text{ et } \dot{y}(t=0) = B_y \omega_0 = 0$$

On obtient alors :

$$x(t) = \frac{mv_0}{|qB_0|} \sin(\omega_0 t) \text{ et } y(t) = \frac{mv_0}{|qB_0|} \cos(\omega_0 t) - \frac{mv_0}{qB_0}$$

On obtient une trajectoire circulaire de rayon $R_c = \frac{mv_0}{|qB_0|}$ et de centre $C(0; -\frac{mv_0}{qB_0})$.

Mécanique 6 : Loi du moment cinétique

1 Moment cinétique d'un point matériel

Definition : Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point

On définit le moment cinétique du point matériel M par rapport au point O dans le référentiel \mathcal{R} par :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$$

Propriété :

Soit le moment cinétique du point M par rapport au point O : \vec{L}_O .

On peut calculer le moment cinétique du point M par rapport au point O' :

$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}$$

Propriété : Mouvement plan

Si le mouvement de M s'effectue dans un plan \mathcal{P} et que $O \in \mathcal{P}$. Alors :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} \perp \mathcal{P} \forall t$$

Propriété : Mouvement rectiligne

Si le point M est en mouvement rectiligne selon une droite \mathcal{D} et que $O \in \mathcal{D}$. Alors :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{0} \forall t$$

Definition : Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe

Soit (Δ) un axe orienté par le vecteur unitaire \vec{u}_Δ et O un point de cet axe. Le moment cinétique L_Δ de M dans \mathcal{R} par rapport à (Δ) est le projeté orthogonal de \vec{L}_O sur (Δ) :

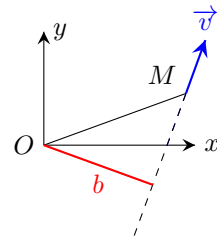
$$L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{L_O(M)_{/\mathcal{R}}} \cdot \vec{u}_\Delta$$

Propriété : Paramètre d'impact de M sur O

Si la quantité de mouvement $\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} \perp \Delta = (O, \vec{u}_z)$, alors on peut calculer le moment cinétique par rapport à Δ en utilisant le paramètre d'impact :

$$L_\Delta(M) = \pm m \|\vec{v}\| \times b \quad \text{avec} \quad b = \|\overrightarrow{OM}\| \sin(\alpha)$$

- b représente le paramètre d'impact de M sur O .
- Le signe de $L_\Delta(M)$ est déterminé en utilisant la règle de la main droite.



Propriété : Moment cinétique en coordonnées cylindriques suivant (Oz)

Soit un référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On se place en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

Le moment cinétique par rapport à la droite $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ vaut :

$$L_{(Oz)}(M)_{/\mathcal{R}} = mr^2\dot{\theta}$$

Pour connaître le sens positif de rotation autour d'un axe orienté on utilise la règle de la main droite.

2 Moment d'une force

Definition : Moment d'une force par rapport à un point

Le moment par rapport au point O d'une force \vec{F} appliquée en un point M est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Definition : Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Soit (Δ) un axe orienté par le vecteur unitaire \vec{u}_Δ et O un point de cet axe. On définit le moment par rapport à (Δ) de la force \vec{F} comme le projeté orthogonal de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ sur (Δ) :

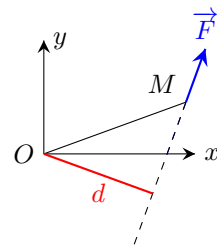
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u}_\Delta$$

Propriété : Le bras de levier

Si la force $\vec{F} \perp \Delta = (O, \vec{u}_z)$, alors on peut calculer le moment de la force par rapport à Δ en utilisant le bras de levier :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm \|\vec{F}\| \times d \quad \text{avec} \quad d = \|\vec{OM}\| \sin(\alpha)$$

- d représente le bras de levier.
- La droite passant par M et dirigée par \vec{F} s'appelle la droite d'action de la force \vec{F} .
- Le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ est déterminé en utilisant la règle de la main droite.



Propriété : Cas où $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$

Soit une droite $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ et une force \vec{F} appliquée à un point M . On a $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$ si :

- $\vec{F} \parallel \Delta$;
- si la droite d'action de \vec{F} passe par Δ .

3 Théorème du moment cinétique

Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe pour un point matériel

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel M calculé en un point fixe O est égale au moment résultant en O des forces appliquées :

$$\left. \frac{d\vec{L}_{O(M)/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

Démonstration :

On applique le principe fondamental de la dynamique à un point M de masse m dans un référentiel supposé galiléen \mathcal{R} :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F} \implies m \vec{OM} \wedge \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{F} \implies \left. \frac{d\vec{L}_{O(M)/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

Sachant que : $\left. \frac{d\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{OM} \wedge \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{a}_{M/\mathcal{R}}$

On obtient : $m \left. \frac{d\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_O(\vec{F})$

Propriété : Conservation du moment cinétique

Lorsque $\vec{L}_{O(M)/\mathcal{R}} = \vec{C}^{te}$ on a deux situations possibles :

- $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ alors le système est pseudo-isolé.
- $\sum_i \vec{F}_i \parallel \overrightarrow{OM}$ alors la résultante des forces est orientée vers O à tout instant.

Propriété : Projection sur un axe

On peut projeter la relation précédente sur un axe orienté (Δ) de direction \vec{u}_Δ et passant par O :

$$\frac{dL_\Delta(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

4 Application : le pendule simple

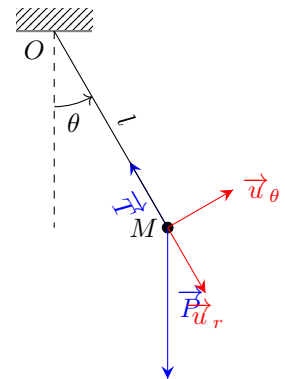
On considère un point matériel M de masse m attaché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l . On cherche à étudier le mouvement d'oscillation du pendule.

Système : Point matériel M de masse m .

Référentiel : Terrestre noté \mathcal{R}_T supposé galiléen et de repère $\mathcal{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Bilan des forces : dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

- $\vec{P} = m\vec{g} = m[(\vec{g} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r + (\vec{g} \cdot \vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta] = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$;
- $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ avec $T = \|\vec{T}\|$



Théorème du moment cinétique (TMC) :

$$\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \implies \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = l^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

On obtient alors :

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{u}_z = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \vec{0} + mgl \cos\theta \vec{u}_r \wedge \vec{u}_r - mgl \sin\theta \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$$

On a alors : $l\ddot{\theta}\vec{u}_z = -g \sin\theta \vec{u}_z$

On fait la projection suivant \vec{u}_z et on retrouve l'équation du mouvement d'un pendule simple :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

Mécanique 7 : Champ de force centrale conservatif

1 Champ newtonien

Definition : Champ newtonien

Un champ de force newtonien est un champ de force centrale de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$$

avec k une constante.

Le champ est attractif lorsque k est positive, et répulsif lorsque k est négative.

Exemple :

La force d'interaction gravitationnelle avec $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ exercée par $O(m_1)$ sur $M(m_2)$:

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

La force d'interaction coulombienne exercée par une particule en O de charge q_1 sur une particule en M de charge q_2 avec $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ la permittivité du vide :

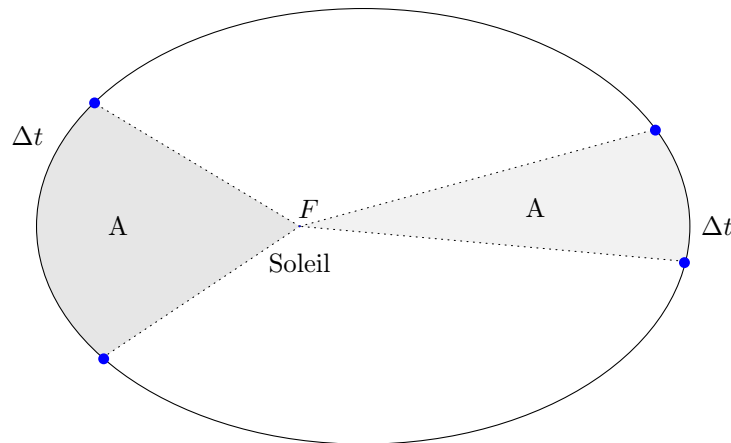
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

Loi de Kepler des orbites (1609)

Dans le référentiel héliocentrique, chaque planète décrit, dans le sens direct, une trajectoire elliptique, dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Loi de Kepler des aires (1609)

Dans le référentiel héliocentrique, l'aire balayée par le rayon vecteur Soleil-planète est proportionnel au temps mis pour la décrire.



Loi de Kepler des périodes (1618)

Dans le référentiel héliocentrique, le carré de la période de révolution sidérale d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse qu'elle décrit.

$$T^2 \propto a^3$$

Remarque : Ordre de grandeurs

- Le nom et l'ordre des planètes du système solaire : «**M**e **V**oilà **T**out **M**ouillé, **J**'étais **S**ous **U**n **N**uage» pour Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune ;
- Pour la Terre on a : $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$;

- Pour le Soleil on a : $M_{\odot} = 2,0 \times 10^{30}$ kg, $D_{TS} = 150 \times 10^6$ km = 1 ua
- Pour le système solaire : $\frac{T^2}{a^3} = 1 \text{ an}^2 \cdot \text{ua}^{-3} = 2,9 \times 10^{-19} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$

Remarque :

Ces lois sont basées sur l'observation expérimentale de Tycho Brahé. Elles sont démontrée par Newton ensuite. Toutes ces lois découlent des démonstrations suivantes ainsi que de calcul de l'étude des coniques hors programme.

2 Force centrale conservative

Definition : Rappel d'une force conservative

Une force est dite conservative s'il est possible de lui associer une énergie potentielle \mathcal{E}_p telle que son travail élémentaire s'exprime

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -d\mathcal{E}_p$$

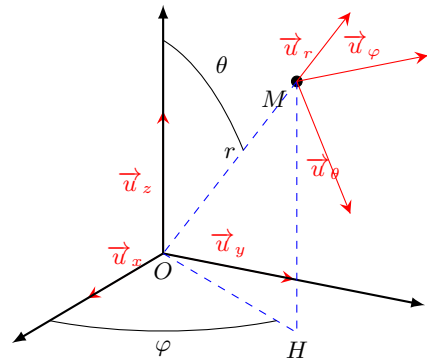
Definition : Force centrale et coordonnées sphériques

Un point matériel M est soumis à un champ de force centrale de centre O si, tout au long de son mouvement, la force qui lui est appliquée est colinéaire à \vec{OM} . La force étant colinéaire au vecteur \vec{OM} , le système de coordonnée préférentiel est le système de coordonnées sphériques.

$$\vec{F} = F(\vec{OM}) \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

$$\vec{F} = F(M) \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

$$\vec{F} = F(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$



Propriété : Force centrale conservative

Une force centrale conservative dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ telle que :

$$\vec{F} = F(r) \vec{u}_r = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{u}_r$$

Exemple :

La force gravitationnelle créée par un corps de masse M_O en O :

$$\vec{F}_g = -G \frac{mM_O}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{d\mathcal{E}_{pg}}{dr} \vec{u}_r \implies \mathcal{E}_{pg}(r) = -\frac{GmM_O}{r}$$

La force électrostatique créée par une charge Q_O en O :

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ_O}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{d\mathcal{E}_{pe}}{dr} \vec{u}_r \implies \mathcal{E}_{pe}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ_O}{r}$$

Avec à chaque fois l'énergie potentielle prise nulle lorsque $r \rightarrow +\infty$.

Propriété : Conservation du moment cinétique

Soit un point M de masse m soumis à une force centrale de centre O \vec{F} en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . On applique le théorème du moment cinétique au point O :

$$\left. \frac{d\vec{L}_{O(M)}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = F(r) \vec{OM} \wedge \vec{u}_r = \vec{0} \implies \vec{L}_{O(M)}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{C}^{t\acute{e}}$$

On en déduit que le moment cinétique du point M calculé au centre O est une constante du mouvement.

Propriété : Mouvement plan

D'après la définition du moment cinétique :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Le vecteur moment cinétique est à chaque instant orthogonal au vecteur position et au vecteur vitesse. Si le moment cinétique est constant vectoriellement alors le mouvement reste dans le même plan orthogonal au moment cinétique. On peut alors définir un repère cylindrique d'axe (Oz) orthogonal au plan du mouvement.

Propriété : Loi des aires

Comme le mouvement est plan, on se place en coordonnées cylindriques avec $z = 0$. On obtient :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \implies \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

D'après le théorème du moment cinétique on a vu que $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{C}^{te}$. On en déduit alors que :

$$C = r^2\dot{\theta} = C^{te}$$

Cette loi est appelée loi des aires car l'aire balayée par le vecteur \vec{OM} est proportionnelle au temps.

3 Aspects énergétiques

Propriété : Application du TEM

Soit un point M de masse m soumis à une force centrale conservatrice de centre O \vec{F} en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . La force centrale conservatrice dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ et on applique le théorème de l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = C^{te}$$

Propriété : Énergie cinétique

On calcule alors l'énergie cinétique en coordonnées cylindriques avec $z = 0$:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r} + \frac{C^2}{r^2}\right)$$

On obtient alors :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r) = C^{te}$$

Définition : Énergie potentielle effective

On définit alors l'énergie potentielle effective par :

$$\mathcal{E}_{peff}(r) = \mathcal{E}_p(r) + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$$

Le terme $\mathcal{E}_{ceff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ est appelé énergie cinétique effective.

Propriété : Étude du mouvement radial

On utilise la conservation de l'énergie mécanique pour étudier le mouvement radial, c'est-à-dire les valeurs de r accessibles pour une particule en fonction de son énergie mécanique totale.

On reprend la méthode de l'étude énergétique d'un point en posant :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{ceff} + \mathcal{E}_{peff}(r) \geq \mathcal{E}_{peff}(r)$$

Definition : État lié/État de diffusion

On cherche à résoudre l'inégalité : $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{\text{peff}}(r)$

- On définit l'état lié d'un point M si la solution se met sous la forme d'un interval fermé $[r_1, r_2]$ tel que :

$$\mathcal{E}_{\text{peff}}(r_1) = \mathcal{E}_{\text{peff}}(r_2) = \mathcal{E}_m$$

Dans ce cas là, la trajectoire du point M est elliptique ou circulaire autour du point O .

- On définit l'état de diffusion d'un point M si la solution se met sous la forme d'un interval semi-ouvert $[r_1, +\infty[$ tel que :

$$\mathcal{E}_{\text{peff}}(r_1) = \mathcal{E}_m$$

Dans ce cas là, la trajectoire du point M est hyperbolique ou parabolique et sort du puit de potentiel.

Exemple : Force d'attraction gravitationnelle

L'énergie potentielle gravitationnelle d'une particule M de masse m autour d'un astre O de masse m_O est :

$$\mathcal{E}_p(r) = -\mathcal{G} \frac{mm_O}{r}$$

D'où l'énergie potentielle effective :

$$\mathcal{E}_{\text{peff}}(r) = \frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{mM_O}{r}$$

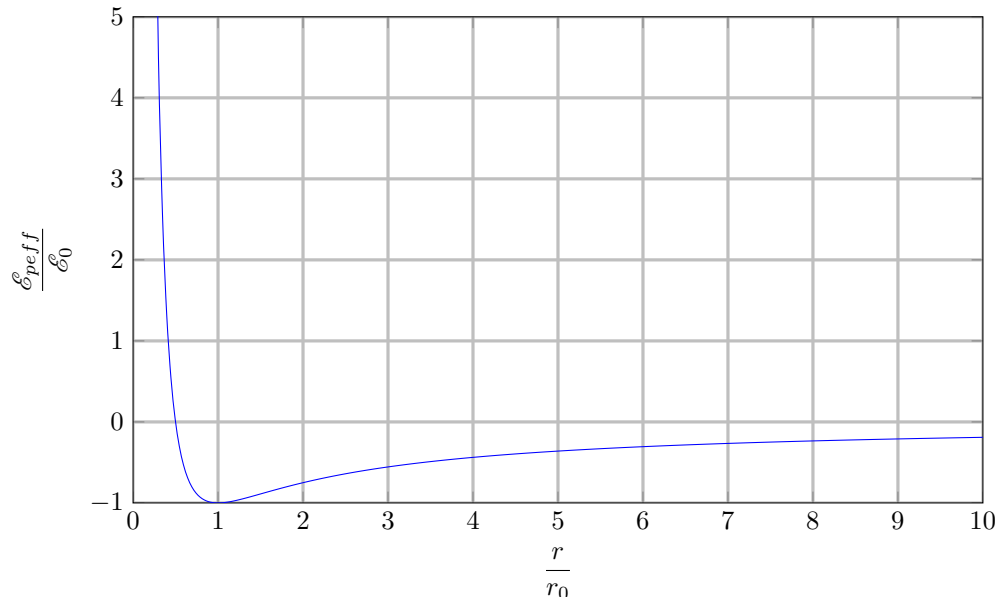
Elle possède un minimum en $r = r_0$ où :

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{peff}}}{dr}(r_0) = -\frac{mC^2}{r_0^3} + \mathcal{G} \frac{mm_O}{r_0^2} = 0 \implies r_0 = \frac{C^2}{\mathcal{G}m_O}$$

L'énergie mécanique minimale pour laquelle on a une trajectoire circulaire vaut donc :

$$\mathcal{E}_{\text{min}} = -\frac{\mathcal{G}m_O m}{2r_0} = -\mathcal{E}_0$$

On trace la courbe de $\frac{\mathcal{E}_{\text{peff}}}{\mathcal{E}_0}$ en fonction de $\frac{r}{r_0}$:



avec \mathcal{E}_0 l'énergie potentielle effective minimale et r_0 le rayon pour une énergie potentielle effective minimale ($\mathcal{E}_{\text{peff}}(r_0) = \mathcal{E}_0$).

On observe alors deux types d'états :

- Les états liés pour lesquels l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{lié}} < 0$. La particule est alors confinée entre les positions r_1 et r_2 tel que $\mathcal{E}_{\text{peff}}(r_{1/2}) = \mathcal{E}_{m,\text{lié}}$.
- Les états de diffusions pour lesquels l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{diffusion}} \geq 0$. La particule est alors libre dans tout l'espace $r \geq r_3$ tel que $\mathcal{E}_{\text{peff}}(r_3) = \mathcal{E}_{m,\text{diffusion}}$.

Propriété : Trajectoires

On observe plusieurs types de trajectoires :

- Trajectoire circulaire de rayon r_0 si $\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{peff}(r_0)$ l'énergie potentielle effective minimale.
- Trajectoire elliptique de demi grand axe $a = \frac{r_1 + r_2}{2}$ si $-\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_m < 0$.
- Trajectoire parabolique si $\mathcal{E}_m = 0$.
- Trajectoire hyperbolique si $\mathcal{E}_m > 0$.

L'ensemble de ces trajectoire forme la famille des coniques.

4 Trajectoire circulaire**Propriété : Uniformité du mouvement**

On applique la loi des aires et on obtient :

$$C = r_0 \dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{C}{r_0} = C^{te}$$

Le mouvement est alors circulaire uniforme.

Propriété : Vitesse

On applique le PFD au point M dans le référentiel géocentrique :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F} \implies -mr_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{\mathcal{G}m_O m}{r_0^2} \vec{u}_r$$

car $\dot{\theta} = C^{te}$. On obtient alors :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}m_O}{r_0^3} \implies v_0 = r_0 \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_O}{r_0}}$$

avec v_0 la vitesse du satellite/astre le long de la trajectoire circulaire de centre O et de rayon r_0 .

Propriété : Énergie mécanique minimale

On a vu que la trajectoire circulaire correspond à un minimum de l'énergie mécanique. On calcule la valeur du minimum en utilisant les propriétés précédentes :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\min} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathcal{G}m_O m}{r_0}$$

On utilise alors l'expression de v_0 :

$$\mathcal{E}_m = -\mathcal{G} \frac{m_O m}{2r_0}$$

Propriété : Période

On en déduit la période de révolution de l'astre :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} \implies T = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{r_0}{\mathcal{G}m_O}}$$

Propriété : Loi de Kepler

On retrouve la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_O}$$

Propriété : Cas d'une trajectoire elliptique

Pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe $a = r_1 + r_2$ tel que $\mathcal{E}_{\text{peff}}(r_1) = \mathcal{E}_{\text{peff}}(r_2) = \mathcal{E}_m$, on a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_O}$$

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}m_O m}{2a}$$

5 Satellites terrestres

Remarque : Les différents types de satellites terrestres

La terre possède plusieurs types de satellites :

- 1 satellite naturel : la Lune. Orbite quasi-circulaire de rayon $D_{TL} = 384 \times 10^3$ km et de période $T_L \simeq 27,3$ jour et de vitesse moyenne $v_L \simeq 3,7 \times 10^3$ km \cdot h⁻¹.
- Les satellites artificiels en orbite basse (environ 1500). Leurs altitudes sont situées entre 300 km (limité par le freinage de l'atmosphère) et 2000 km pour des période de révolution entre 1 h et 2 h. La mise en orbite est moins coûteuse en énergie. Les communications sont plus facile et plus rapide.
- Les satellites artificiels en orbite moyenne (environ 100 dont le GPS). Leurs altitudes est autour de 20×10^3 km et leurs période est autour de 12 h.
- Les satellites géostationnaire situé à une altitude de $3,6 \times 10^3$ km pour une période de révolution d'environ 24 h.

Definition : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste en permanence à la verticale d'un même point de la Terre.

Propriété : Plan d'orbite

Les trajectoires, dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G , du satellite géostationnaire et du point M de la Terre considéré doivent être dans le même plan. Celle du satellite est dans un plan contenant le centre O de la Terre. Celle du point M est dans le plan normal à l'axe de rotation de la Terre et contenant la projection orthogonale de M sur cet axe. Ces deux plans ne sont confondus qu'à l'équateur. Ainsi un satellite géostationnaire est nécessairement équatorial.

Propriété : Altitude

Il n'existe qu'une orbite géostationnaire, elle est donnée par la troisième loi de Kepler. La période de révolution du satellite T doit être égale à la période du jour sidéral que met la Terre pour faire un tour complet sur elle-même $T_{\text{sid}} = 86\,164$ s. On en déduit :

$$T_{\text{sid}}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} (R_T + h)^3$$

où $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg est la masse de la Terre, m la masse du satellite, et $r_0 = R_T + h$ où $R_T = 6,4 \times 10^3$ km est le rayon de la Terre, et h l'altitude du satellite géostationnaire.

On obtient alors :

$$h = \left(\frac{GM_T T_{\text{sid}}^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R_T = 35\,786 \text{ km}$$

Definition : Vitesse en orbite basse

Une orbite basse est une orbite dont l'altitude h est faible. On calcule la vitesse d'un tel satellite :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_t + h}}$$

On suppose maintenant que $h \ll R_T$ et on obtient la première vitesse cosmique :

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Definition : Vitesse de libération

La vitesse de libération est la vitesse minimale permettant de passer de la surface de la Terre à un état de diffusion. On cherche donc v_2 tel que $\mathcal{E}_m = 0$ à la surface de la Terre :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = 0 \implies v_2 = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

6 Capacité numérique**Propriété : Capacité numérique 5**

À l'aide de python, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.

```

1  def Fcentrale(X, t):
2      C=v0*b
3      dtheta=C/X[1]**2
4      dr=X[2]
5      ddr=C**2/X[1]**3-G*MT/X[1]**2
6      return [dtheta, dr, ddr]
7  def Cl(v0, b):
8      r0=b
9      dr0=0
10     theta0=0
11     return [theta0, r0, dr0]
12  G=6.67e-11 #cste de gravitation universelle
13  MT=5.98e24 # masse de la Terre
14  R=6.4e6 # rayon de la Terre
15  m=2e3 #masse du satellite artificielle
16  b=2*R # Param d'impact
17  vlib=np.sqrt(2*G*MT/b) #vitesse de liberation en b
18  vcirc=np.sqrt(G*MT/b) # vitesse trajectoire circulaire
19  v=np.array([vcirc, vcirc+0.5*(vlib-vcirc), vlib, vcirc+0.9*(vlib-vcirc), vlib, 1.1*vlib
20             ,10*vlib])
21  N=1000
22  plt.figure()
23  plt.plot([0],[0], 'ko')
24  for k in range(len(v)):
25      v0=v[k]
26      C=b*v0 #constante des aires
27      Em=0.5*m*v0**2-G*MT*m/b # energie mecanique initiale
28      if Em<0:
29          a=-0.5*G*MT*m/Em
30          T=np.sqrt(a**3*4*np.pi**2/(G*MT))
31      else:
32          T=50*b/v0
33      dt=T/(N-1)
34      t=np.array([k*dt for k in range(N)])
35      sol=odeint(Fcentrale, Cl(v0, b), t)
36      r, theta=sol[:, 1], sol[:, 0]
37      x,y=r*np.cos(theta), r*np.sin(theta)
38      plt.plot(x,y)
39  plt.axis('scaled')
40  plt.xlabel('$x_{en_m}$')
41  plt.ylabel('$y_{en_m}$')
42  plt.show()

```


Mécanique 8 : Introduction à la mécanique du solide

1 Cinématique du solide

Definition : Solide indéformable

Un solide est un système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres.

Remarque :

On oppose les solides aux systèmes déformables dont les points peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres. Les déformations ou les ruptures du solide sont exclues de cette étude.

Definition : Centre de masse d'un solide

Soit un solide (S) composé de M_i points de masse m_i . On définit le centre de masse G du solide par :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{OM}_i}{m}$$

avec $m = \sum_i m_i$.

On obtient la relation suivante :

$$\sum_i m_i \vec{GM}_i = \vec{0}$$

Definition : Translation

Un solide (S) est en translation lorsque les directions du repère lié au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude. Si le solide est en translation, tous ses points ont à chaque instant le même vecteur vitesse. On décide alors d'étudier le mouvement d'un seul point du solide, celui du centre de masse G :

$$\vec{v}_{G \in S/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{OG}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

Exemple : Translation rectiligne

Lors d'une translation rectiligne, tous les points du solide (S) ont une trajectoire rectiligne selon des droites parallèles entre elles.

Exemple : Translation circulaire

Lors d'une translation circulaire, tous les points du solide (S) ont une trajectoire circulaire de même rayon mais de centres différents.

Definition : Rotation autour d'un axe fixe

Un solide indéformable (S) est en rotation autour d'un axe Δ fixe dans \mathcal{R} si tous les points le constituant ont une trajectoire circulaire dans \mathcal{R} centrée sur un point de Δ .

Definition : Vitesse angulaire d'un solide

La vitesse angulaire d'un solide (S) est la dérivée temporelle $\omega = \dot{\theta}$ de l'angle repérant sa position. L'accélération angulaire du solide est la dérivée temporelle de sa vitesse angulaire $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$.

Propriété : Description cinématique d'un solide en rotation

On se place en coordonnée cylindrique avec le point O du centre du repère appartenant à l'axe de rotation Δ . On pose \vec{u}_z colinéaire à Δ et on définit la vitesse d'un point M appartenant (S) dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}_{M \in S/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM} = r\omega \vec{u}_\theta$$

avec $\Omega_{S/\mathcal{R}} = \omega \vec{u}_z$.

2 Loi du moment cinétique scalaire

Definition : Moment d'inertie d'un point par rapport à un axe orienté

Le moment cinétique de M de masse m par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ dans \mathcal{R} en coordonnées cylindriques est la projection de $\overrightarrow{L}_O(M)_{/\mathcal{R}}$ sur l'axe Δ :

$$L_{\Delta}(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_z = m(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_z$$

On utilise alors les coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

On obtient alors :

$$L_{\Delta}(M)_{/\mathcal{R}} = mr^2\dot{\theta} = J_{(Oz)}(M)\dot{\theta}$$

et on appelle $J_{(Oz)}(M) = mr^2$ le moment d'inertie du point M .

Definition : Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté

Le moment cinétique d'un solide (S) en rotation à la vitesse $\omega = \dot{\theta}$ autour d'un axe fixe $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ s'écrit :

$$L_{\Delta}(S) = J_{\Delta}(S)\omega$$

avec $J_{\Delta}(S)$ le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe Δ en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Remarque :

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est toujours positif.

Le moment d'inertie dépend de la répartition des masses. Plus la masse du solide est éloigné de l'axe Δ , plus le moment d'inertie augmente.

On vous donnera toujours $J_{\Delta}(S)$.

Loi scalaire du moment cinétique du solide

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à un axe fixe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ d'un solide (S) en rotation autour de cet axe est égale au moment résultant par rapport à (Δ) des forces extérieures :

$$\frac{dL_{\Delta}(S)}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\overrightarrow{F}_{ext \rightarrow S})$$

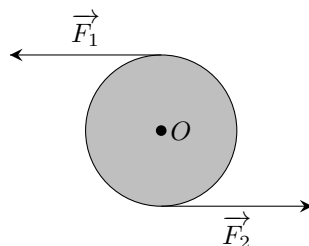
En utilisant le moment d'inertie $J_{\Delta}(S)$ par rapport à Δ on obtient :

$$J_{\Delta}(S) \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\overrightarrow{F}_{ext \rightarrow S})$$

avec $\omega = \dot{\theta}$.

Definition : Couple de forces

Un couple de forces est un système de forces (au minimum 2) dont la résultante $\overrightarrow{F}_{ext \rightarrow S} = \vec{0}$ est nulle et dont le moment résultant est non nul et indépendant du point où on le calcul.



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Definition : Liaison pivot

Une liaison pivot est une liaison entre deux solides en rotation l'un par rapport à l'autre (un rotor en rotation par

rapport à un stator), sans translation possible. Le moment de l'action du stator sur le rotor est forcément nul :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}_{\text{stator} \rightarrow \text{rotor}}) = 0$$

3 Énergie cinétique d'un solide en rotation

Definition : Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

L'énergie cinétique d'un solide en rotation dans un référentiel \mathcal{R} autour d'un axe fixe $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ à la vitesse angulaire ω s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta}(S) \omega^2$$

Definition : Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation

La puissance d'une force $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S}$ appliquée à un point M d'un solide (S) en rotation dans le référentiel \mathcal{R} autour d'un axe fixe (Δ) à la vitesse angulaire ω est définie par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S}) = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S}) \omega$$

Definition : Travail d'une force appliquée à un solide en rotation

Le travail d'une force $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S}$ appliquée à un point M entre la position M_1 et M_2 d'un solide (S) en rotation dans le référentiel \mathcal{R} autour d'un axe fixe (Δ) à la vitesse angulaire ω est définie par :

$$W(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S}) dt = \int_{M_1}^{M_2} \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S}) d\theta$$

Loi de la puissance cinétique pour un solide

Dans un référentiel galiléen, la loi de la puissance cinétique appliquée à un solide soumis aux forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S}$ s'écrit :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S})$$

Loi de l'énergie cinétique pour un solide

Dans un référentiel galiléen, la loi de l'énergie cinétique appliquée à un solide soumis aux forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S}$ entre t_1 et t_2 s'écrit :

$$\Delta \mathcal{E}_c = W(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

4 Le pendule pesant

Exemple : Le pendule pesant

Considérons une tige homogène, de longueur l et masse m , attachée en O par une liaison pivot parfaite de direction \vec{u}_z . Sa position est repréée par l'angle θ par rapport à la verticale. La tige est lâchée sans vitesse initiale avec un angle θ_0 . La tige est caractérisée par son centre de masse G et son moment d'inertie $J_{(Oz)}$ par rapport à l'axe (Oz), elle est soumise à l'action de la réaction de la liaison pivot, et à l'action du poids qui s'exerce en G .

Le moment des actions de la liaison pivot en O est nul, on ne considère donc que le moment de l'action du poids :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = -mgd \sin \theta$$

avec d la distance OG . On applique la règle de la main droite pour connaître le signe du moment.

Propriété : Équation du mouvement

On applique maintenant le théorème du moment cinétique pour un solide :

$$J_{(Oz)}(S)\ddot{\theta} = -mgd \sin \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(Oz)}(S)} \sin \theta = 0$$

On retrouve l'équation différentielle du pendule simple, mais cette fois on a des propriétés solides !

Propriété : Intégrale première du mouvement d'un pendule pesant

Si on multiplie l'équation du mouvement du pendule pesant par $\dot{\theta}$ et qu'on intègre entre $t = 0$ et t on obtient :

$$\frac{1}{2}J_{(Oz)}(S)\dot{\theta}^2 - mgd \cos \theta = C^{te} = E_m = -mgd \cos \theta_0$$

Si $\omega(t = 0) = 0$.

5 Capacité numérique

Definition : Intégration numérique par la méthode des rectangles

À l'aide de python, on peut calculer une valeur approchée d'une intégrale d'une fonction f en séparant un intervalle $[a; b]$ en N intervalles $[x_i; x_{i+1}]$ tel que $x_{i+1} - x_i = (b - a)/N$ et où la fonction f est considérée comme constant sur l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ et dont la valeur vaut $f(x_i)$. De cette manière :

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \left(\frac{b-a}{N}\right) \sum_{i=1}^{i=N} f(x_i)$$

Propriété : Création d'une fonction python

On définit la fonction **RectG(a,b,N,f)** qui calcule l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ avec une division en N intervalles $[x_i; x_{i+1}]$:

```

1 | def RectG(a, b, N, f):
2 |     h = (b-a)/N
3 |     l = 0
4 |     for i in range(N):
5 |         l = l + h * f(a+i*h)
6 |     return l
7 |
8 | def f(x):
9 |     return .... # a completer

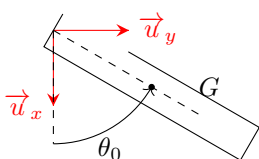
```

Propriété : Capacité numérique 6

À l'aide de python, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.

Exemple : Calcul de la période d'un pendule

Considérons une tige homogène, de longueur l et masse m , attachée en O par une liaison pivot parfaite de direction \vec{u}_z . Sa position est reprérée par l'angle θ par rapport à la vetricale. La tige est lâchée sans vitesse initiale avec un angle θ_0 . La tige est caractérisée par son centre de masse G et son moment d'inertie $J_{(Oz)}$ par rapport à l'axe (Oz) , elle est soumise à l'action de la réaction de la liaison pivot, et à l'action du poids qui s'exerce en G .



Système : {Pendule S (J_{Oz}, m, d)}

Référentiel : Terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Bilan : $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = -mgd \sin \theta$ et $\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{Pivot}) = 0$

TMC scalaire : $J_{(Oz)}(S)\ddot{\theta} = -mgd \sin \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(Oz)}(S)} \sin \theta = 0 \times \dot{\theta}$

On intègre entre $t = 0$ où $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$ et un instant t quelconque, on obtient :

$$\dot{\theta}^2(t) = 2\omega_0^2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \implies \frac{d\theta}{dt} = -\omega_0 \sqrt{2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}$$

On applique alors la méthode de séparation des variables pour exprimer dt :

$$dt = -\frac{1}{\omega_0 \sqrt{2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} d\theta \implies \int_0^{T/4} \omega_0 \sqrt{2} dt = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} = I(\theta_0) \implies T = \frac{T_0 \sqrt{2}}{\pi} I(\theta_0)$$

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 def f(x):
4     return 1/np.sqrt(np.cos(x)-np.cos(theta0))
5 T0=1
6 N=100000
7 n=10
8 theta=np.array([k*np.pi/(2*n) for k in range(1,n+1)])
9 T=np.zeros(n)
10 for k in range(n):
11     theta0=theta[k]
12     T[k]=(np.sqrt(2)*T0/np.pi)*RectG(0,theta0,N,f)
13 plt.plot(theta,T,'+')
14 plt.xlabel('$theta en rad$')
15 plt.ylabel('$T$ en s')
16 plt.show()

```


Troisième partie

Ondes

Liste des chapitres Ondes

1 Lois de l'optique géométrique	113
1 Sources lumineuses	113
2 Modèle de l'optique géométrique	114
3 Changement de milieu	115
4 Notion d'objet et d'image :	116
5 La fibre à saut d'indice	117
2 Formation des images	119
1 Notion d'objet et d'image :	119
2 Les lentilles minces	119
3 L'œil	122
4 L'appareil photo	123
5 Instrument afocal :	124
3 Propagation d'un signal	125
1 Notion d'onde	125
2 Ondes progressives harmoniques :	126
3 Phénomène d'interférences	127
4 Interférences lumineuses	128
4 Introduction à la mécanique quantique	131
1 Introduction :	131
2 Dualité onde-particule :	131
3 Formalisme quantique	133
4 Quantification de l'énergie	135

Ondes 1 : Lois de l'optique géométrique

1 Sources lumineuses

Definition : Onde monochromatique

Une onde monochromatique est une onde sinusoïdale de fréquence ν et de longueur d'onde λ . L'onde se propage à la célérité v dans un milieu, avec la relation :

$$\lambda\nu = v \quad \text{avec} \quad v \leq c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ maximum dans le vide}$$

La lumière se propage dans ce milieu à la vitesse v et on définit l'indice optique n d'un milieu :

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

On définit alors la longueur d'onde dans le vide λ_0 et on relie la longueur d'onde λ dans le milieu à la longueur d'onde dans le vide :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Chaque longueur d'onde dans le vide est associée à une couleur du domaine visible :

λ_0 (nm)	< 400	500	550	590	630	> 750
ν (Hz)	$> 7,5 \times 10^{14}$	6×10^{14}	$5,5 \times 10^{14}$	$5,1 \times 10^{14}$	$4,8 \times 10^{14}$	$< 4,0 \times 10^{14}$
Couleur	ultra violet	bleu	vert	jaune orangé	rouge	infra rouge

On appelle milieu dispersif un milieu dont l'indice optique dépend de la longueur d'onde. On peut appliquer la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

On appelle milieu non dispersif un milieu dont l'indice optique ne dépend pas de la longueur d'onde ($n = C^{te}$).

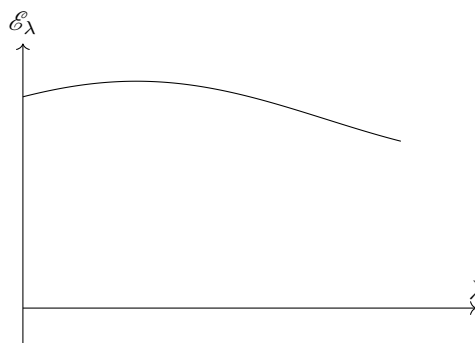
Definition : Spectre de la lumière

On définit le spectre lumineux d'une source de lumière non-monochromatique comme la courbe qui donne l'éclairement \mathcal{E}_λ en fonction de λ_0 la longueur d'onde dans le vide.

Propriété : Lampe à incandescence

On appelle lumière blanche une lumière composée d'un large gamme de longueur d'onde (dans le visible). Son spectre lumineux est alors continu et étalé sur toutes les fréquences visibles (4×10^{14} Hz à 8×10^{14} Hz).

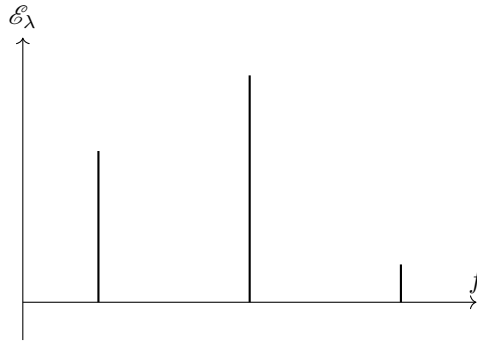
Une lumière blanche est une lumière dont le spectre est continu et contient toutes les longueurs d'onde du domaine visible.



C'est le cas de la lumière du Soleil, ainsi que de toutes les lampes thermiques qui émettent de la lumière en chauffant un corps chaud à haute température.

Propriété : Lampes spectrales

Une lampe spectrale est une lampe dont la lumière est émise par un élément sous forme de vapeur dans laquelle une décharge électrique est produite. La décharge électrique fait passer les atomes dans un état excité qui produit des photons en passant dans un état d'excitations inférieur.



Une lampe spectrale émet une série de longueurs d'onde caractéristique de l'élément qu'elle contient. Le spectre est constitué de pics fin appelés raies spectrales. Chaque raie représente une vibration quasi-monochromatique.

Propriété : Source ponctuelle monochromatique

Une source ponctuelle S est une source de dimensions infiniment petites, assimilable à un point. Elle émet de la lumière dans toutes les directions.

Une source ponctuelle et monochromatique est une source ponctuelle émettant une onde lumineuse monochromatique.

2 Modèle de l'optique géométrique

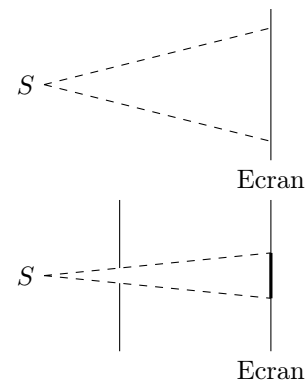
Propriété : Notion expérimentale de rayon

La zone lumineuse issue d'une source primaire S est située à l'intérieur d'un cône qu'on appelle faisceau lumineux.

Si on intercale sur la trajectoire de la lumière un écran percé d'un trou on restreint l'ouverture de la zone éclairée. On a alors une tache lumineuse réduite. Si on réduit la taille du trou, la tache lumineuse diminue également.

Lorsque le trou est trop petit, la tache lumineuse s'élargit de nouveau, on assiste alors à la diffraction du faisceau lumineux.

On définit alors un rayon lumineux comme la trajectoire parcourue par une onde lumineuse lors de sa propagation.



Definition : Approximation de l'optique géométrique

Les lois de l'optique géométrique étudiées dans la suite sont valables tant que les instruments utilisés sont de grande taille par rapport à la longueur d'onde λ de la lumière.

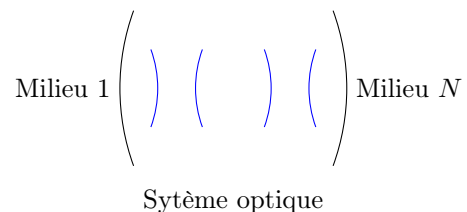
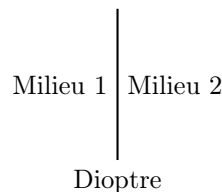
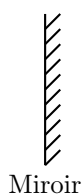
Definition : Milieu homogène, isotrope et transparent

On étudiera toujours le trajet des rayons dans des milieux d'indice n :

- homogène : $n = C^{te} \quad \forall M \in \text{milieu}$;
- isotrope : $n_x = n_y = n_z = n$;
- transparent : permet la propagation de la lumière.

Vocabulaire :

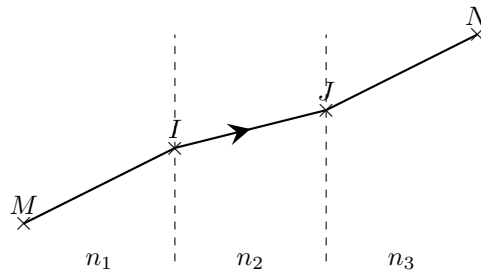
- Un **dioptre** comme la surface séparant deux milieux homogènes d'indices différents.
- Un **miroir** comme une surface réfléchissant la lumière.
- Un **Système optique** comme un ensemble de milieux transparent, homogène et isotopes séparés par des dioptres ou des miroirs.



Propriété : Propagation rectiligne de la lumière

On considère un milieu homogène, isotrope et transparent, la lumière se propage alors de manière rectiligne et les rayons lumineux sont des droites.

Dans une suite de milieu homogènes et isotropes. Le trajet d'un rayon lumineux sera formé d'une succession de segment de droite.

**Propriété : Retour inverse de la lumière**

La trajectoire suivie par la lumière ne dépend pas du sens de parcours. La lumière parcourt la même trajectoire pour aller de A vers B que pour aller de B vers A.

**Propriété : Indépendance des rayons lumineux**

Les rayons lumineux issus des sources S_1 et S_2 sont la somme des rayons issus de S_1 et des rayons issus de S_2 . On reste dans le cas où les deux ondes lumineuses n'interfèrent pas.

3 Changement de milieu

Remarque : Observation

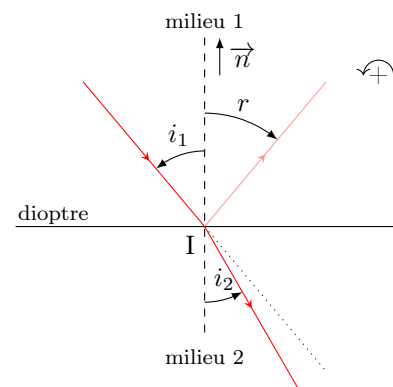
Lorsqu'un **rayon incident** arrive sur un dioptre on observe deux rayons :

- un **rayon réfléchi** qui reste dans le milieu 1 ;
- un **rayon réfracté** qui traverse le dioptre en subissant une déviation ;

Definition : Paramétrage géométrique

Vocabulaire :

- I : point d'incidence ;
- \vec{n} : normale à la surface du dioptre ;
- \mathcal{P} : plan d'incidence contenant I , \vec{n} et le rayon incident ;
- i_1 : angle d'incidence ;
- i_2 : angle réfracté ;
- r : angle réfléchi ;
- $D_{\text{refra}} = i_2 - i_1$ déviation du rayon lors de la réfraction ;
- $D_{\text{refle}} = \pi - i_1 + r$ déviation du rayon lors de la réflexion.



Attention, les angles ici sont orientés, c'est-à-dire qu'il y a un sens de rotation arbitrairement pris comme positif, il faut indiquer ce sens par un petit symbole \curvearrowright .

Lois de Snell-Descartes

- **Première loi** : Les rayons réfléchi et réfracté sont situés dans le plan d'incidence.
- **Deuxième loi** : L'angle réfléchi et l'angle d'incidence sont liés

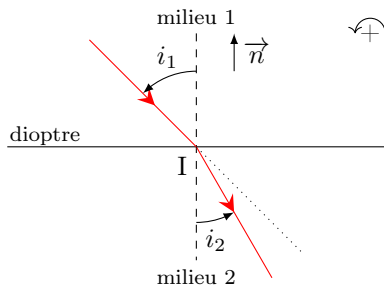
$$i_1 = -r$$

- **Troisième loi** : L'angle réfracté et l'angle d'incidence sont liés

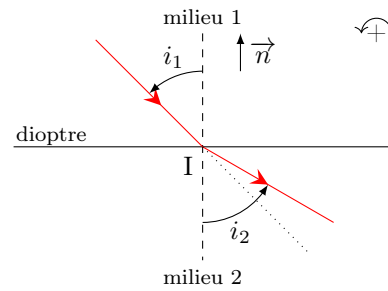
$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Remarque : Deux situations possibles de réfraction

Soit on a la situation où $n_2 > n_1$ dans ce cas on dit que le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1.



Soit on a la situation où $n_2 < n_1$ dans ce cas on dit que le milieu 2 est moins réfringent que le milieu 1.

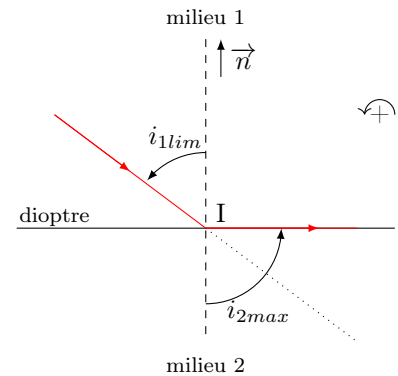


Propriété : Réflexion totale

Si $n_1 > n_2$ alors d'après la deuxième loi de Descartes on a $i_2 > i_1$. Si on augmente l'angle d'incidence jusqu'à une valeur limite $i_1 = i_{1lim}$, on obtient alors l'angle réfracté à la valeur maximale $i_2 = i_{2max} = \frac{\pi}{2}$. La loi de Descartes nous donne alors :

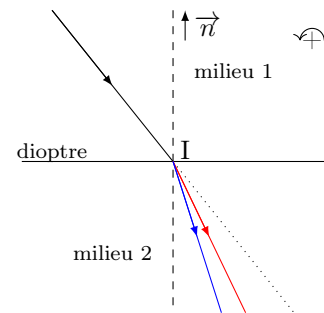
$$n_1 \sin i_{1lim} = n_2 \sin i_{2max} \implies i_{1lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

La totalité de l'énergie est alors réfléchi, il ne reste que le rayon réfléchi. On parle alors de réflexion totale.



Propriété : Dispersion de la lumière

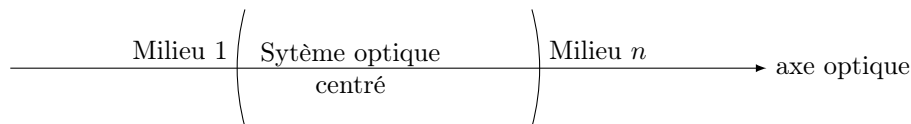
Si le milieu 2 est dispersif alors $n_2 = n_2(\lambda_0)$ et chaque couleur aura son propre indice optique. D'après la loi de Descartes, chaque couleur aura donc un angle réfracté $i_2 = i_2(\lambda_0)$ différent. D'après la loi de Cauchy, plus la longueur d'onde dans le vide est grande, plus l'indice optique est faible, plus l'angle réfracté est grand. On a donc le rayon rouge de grande longueur d'onde qui est moins dévié que le rayon bleu.



4 Notion d'objet et d'image :

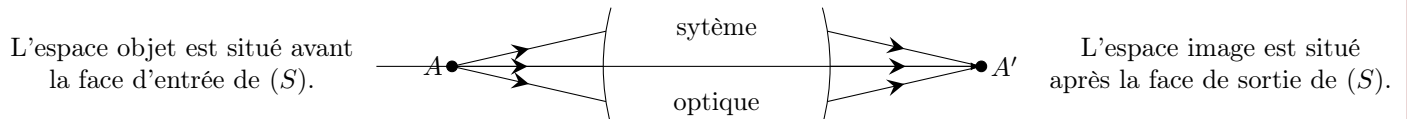
Definition : Axe optique

Si tous les composants d'un système optique ont un axe de symétrie en commun, système est dit **centré**. L'axe de symétrie est alors appelé **axe optique**.



Definition : Image/Objet

On considère une source ponctuelle A , si tous les rayons issus de A convergent en A' après avoir traversé (S) , on dit que A' est l'image de A à travers (S) . Les points A et A' sont conjugués par le système.

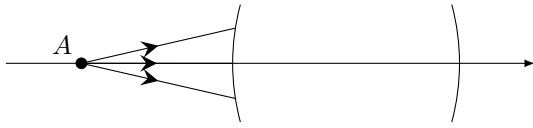


Pour voir un point image, il faut utiliser un écran à la position de l'image qui va diffuser les rayons dans toutes les directions.

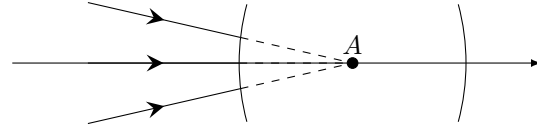
Propriété : Objet réel/virtuel

Si le faisceau entrant dans un système optique (S) est divergent depuis un point A situé dans l'espace objet. Alors A est un objet réel, sinon c'est un objet virtuel.

Objet réel



Objet virtuel



Les rayons après le premier dioptrés sont déviés, on trace donc leurs prolongements en pointillés.

Propriété : Image réelle/virtuelle

Si le faisceau sortant d'un système optique est convergent vers un point A' situé dans l'espace image. Alors A' est une image réelle, sinon c'est une image virtuelle.

Image réelle

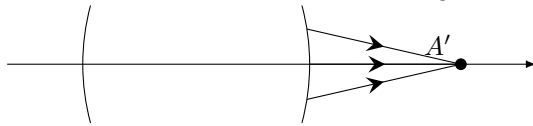
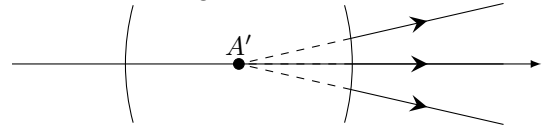


Image virtuelle



On ne peut pas projeter une image virtuelle sur un écran, mais on peut la voir avec notre œil (voir fin du chapitre).

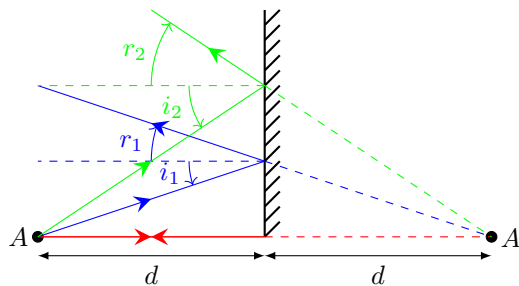
Propriété : Objet/Image à l'infini

Un objet situé à l'infini émet des rayons qui sont parallèle entre eux.

Une image située à l'infini est formée à partir de rayons parallèles entre eux.

Propriété : Image à travers un miroir

On considère un objet réel A situé à une distance d d'un miroir plan. L'objet A est considéré comme une source ponctuelle de lumière :



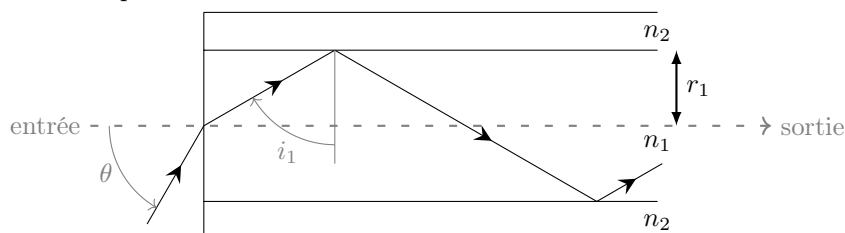
Le faisceau de rayon réfléchi est divergent. Le miroir produit donc une **image virtuelle** située à l'intersection du prolongement des rayons réfléchis.

D'après la loi de Snell-Descartes de la réflexion, l'image virtuelle A' est le symétrique de l'objet réel A par rapport au plan du miroir.

5 La fibre à saut d'indice

Définition : Présentation

La fibre à saut d'indice est constituée d'une cœur cylindrique transparent de rayon r_1 et d'indice n_1 entouré par une gaine coaxiale également transparente, de rayon r_2 et d'indice n_2 . Le but de la fibre optique est de guider les rayons lumineux tout en minimisant les pertes.



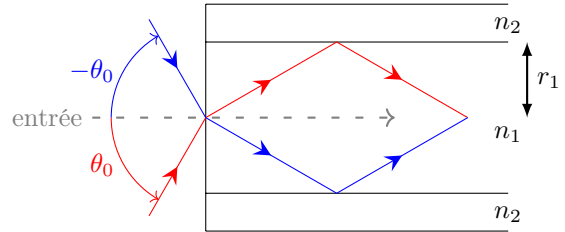
Pour une utilisation optimale

- il faut que les rayons à l'entrée de la fibre soit inclu dans un **cône d'acceptance** ;

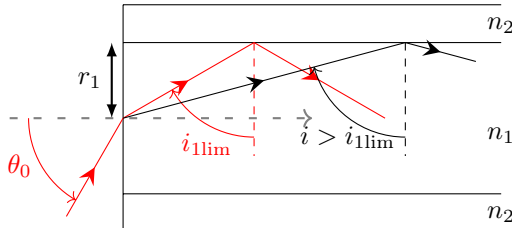
- la **dispersion intermodale** ne brouille pas le signal.

Propriété : Cône d'acceptance

Le cône d'acceptance est caractérisé par le demi-angle θ_0 au sommet tel que tous les rayons qui sont contenu dans ce cône traverse la fibre sans perte.



Condition de propagation :



à l'interface gaine-cœur :

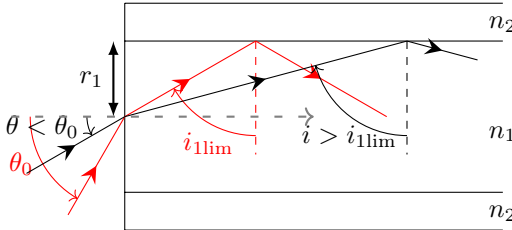
$$n_1 \sin i_{1\text{lim}} = n_2 \implies i_{1\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

De cette manière on obtient la condition sur i_1 :

$$i_1 > i_{1\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

On définit θ_0 à partir de la condition de réflexion totale

Condition sur θ :



Cherchons d'abord une relation entre θ_0 et $i_{1\text{lim}}$:

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{1\text{lim}}\right)$$

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \cos(i_{1\text{lim}})$$

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sqrt{1 - \sin^2(i_{1\text{lim}})}$$

En utilisant la condition de réflexion totale on obtient :

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \implies \theta_0 = \arcsin\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$$

Et on a alors la condition : $\theta < \theta_0$ à partir de $i > i_{1\text{lim}}$.

Propriété : Dispersion intermodale

La dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice est définie par la différence de temps de parcours de la fibre entre le rayon le plus lent et le rayon le plus rapide :

$$\Delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}}$$

Le rayon le plus rapide correspond au rayon parcourant la distance la plus courte. C'est le rayon entrant dans la fibre avec un angle $\theta = 0$. Son temps de trajet est tout simplement

$$t_{\text{min}} = \frac{L}{v_1} = \frac{n_1 L}{c}$$

Le rayon le plus lent correspond au rayon parcourant la distance la plus longue. C'est le rayon faisant un angle θ_0 avec l'axe de la fibre. Son temps de trajet est

$$t_{\text{max}} = \frac{l}{v_1} = \frac{n_1 l}{c}$$

avec l la distance parcouru par le rayon. On a

$$l = \frac{L}{\sin i_{1\text{max}}} = \frac{n_1 L}{n_2} \implies t_{\text{max}} = \frac{n_1^2 L}{n_2 c}$$

On obtient alors l'expression de la dispersion modale :

$$\Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)$$

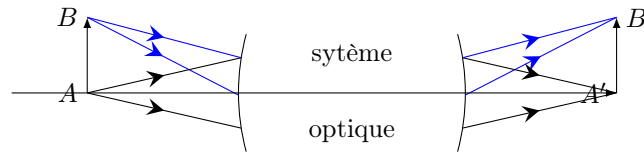
Si la dispersion modale est trop importante on peut perdre de l'information lors de la transmission de signaux.

Ondes 2 : Formation des images

1 Notion d'objet et d'image :

Definition : Stigmatisme/Aplanétisme

On considère un système optique (S) centré. On place un objet réel AB tel que A est situé sur l'axe optique et AB est orthogonal à l'axe optique.



Le système optique (S) est dit :

- **stigmatique** si tous les rayons issus de A passent par A' après avoir été déviés par le système optique.
- **aplanétique** si l'image $A'B'$ est elle aussi orthogonale à l'axe optique.

De cette manière pour déterminer la position de A' on doit déterminer de B' puis A' est la projection de B' sur l'axe optique.

Propriété : Miroir plan

Le miroir plan est le seul système optique rigoureusement stigmatique et aplanétique.

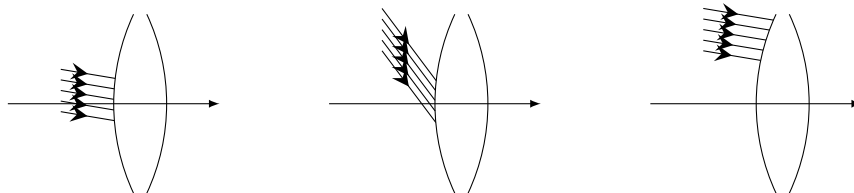
Conditions de Gauss

En pratique les systèmes ne sont jamais parfaitement stigmatique et aplanétiques. Pour permettre d'avoir un stigmatisme approché et un aplanétisme approché on se place dans les conditions de Gauss :

- Les rayons sont proches de l'axe optique ;
- L'angle entre les rayons et l'axe optique est faible.

Dans ces conditions on parle de rayons paraxiaux.

Si un système optique est utilisé dans les conditions de Gauss, il peut être considéré comme stigmatique et aplanétique.



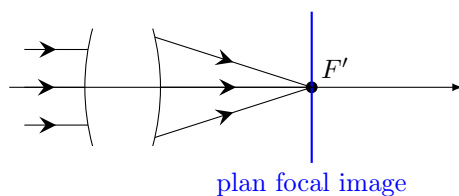
2 Les lentilles minces

Definition : Lentille mince

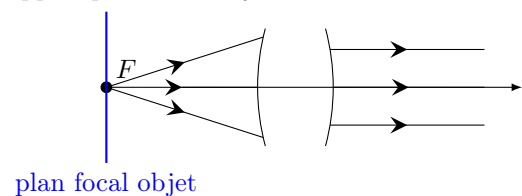
Une lentille sphérique est un milieu transparent, homogène et isotrope limité par deux dioptrés sphériques. Les lentilles convergentes sont les lentilles à bords fin.

Propriété : Foyers

On appelle **foyer image** F' , l'image à travers (S) d'un objet situé sur l'axe optique à l'infini. Le plan orthogonal à l'axe passant par F' est appelé plan focal image.

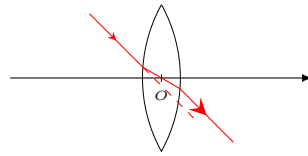


On appelle **foyer objet** F , le point situé sur l'axe optique dont l'image à travers (S) est située à l'infini sur l'axe optique. Le plan orthogonal à l'axe optique passant par F est appelé plan focal objet.



Propriété : Centre optique

On définit le centre optique comme le point par lequel passe tous les rayons qui ressortent de la lentille sans déviation.



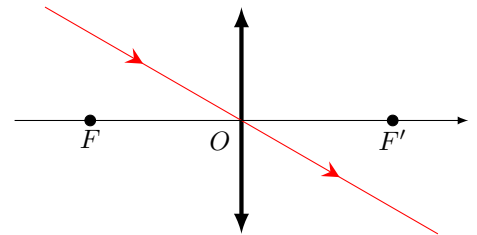
Propriété : Modélisation d'une lentille convergente

On schématise les lentilles convergentes comme ceci, et dans les conditions de Gauss on suppose que le rayon émergent passant par le centre optique est dans le prolongement du rayon incident.

La lentille possède un foyer image F' et un foyer objet F . On définit la distance focale objet f et la distance focale image f' comme :

$$f = \overline{OF} < 0 \text{ m} \qquad f + f' = 0 \text{ m}$$

$$f' = \overline{OF'} > 0 \text{ m}$$



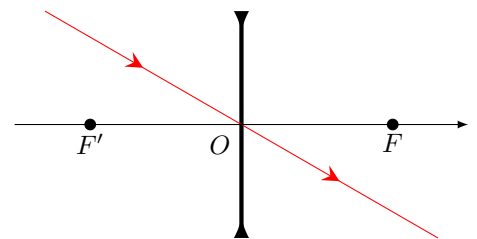
Propriété : Modélisation d'une lentille divergente

On schématise les lentilles divergentes comme ceci, et dans les conditions de Gauss on suppose que le rayon émergent passant par le centre optique est dans le prolongement du rayon incident.

La lentille possède un foyer image F' et un foyer objet F . On définit la distance focale objet f et la distance focale image f' comme :

$$f = \overline{OF} > 0 \text{ m} \qquad f + f' = 0 \text{ m}$$

$$f' = \overline{OF'} < 0 \text{ m}$$



Definition : La vergence

La vergence : est définie comme l'inverse de la distance focale image, elle s'exprime en dioptrie notée δ homogène à l'inverse d'une longueur.

$$V = \frac{1}{f'}$$

Formules de conjugaisons

On peut retrouver géométriquement les relations :

Formule de Newton : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 = -f^2$

Formule de Descartes : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$

Definition : Grandissement

Pour un objet étendu AB on définit le grandissement comme le rapport de la mesure algébrique $\overline{A'B'}$ de l'image par la mesure algébrique \overline{AB} de l'objet :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

Si $|\gamma| > 1$ l'image est agrandie, si $\gamma > 0$ l'image est droite.

Méthode : Construction graphique des images

Pour obtenir l'image $A'B'$ d'un objet AB à travers une lentille (convergente ou divergente), on utilise trois rayons :

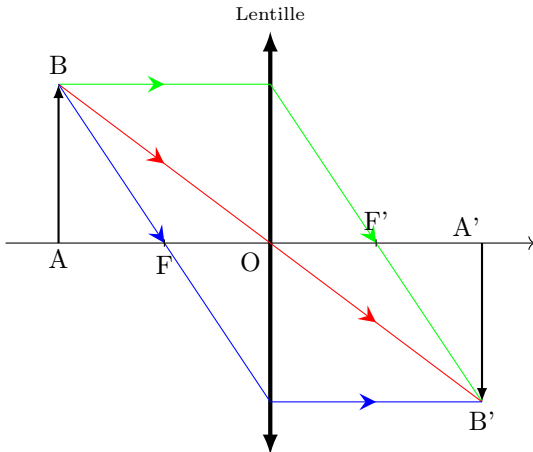
- Un rayon incident passant par B et O qui donne un rayon émergent passant par O et B' parallèle au rayon incident (pas dévié) ;
- Un rayon incident passant par B et parallèle à l'axe optique qui donne un rayon émergent passant par F' et B' ;

- Un rayon incident passant par B et F qui donne un rayon émergent passant par B' et parallèle à l'axe optique.

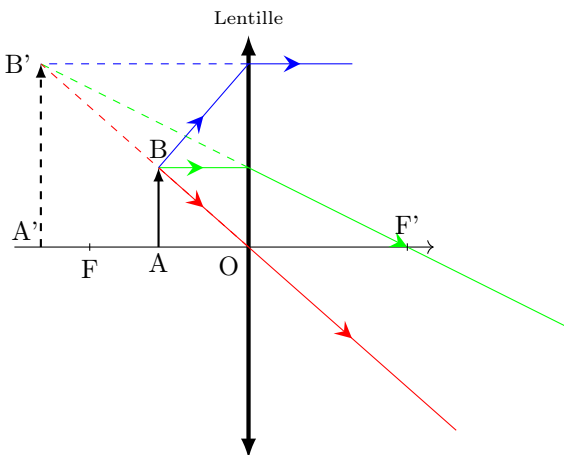
Deux rayons suffisent pour tracer B' , mais une infinité de rayons sont émis par B pour former l'image B' . A' est la projection de B' sur l'axe optique car le système est aplanétique.

Exemple :

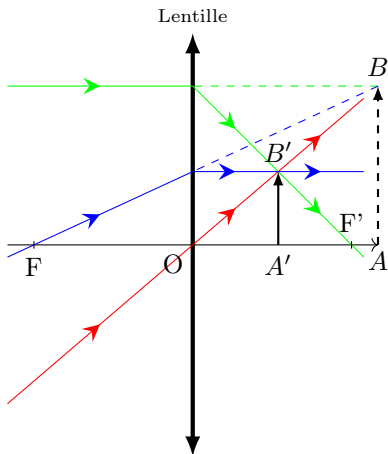
Cas 1 : AB est réel placé avant F d'une lentille convergente $\rightarrow A'B'$ réelle. Représenté ci-dessus.



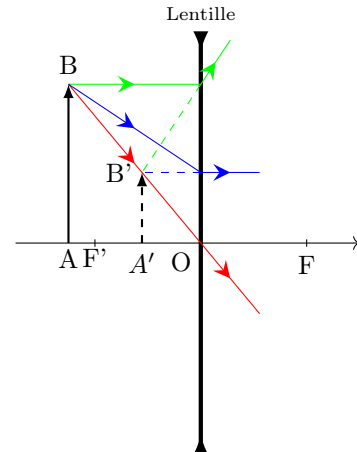
Cas 2 : AB est réel placé après F d'une lentille convergente $\rightarrow A'B'$ virtuelle.



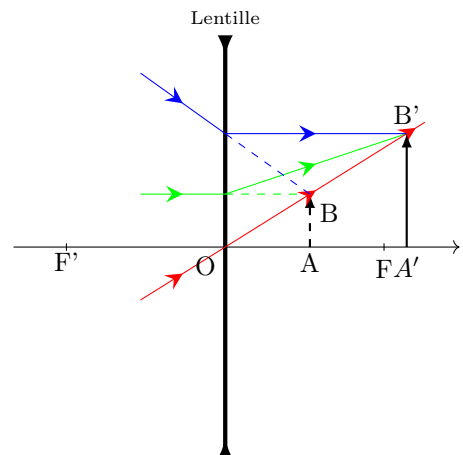
Cas 3 : AB est virtuel après O d'une lentille convergente $\rightarrow A'B'$ réelle.



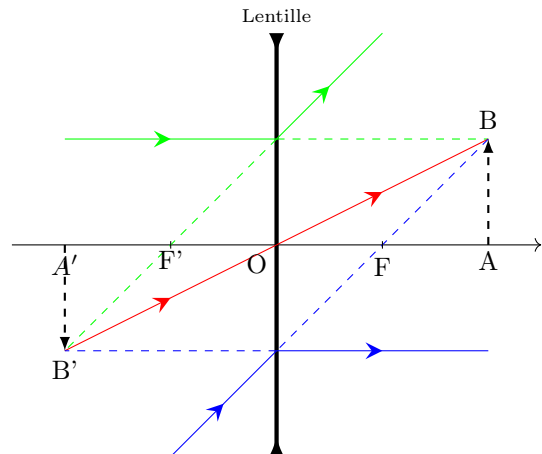
Cas 4 : AB est réel placé avant O d'une lentille divergente $\rightarrow A'B'$ virtuelle.



Cas 5 : AB est virtuel placé avant F d'une lentille divergente $\rightarrow A'B'$ réelle.



Cas 6 : AB est virtuel après F d'une lentille divergente $\rightarrow A'B'$ virtuelle.



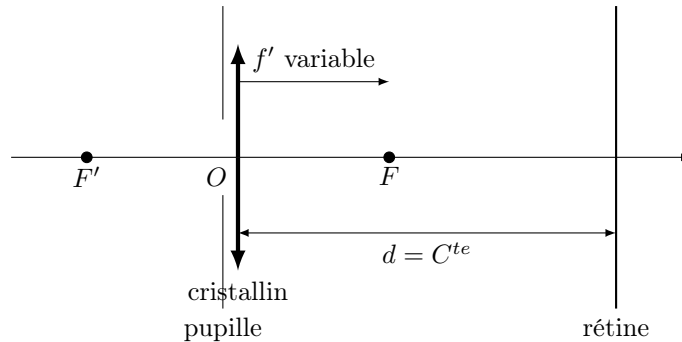
3 L'œil

Definition : Modélisation

L'œil est composé de différentes parties :

- L'iris composé d'une pupille dont le diamètre est variable (de 2 mm à 8 mm) \iff diaphragme ;
- Le cristallin est assimilable à une lentille convergente de distance focale image variable ;
- La rétine est constituée de cellules sensible à la lumière (cônes et bâtonnets) \iff Ecran.

On modélise l'œil par une lentille mince convergente variable formant une image sur un écran fixe :

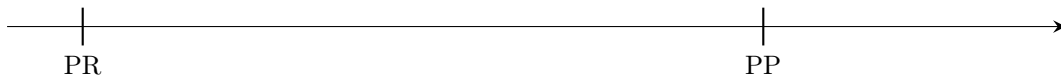


Propriété : Plage d'acomodation

On définit la plage d'acomodation comme la zone de l'espace ou l'oeil peut accomoder pour former une image nette. La plage d'acomodation est située entre :

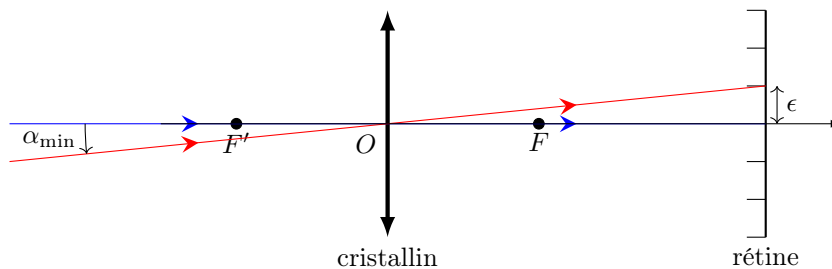
- Le Punctum Remotum (PR) le point le plus loin que l'on peut voir net au repos ($f' = f'_{max}$) ;
- Le punctum proximum (PP) le point le plus proche que l'on peut voir net en accomodant ($f' = f'_{min}$).

accomoder = faire diminuer la distance focale de l'oeil. au repos = distance focale maximale.



Propriété : Limite de résolution angulaire

La rétine est composée de cellules qui permettent de détecter l'intensité lumineuse ainsi que la couleur. Ces cellules possèdent une taille caractéristique qu'on nomme ϵ . Si deux images se forment sur la même cellules, elle superpose celles-ci, donc pour distinguer deux images il faut qu'elles se forment sur deux cellules différentes et qu'elles soient distante de ϵ au minimum et donc les rayons arrivant dans l'œil doivent arriver avec un angle minimum entre eux. Ceci constitue la limite de résolution angulaire.

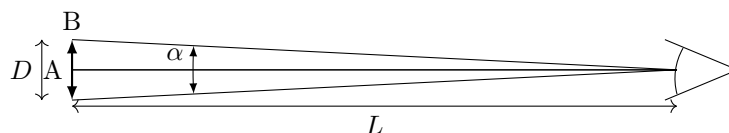


Remarque : Ordre de grandeur

Pour un oeil normal, le PR est situé à l'infini et le PP à environs 25 cm pour un adulte. Dans de bonnes conditions d'éclairément (ni trop sombre, ni trop lumineux), l'œil distingue des détails d'environ 1 minute d'arc, soit 3×10^{-4} rad.

Definition : Diamètre apparent

On définit le diamètre apparent d'un objet de diamètre D situé à une distance L comme l'angle α sous lequel on voit l'objet :



Propriété : Le grossissement

On définit le grossissement G comme :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

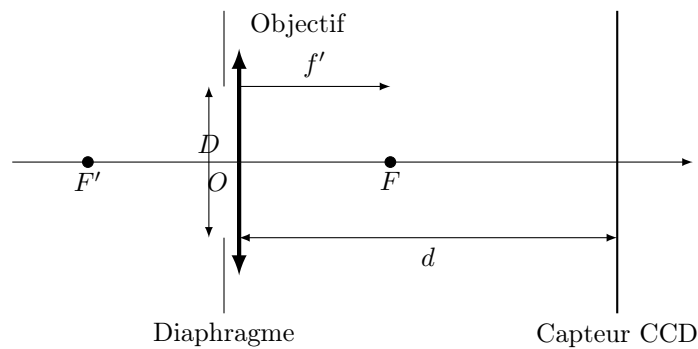
avec α' le diamètre apparent de l'image vu par l'œil à travers un instrument d'optique, et α le diamètre apparent de l'objet vu directement par l'œil.

4 L'appareil photo

Definition : Modélisation

Un appareil photo est constitué :

- D'un objectif, modélisé par une lentille convergente de distance focale f' ;
- D'un diaphragme, ouverture de forme circulaire de diamètre D réglable situé juste devant la lentille ;
- D'un capteur CCD modélisé par un écran situé à une distance d réglable de la lentille.



Propriété : Mise au point

Pour obtenir une image nette d'un point A donné, il faut que l'image A' soit située sur le capteur. La distance d doit alors respecter

$$\overline{OA'} = d$$

Exemple : Mise au point à l'infini

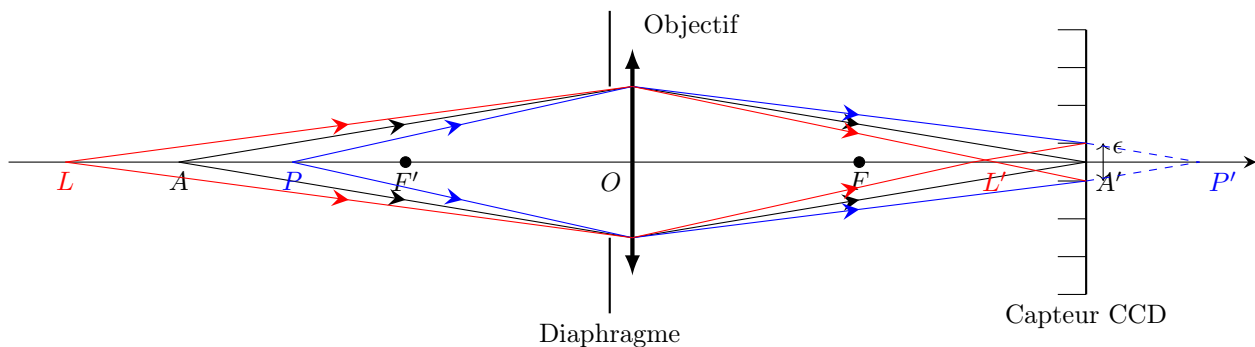
Pour un appareil photo avec un objectif de focale f' , lors d'une mise au point sur un objet situé à l'infini. La distance d entre l'objectif et le capteur doit valoir

$$d = f'$$

Propriété : Profondeur de champ

Le capteur d'un appareil photo possède des cellules de taille ϵ qui renvoie la même image que l'image formée sur la cellule soit ponctuelle ou sous forme de tâche lumineuse.

On en déduit que pour un réglage donné tel que $d = \overline{OA'}$ pour faire la mise au point d'un point objet A . On peut observer un point P plus proche et un point L plus loin tel que les faisceaux lumineux entrant dans l'objectif et convergant en P' et L' forment une tâche lumineuse sur le capteur de diamètre inférieur à ϵ .



On peut alors voir net sur l'image renvoyée par le capteur l'ensemble des objet situés entre P et L ce qui constitue la profondeur de champ de l'appareil. Plus le diaphragme est ouvert, plus la profondeur de champ est réduite.

5 Instrument afocal :

Definition : Instrument afocal

Un système afocal ne possède pas de foyer, ceux-ci sont positionné en l'infini. Les instruments afocaux permettent d'observer des objets situés à l'infini avec un œil normal sans accommoder.

Propriété : Modélisation

On cherchera souvent à modéliser un instrument afocal comme l'association de 2 lentilles :

- Un objectif de focale f'_1 qui est la lentille la plus proche de l'objet.
- Un oculaire de focale f'_2 qui est la lentille derrière laquelle on vient positionner notre œil.

Propriété : Image intermédiaire

L'objectif forme une première image d'un objet AB à observer. L'objet situé à l'infini est noté $A_\infty B_\infty$ et forme une image à travers l'objectif notée $A_1 B_1$ appelée image intermédiaire et située dans le plan focal image de l'objectif.

Cette image est l'objet de vis à vis de l'oculaire qui doit former une image à l'infini notée $A'_\infty B'_\infty$ pour être vue sans accommoder. L'image intermédiaire est donc également dans le plan focal objet de l'oculaire.

$$A_\infty B_\infty \xrightarrow{\text{Objectif : } A_1 = F'_1} A_1 B_1 \xrightarrow{\text{Oculaire : } A_1 = F_2} A'_\infty B'_\infty$$

Propriété : Distance entre les lentilles

On désigne par $\Delta = \overline{O_1 O_2}$ la distance entre l'objectif de focale f'_1 et l'oculaire de focale f'_2 . D'après la définition de l'image intermédiaire pour un système afocale on a forcément :

$$\Delta = f'_1 + f'_2$$

Exemple : La lunette astronomique

La lunette est composée d'une lentille convergente L_1 de distance focale $f'_1 = 60$ cm qui sert d'objectif. Ainsi que d'une lentille divergente L_2 de distance focale $f'_2 = -5$ cm qui sert d'oculaire.

$$A_\infty B_\infty \longrightarrow A_1 B_1 \longrightarrow A'_\infty B'_\infty$$

Etude de l'oculaire : Pour que $A'_\infty B'_\infty$ soit situé à l'infini, il faut que $A_1 = F_2$ le foyer objet de la lentille L_2 .

Etude de l'objectif : Or si $A_\infty B_\infty$ est à l'infini, alors $A_1 = F'_1$ le foyer image de la lentille L_1 . On a alors $F'_1 = F_2 = A_1$ le foyer objet de l'oculaire est confondu avec le foyer objet de l'objectif.

Pour tous les systèmes afocaux on a le foyer image de l'objectif F'_{ob} qui est confondu avec le foyer image de l'oculaire F_{oc} .

La grossissement vaut $G = -\frac{f'_1}{f'_2}$ positif donc image droite.

Les rayons incidents de l'objectif sont parallèles avec un diamètre apparent de l'objet α . Ils sont ensuite déviés par L_1 et convergent vers B_1 l'image intermédiaire. Avant de converger, ils sont déviés par L_2 et les rayons émergents sont parallèles et le diamètre apparent de l'image est α' .

On peut calculer le grossissement angulaire : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$

$$\alpha' \text{ est le diamètre apparent de l'image } \tan \alpha' = \frac{A_1 B_1}{O_2 A_1} = \frac{A_1 B_1}{-f'_2}$$

Dans les conditions de Gauss : $\alpha' \ll 1 \implies \tan \alpha' \approx \alpha'$

$$\alpha \text{ est le diamètre apparent de l'objet } \tan \alpha = \frac{A_1 B_1}{O_1 A_1} = \frac{A_1 B_1}{f'_1}$$

Dans les conditions de Gauss : $\alpha \ll 1 \implies \tan \alpha \approx \alpha$

On a alors : $G = \frac{-f'_1}{f'_2} = 12$ l'image est droite.

Ondes 3 : Propagation d'un signal

1 Notion d'onde

Definition : Onde

Un signal est la variation temporelle et/ou spatiale d'une ou de plusieurs grandeurs physiques.

On appelle onde un phénomène physique dans lequel une perturbation locale se déplace dans l'espace sans qu'il y ait de déplacement de matière en moyenne. Toute grandeur physique, nulle dans l'état de repos et apparaissant avec la perturbation, est appelée signal physique transporté par l'onde.

Definition : Célérité d'une onde

On appelle célérité d'une onde sa vitesse de propagation.

Remarque : Grandeurs physiques

- Onde acoustiques : vitesse-masse volumique ;
- Onde électromagnétique : Champ électrique-Champ magnétique ;
- Onde électrique : tension-intensité du courant.

Definition : Milieu dispersif/non-dispersif

On définit un milieu non-dispersif comme un milieu où toutes les ondes se propagent à la même vitesse.

Par opposition, on définit un milieu dispersif comme un milieu où la vitesse de propagation des ondes dépend de la fréquence. De cette manière une onde composée de plusieurs fréquence va se "dispenser".

Definition : Onde progressive 1D

On définit une onde progressive comme une onde se propageant sans transport de matière selon une direction \vec{u}_x dans un milieu :

- non dispersif : les ondes ne se déforment pas ;
- non dissipatif : l'amplitude de l'onde est constante.

On peut alors modéliser l'enveloppe de l'onde par une fonction f ou g tel que :

- Pour une onde $s_+(x, t)$ se propageant dans le sens des x croissants :

$$s_+(x, t) = f(x - ct) \text{ ou } s_+(x, t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

- Pour une onde $s_-(x, t)$ se propageant dans le sens des x décroissants :

$$s_-(x, t) = f(x + ct) \text{ ou } s_-(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où c la célérité de l'onde.

Propriété : retard temporel

Si on considère un signal émis en O se déplaçant dans le sens des x croissants. On mesure le signal en M et en N on trace respectivement :

- $s_O(t) = s(x = 0, t)$;
- $s_M(t) = s(x = x_M, t)$;
- $s_N(t) = s(x = x_N, t)$.



avec τ_M et τ_N le temps de propagation de l'onde de O vers M puis N . On a alors la relation :

$$s_M(t) = s_O(t - \tau_M) \quad \text{et} \quad s_N(t) = s_O(t - \tau_N) \quad \text{donc} \quad s(x, t) = s_O(t - \tau(x))$$

Comme l'onde se propage dans le sens des x croissants on peut poser :

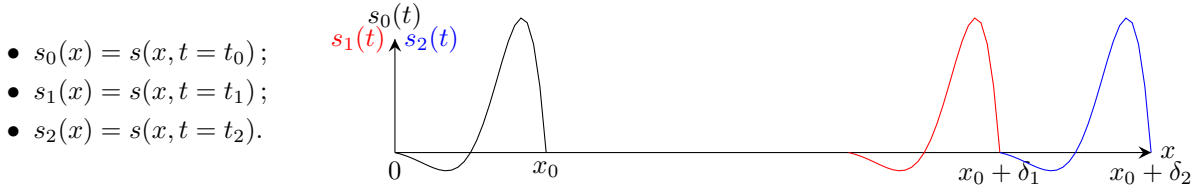
$$\tau(x) = \frac{x}{c}$$

Pour une onde qui se propage dans le sens des x décroissants on peut poser :

$$\tau(x) = -\frac{x}{c}$$

Propriété : Déplacement spatial

Si on considère un signal émis en O se déplaçant dans le sens des x croissants. On prend une "photo" de l'onde à l'instant t_0 , puis $t_1 > t_0$ et $t_2 > t_1$:



avec x_0 la position où le début du signal est reçu à l'instant t_0 , δ_1 et δ_2 les déplacements de l'onde par rapport à l'instant t_0 aux instants t_0 , t_1 et t_2 . On a alors la relation :

$$s_1(x) = s_0(x - \delta_1) \quad \text{et} \quad s_2(x) = s_0(x - \delta_2) \quad \text{donc} \quad s(x, t) = s_0(x - \delta(t))$$

Comme l'onde se propage dans le sens des x croissants on peut poser :

$$\delta(t) = +c(t - t_0)$$

Pour une onde qui se propage dans le sens des x décroissants on peut poser :

$$\delta(t) = -c(t - t_0)$$

2 Ondes progressives harmoniques :

Definition : Onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive sinusoïdale de pulsation temporelle ω se propageant dans le sens des x croissants avec la vitesse c a pour expression :

$$s(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

avec k le vecteur d'onde (pulsation spatiale) tel que :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma \quad \sigma \text{ est le nombre d'onde (fréquence spatiale)}$$

Propriété : Vitesse de phase

La célérité d'une onde progressive harmonique est appelée vitesse de phase et s'exprime en fonction de ω et k ou f et λ :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \lambda f$$

avec f la fréquence de l'onde et λ sa longueur d'onde.

Propriété : Déphasage entre les signaux en deux points

Si on considère une onde émise en O et qui se propage dans le sens des x croissants telle que :

$$s(x = 0, t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \implies s(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx) = A_0 \cos(\omega t + \varphi(x))$$

avec $\varphi(x) = -kx + \varphi_0$ le déphasage de l'onde en x par rapport à l'onde émise en O à l'instant t .

Alors le déphasage entre $s_1(t)$ l'onde reçue en x_1 et $s_2(t)$ l'onde reçue en x_2 vaut :

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = -k(x_1 - x_2) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2)$$

Propriété : Signaux en phase / en opposition de phase

- Si le déphasage vaut $m \times 2\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ alors les signaux sont en phase ;
- Si le déphasage vaut $\left(m + \frac{1}{2}\right)$ avec $m \in \mathbb{Z}$ alors les signaux sont en opposition de phase.

Remarque : Ordre de grandeur de fréquences

- Ondes acoustiques audibles : $f = 20 \text{ Hz}$ à $20 \times 10^3 \text{ Hz}$;
- Ondes électromagnétiques téléphoniques : $f = 900 \text{ MHz}$ à 2100 MHz ;
- Ondes électromagnétiques wifi : $f = 2,4 \text{ GHz}$ à 5 GHz ;
- Ondes électromagnétiques EDF : $f = 50 \text{ Hz}$;
- Ondes optiques visibles : $f \sim 500 \text{ THz}$.

Exemple : Milieu dispersif

- La propagation d'ondes élastiques transversales dans un solide lorsque la longueur d'onde est grande devant la dimension transversale du milieu :

$$v_{\varphi}(k) = \alpha k \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

- La propagation d'ondes à la surface de l'eau : $v_{\varphi}(k) = \sqrt{\frac{g}{k}}$
- La propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu matériel (verre) : $v_{\varphi}(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)} < c$

Exemple : Milieu non dispersif

- La propagation d'ondes acoustiques dans un fluide : $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$
- La propagation des ondes élastiques longitudinales dans un solide : $c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$
- La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide : $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3 Phénomène d'interférences

Definition : Interférences

Lorsque deux ondes de même nature se propagent dans une zone de l'espace, elles s'additionnent en tout point et à chaque instant. Lorsque l'onde résultante a une amplitude modulée dans l'espace. On a alors un phénomène d'interférences.

Les conditions d'interférences sont :

- Ondes de même nature ;
- Ondes harmoniques ;
- Ondes de même fréquence.

Definition : Interférences constructives / destructives

La superposition de deux ondes harmoniques qui interfèrent ensemble est une onde harmonique de même fréquence et d'amplitude $A(M)$ qui dépend du point M où on observe l'onde.

On dit que les interférences sont constructives aux points M où l'amplitude de l'onde résultante est maximale.

$$A(M) = A_{\max}$$

On dit que les interférences sont destructives aux points où l'amplitude de l'onde résultante est minimale.

$$A(M) = A_{\min}$$

Propriété : Somme de deux ondes harmoniques

On considère deux ondes harmoniques de même fréquence qu'on note émis en x_1 et x_2 :

$$s_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1(x)) \quad \text{et} \quad s_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2(x))$$

On peut montrer que :

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi(x)) \quad \text{avec} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))}$$

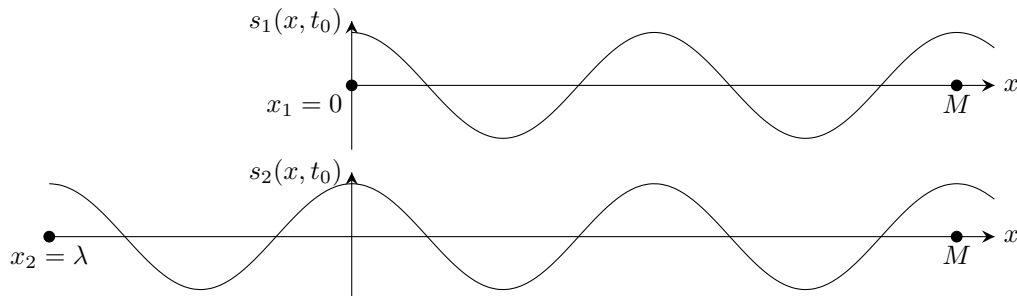
Avec $\varphi_1(x) = -k(x - x_1)$ et $\varphi_2(x) = -k(x - x_2)$, on a alors :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}\right]}$$

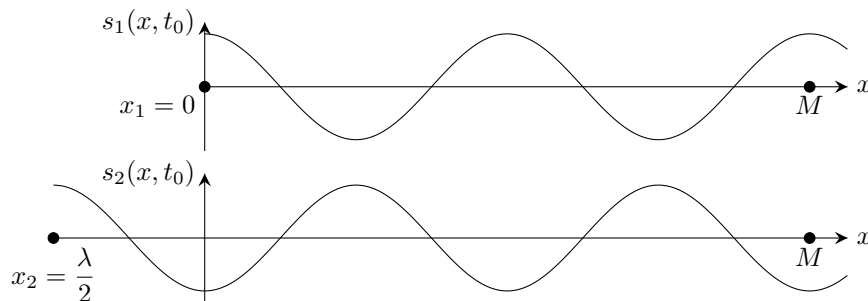
Propriété : déphasage et interférences

On montre alors que pour que les interférences soient :

- constructives : $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = m \times 2\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ soit $A_{\max} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$;



- destructives : $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times 2\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ soit $A_{\min} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$.



4 Interférences lumineuses

Propriété : Ondes cohérentes

Dans le domaine de l'optique on dit que deux ondes peuvent produire une figure d'interférence elles sont cohérentes. La particularité des ondes lumineuse est que les récepteurs (capteur ou œil) sont sensible à l'intensité lumineuse :

$$I(M) = K \langle s^2(M, t) \rangle = \frac{1}{2} K A^2(M)$$

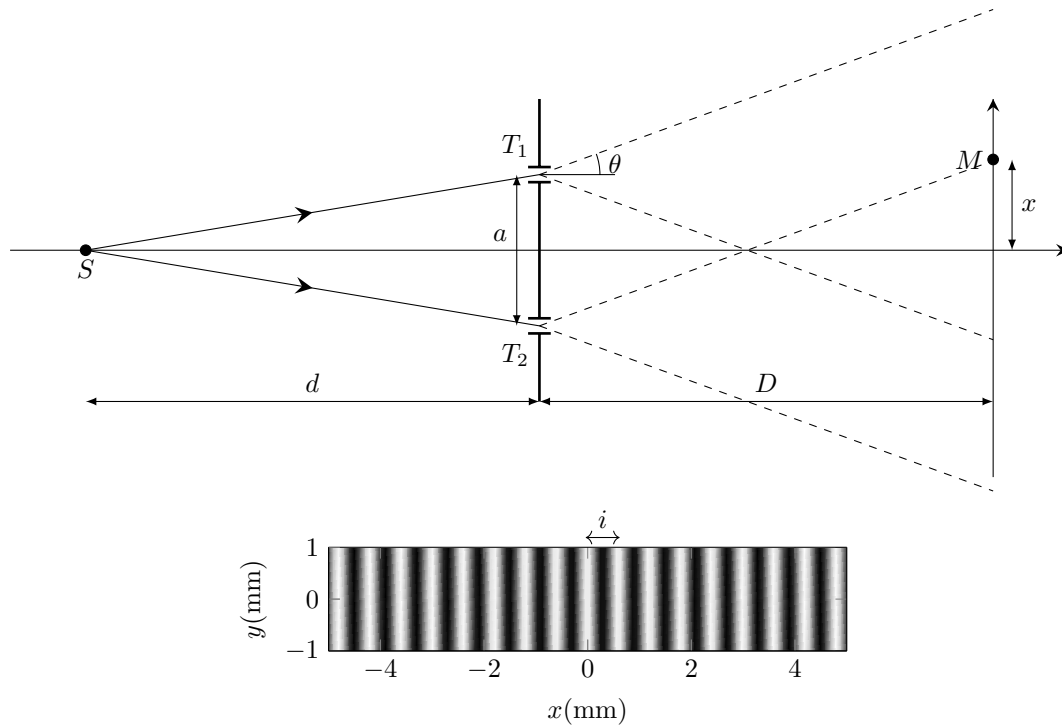
pour une onde harmonique lumineuse.

Définition : Dispositif des trous de Young

Le dispositif de l'expérience représenté sur la figure suivante comporte :

- Une source ponctuelle S monochromatique émettant une onde de longueur d'onde λ_0 dans le vide ;
- Un écran opaque percé de deux trous S_1 et S_2 identiques de diamètre très petit (de l'ordre de 0,1 nm) dont la distance $a = S_1S_2$ est de l'ordre du millimètre ;
- Un écran de projection parallèle à S_1S_2 placé à une distance D des trous ; D est de l'ordre du mètre.

La lumière émise par S arrive en un point M de l'écran en passant soit par le trou S_1 , soit par le trou S_2 . Ceci nécessite une déviation de la lumière au niveau de chaque trou rendue possible par le phénomène de diffraction provoqué par la très petite taille des trous. Ainsi, les trous de Young se comportent comme des sources ponctuelles appelées sources secondaires.



Definition : Chemin optique

On définit le chemin optique (OM) comme la distance parcouru par une onde lumineuse dans le vide pendant la durée du trajet de l'onde a O à M dans le milieu d'indice n .

On calcule le chemin optique en multipliant la longueur parcouru par une onde depuis sa source multiplié par l'indice n du milieu traversé, soit :

$$(OM) = ct_{OM} = \frac{c}{v_\varphi} OM = nOM$$

Propriété : Différence de marche et interférences

On définit la différence de marche comme la différence de chemin optique entre deux ondes qui interfèrent au point M . Sur le dispositif des trous de Young, on compare un rayon provenant de la source S et passant par S_1 jusqu'en M à un rayon provenant de S et passant par S_2 jusqu'en M :

$$\delta(M) = (SM)_1 - (SM)_2 = [(SS_1) + (S_1M)] - [(SS_2) + (S_2M)] = (S_1M) - (S_2M)$$

On a alors la relation avec le déphasage :

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

On en déduit alors les conditions d'interférence :

- constructive si $\delta(M) = m \times \lambda_0$;
- destructive si $\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda_0$.

On retient la formule de Fresnel :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_2 I_1} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)$$

Exemple : Application

Calculons la différence de marche pour le dispositif des trous de Young :

$$(S_1M) = n\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \quad \text{et} \quad (S_2M) = n\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

En sachant que $D \gg x$ et $D \gg y$:

$$(S_1M) \simeq nD + n \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D} \quad \text{et} \quad (S_2M) \simeq nD + n \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D}$$

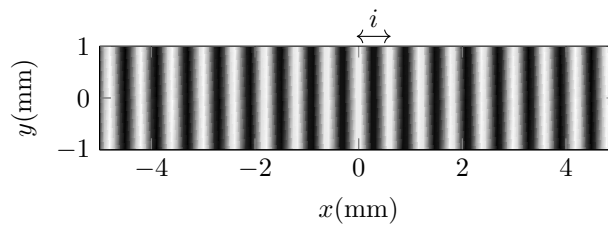
Soit $\delta(x) \simeq \frac{na x}{D}$.

On en déduit alors les positions x_m franges d'interférences constructives :

$$\delta(x_m) = \frac{na x_m}{D} = m \times \lambda_0 \implies x_m = \frac{m \lambda_0 D}{na}$$

On peut en déduire l'interfrange, la distance entre deux franges lumineuse de maximum d'intensité.

$$i = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda_0 D}{na}$$



Ondes 4 : Introduction à la mécanique quantique

1 Introduction :

Remarque : État des lieux de la physique début du XX^e

Au début du 20^e siècle, la physique classique est dominée par deux théories : la mécanique newtonienne et l'électromagnétisme de Maxwell. Ces théories sont déterministes : à partir d'équations dynamiques (équations différentielles) et étant données des conditions initiales, elles permettent de prévoir l'évolution exacte de systèmes étudiés.

Remarque : deux objets d'études dans l'univers

On distingue alors dans l'univers deux catégories d'objets : la matière et le rayonnement.

- La matière est faite de corpuscules parfaitement localisables ; les lois de la mécanique permettent de prévoir leur trajectoire, leur vitesse. On utilise notamment la seconde loi de Newton $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ où \vec{F} est la résultante des forces appliquées sur la particule et $\vec{p} = m\vec{v}$ sa quantité de mouvement.
- Le rayonnement suit les lois de Maxwell (énoncées en 1855) ; ses variables dynamiques sont les composantes en chaque point de l'espace des champs électrique et magnétique. Il présente un caractère ondulatoire qui se manifeste par les phénomènes de diffraction et d'interférences (Chapitre 2).
À cette époque, suite aux expériences d'interférences lumineuses de Thomas Young, on est persuadé que la lumière est une onde.

Remarque : Limites des théories classiques

Il reste cependant un certain nombre d'expériences inexplicables avec les théories classiques. On peut citer l'effet photoélectrique, le spectre du rayonnement d'un corps noir, ...

La volonté d'expliquer ces observations va bouleverser les concepts et donner naissance entre autre à la mécanique quantique.

2 Dualité onde-particule :

Definition : Notion de photon

Le photon est l'objet qui décrit le rayonnement électromagnétique. Il a :

- un aspect ondulatoire, caractérisé par une fréquence ν (ou pulsation ω) et une longueur d'onde λ (ou vecteur d'onde k) ;
- un aspect corpusculaire, caractérisé par une énergie E_V et une quantité de mouvement (ou impulsion) p .

Les relations qui relient la description corpusculaire à la description ondulatoire sont appelées relations de Planck-Einstein. En fonction du phénomène observé, on peut considérer la lumière comme une onde, ou comme un faisceau de photon.

Propriété : Énergie d'un photon

On relie l'énergie d'un photon à la fréquence ν (ou pulsation ω) du rayonnement électromagnétique associée par la relation :

$$E_V = h \times \nu \quad \text{ou} \quad E_V = \hbar \times \omega$$

avec $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck, et $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck réduite.

Propriété : Quantité de mouvement ou impulsion d'un photon

On relie la quantité de mouvement (ou impulsion) p d'un photon à sa longueur d'onde λ (ou son vecteur d'onde k) par la relation :

$$p = \frac{E_V}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \text{ou} \quad p = \frac{E_V}{c} = \hbar k$$

avec $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck, et $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck réduite.

Definition : L'effet photoélectrique

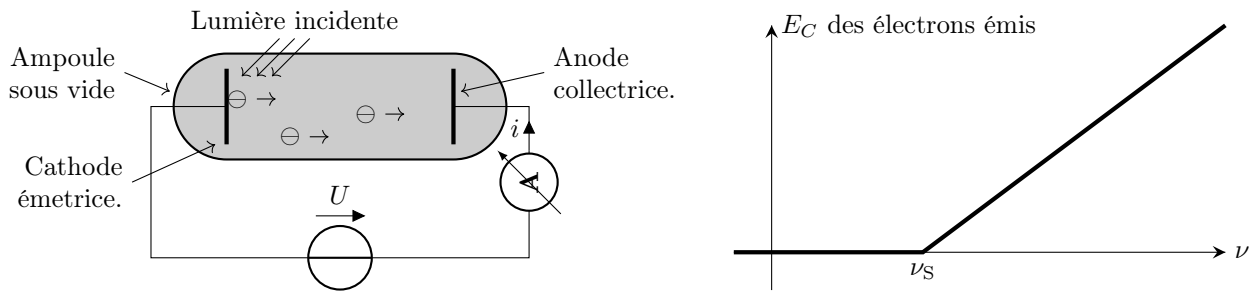
L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par un métal lorsqu'il est éclairé par un rayonnement du domaine visible ou ultraviolet.

L'expérience de Lenard de 1902 : composée de deux électrodes dans une ampoule sous vide. La cathode est éclairée par un rayonnement de fréquence ν . Si des électrons sont émis par la cathode, ils sont collectés par l'anode et un ampèremètre mesure l'intensité du courant. Un générateur de tension idéal impose une différence de potentiel $U = V_a - V_c$ entre l'anode et la cathode.

Le phénomène présente deux particularités remarquables :

- il n'apparaît qu'au-delà du fréquence seuil ν_S qui dépend de la nature du métal.
- pour $\nu < \nu_S$ il n'y a pas effet photoélectrique quelque soit l'intensité lumineuse du rayonnement.
- pour $\nu > \nu_S$ l'effet photoélectrique s'annule (le courant s'annule) si on impose $U < U_a < 0$.

Si on considère système émetteur et collecteur d'électrons on peut mesurer l'énergie cinétique des électrons émis sous l'effet du rayonnement de fréquence ν :



Propriété : Interprétation quantique

En 1905, Albert Einstein propose une interprétation de l'effet photoélectrique en reprenant l'idée de Planck et en allant plus loin : il suppose que le rayonnement est constitué de particules de lumière nommées photons. Chaque photon véhicule une énergie E tel que :

$$E = h\nu \quad \text{avec la fréquence du rayonnement : } \nu$$

L'hypothèse d'Einstein pour l'effet photoélectrique est qu'un électron du métal ne peut absorber qu'un seul quantum de lumière (un seul photon). Il est alors arraché au métal si l'énergie du photon est supérieure au travail donc si : $h\nu > W_{ext}$. Entre 1905 et 1915 Robert Andrews Millikan réalisa plusieurs expériences qui aboutirent à une mesure de h compatible avec la valeur du rayonnement thermique.

Prix nobel d'Enstein en 1921 pour son interprétation de l'effet photoélectrique.

Définition : Onde de matière

À une particule de masse m et de quantité de mouvement \vec{p} , on associe une onde de matière de longueur d'onde λ et de fréquence ν .

Propriété : Longueur d'onde de de Broglie (1924)

Un corps matériel de quantité de mouvement p peut présenter un aspect ondulatoire :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

Propriété : Fréquence de l'onde de de Broglie

Un corps matériel d'énergie totale E peut présenter un aspect ondulatoire :

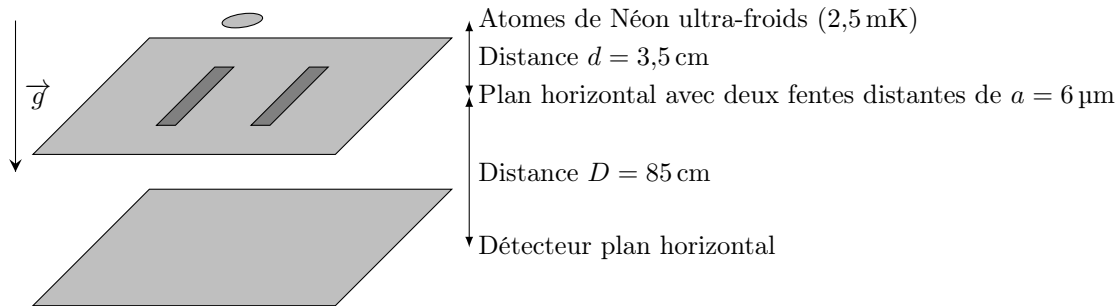
$$\nu_{DB} = \frac{E}{h}$$

Propriété : Interférences atomiques expérience de 1992

On utilise le dispositif décrit sommairement. Il utilise des atomes de Néon piégés et refroidis à une température de 2,5 mK. Ils sont alors libérés et tombent en chute libre et atteignent un écran percé de deux fentes avec une vitesse $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le piège est situé à une hauteur $l = 76 \text{ mm}$ au-dessus de deux fentes séparées d'une distance $a = 6 \mu\text{m}$. La longueur d'une fente est de $2 \mu\text{m}$. Un écran MPC (microchannel plate detector) est placé à une distance $D = 85 \text{ cm}$ de la double fente et

détecte les atomes de Néon avec une résolution de l'ordre de 20 μm . L'ensemble du dispositif est disposé verticalement.



La figure d'interférence obtenue en libérant les atomes du piège, est constituée d'environ 6000 impacts atomiques. Chaque impact est clairement identifié attestant du caractère corpusculaire des entités détectées mais l'ensemble des impacts dessine des franges d'interférences.

Confirmer que cette expérience permet de montrer la nature ondulatoire de l'atome.

Pourquoi faut-il refroidir les atomes ?

Calculer la longueur d'onde de de Broglie et l'interfrange de la figure d'interférences. Conclure sur la nécessité de refroidir.

3 Formalisme quantique

Remarque : Expérience d'interférence photon par photon

Reprenons l'expérience d'interférences lumineuses dite des fentes de Young évoquées en introduction en utilisant une source de photon unique. Le détecteur enregistre les impacts des photons qui reconstituent progressivement les franges d'interférence :

Les constats sont les suivants :

- Le point où les photon frappe l'écran est aléatoire. On peut juste définir une probabilité $p(M)$ de détection de la particule en M .
- l'accumulation des impacts reconstitue la figure d'interférences.

Remarque : Interprétation probabiliste

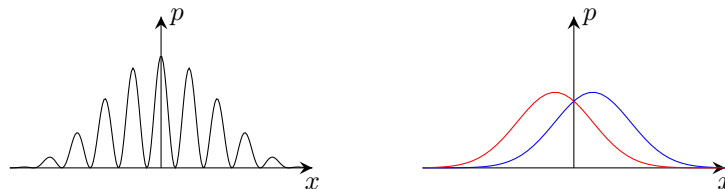
Le point M où le photon frappe l'écran est aléatoire. On peut juste définir une probabilité $p(M)$ de détection de la particule en M .

La particule peut à priori passer par la fente 1 ou par la fente 2. Le résultat observé peut être considéré comme la superposition des deux expériences réalisées avec uniquement la fente 1 ou uniquement la fente 2.

I on appelle $p_1(M)$ et $p_2(M)$ les probabilités de détecter le photon en M en présence d'une seule fente, on pourrait s'attendre à ce que les probabilités associées aux deux chemins s'ajoutent lorsque les deux fentes sont ouvertes. Or on constate que :

$$p(M) \neq p_1(M) + p_2(M)$$

Plus étonnant encore, il y a des points où la probabilité $p(M)$ est nulle alors que $p_1(M)$ et $p_2(M)$ ne sont pas nulles. Les particules semblent guidées par l'onde classique. C'est une manifestation de la dualité onde-corpuscule.



Definition : Fonction d'onde

On associe à une particule quantique une fonction mathématique appelée fonction d'onde $\underline{\psi}(M, t)$ dépendant des coordonnées d'espace et du temps. Cette fonction à valeur complexe contient toutes les informations relatives à l'état de la particule. On définit alors la probabilité de trouver une particule au point M à l'instant t :

$$p(M, t) = |\underline{\psi}(M, t)|^2$$

Propriété : Théorème de superposition

Si on note $\psi_1(M, t)$ la fonction d'onde de la particule lorsque seule la fente 1 est ouverte et $\psi_2(x, t)$ la fonction d'onde de la particule lorsque la fente 2 est ouverte.

La fonction d'onde de la particule dans l'expérience des fentes d'Young s'écrit :

$$\psi(M, t) = \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t)$$

La probabilité de détection de la particule est proportionnelle au module au carré de la fonction d'onde :

$$|\psi(M, t)|^2 = \psi(M, t)\psi^*(M, t) = (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1^* + \psi_2^*) = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2$$

Compléments : On ne peut pas savoir par quel trou la particule est passée. Si on essaie de faire la mesure, on perd la figure d'interférence. La mesure perturbe le système et donc on ne peut pas décrire à 100% le système. Soit on mesure la position finale des atomes, soit on mesure leurs trajectoires.

Definition : Indétermination quantique

L'indétermination quantique spatiale Δx correspond à la largeur typique (écart-type) de la densité de probabilité de présence $|\psi(x, t)|^2$.

Remarque :

Attention! $u(x) \neq \Delta x$, le premier dépend du protocole et des instruments de mesures, l'autre est intrinsèque.

Definition : Inégalité de Heisenberg

Les indéterminations quantiques sur la position x et la quantité de mouvement p_x suivant le même axe (Ox) vérifient l'inégalité de Heisenberg :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite. Cette relation est appelée principe d'indétermination de Heisenberg.

Propriété : Interprétation par la diffraction d'une particule

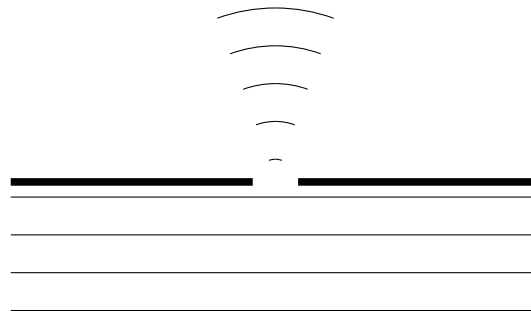
On considère une quantité de mouvement $\vec{p} = p\vec{u}_x$. La particule passe à travers une fente de largeur a et on place un détecteur tout de suite derrière la fente.

Le détecteur pourra détecter la particule avec une indétermination spatiale $\Delta x \sim a$ la largeur de la fente.

Après la fente, dû à la diffraction, la particule peut avoir sa quantité de mouvement \vec{p} orientation sera aléatoire mais contenu dans le cône de demi-angle au sommet θ tel que :

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{a}$$

En prenant $\lambda = \lambda_{dB} = \frac{h}{p}$ on a alors une indétermination sur la projection $\vec{p} \cdot \vec{u}_x$ soit $\Delta p_x \sim p \sin(\theta) = \frac{h}{a}$



On obtient alors : $\Delta x \Delta p_x \sim h$

4 Quantification de l'énergie

Definition : Modèle de Bohr

En 1913, Niels Bohr propose le premier modèle quantique de l'atome d'hydrogène afin d'expliquer l'existence de spectre de raies atomiques.

Le modèle de Bohr repose sur les hypothèses suivantes :

- hypothèse mécanique : quantification du moment cinétique de l'électron qui possède une trajectoire circulaire autour du noyau supposé fixe.

$$L_{O,n} = n\hbar \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

- hypothèse optique : l'électron passe d'une trajectoire circulaire à une autre en absorbant ou en émettant des énergie électromagnétique.

Expérimentalement, les longueurs d'ondes pour l'atome d'hydrogène vérifient :

$$\frac{1}{\lambda_{n,m}} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ avec } R_H = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \text{ est la constante de Rydberg}$$

Propriété : Rayon de Bohr

L'orbite de l'électron autour du noyau d'hydrogène est quantifié et peut prendre les valeurs :

$$r_n = n^2 a_B \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et } a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 52,9 \times 10^{-12} \text{ m le rayon de Bohr}$$

Démonstration : Rayon de Bohr

Système : $\{M(m_e)\}$ électron ponctuel.

Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

Bilan : $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ interaction coulombienne entre un électron et un proton.

PFD : $m_e \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{F}$ en projetant suivant $\vec{u}_r \Rightarrow -m_e r \dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}}$

On peut alors calculer le moment cinétique au centre de force O :

$$\overline{L_O(M)} = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \Rightarrow L_O = \sqrt{\frac{m_e e^2 r}{4\pi\epsilon_0}}$$

On applique alors l'hypothèse mécanique :

$$L_O = n\hbar \Leftrightarrow n^2 \hbar^2 = \frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow r_n = n^2 \times \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$$

Propriété : Quantification de l'énergie

L'énergie mécanique de l'électron est alors quantifiée et seules les valeurs suivantes sont permises :

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \times \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B} = -\frac{1}{n^2} \times \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$$

Démonstration : Niveaux d'énergie

On calcule l'énergie mécanique de l'électron :

$$E_m = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{L_O^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{n^2} \times \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B}$$

Propriété : Le photon comme quantum d'énergie

En utilisant le modèle du photon comme quantum d'énergie on obtient :

$$E_n - E_m = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{hc}{\lambda_{n,m}} \iff \frac{1}{\lambda_{n,m}} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

On obtient alors $R_{H,\text{th}} = 1,098 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

Quatrième partie

Chimie

Liste des chapitres Chimie

1	Molécules et solvants	139
1	Configuration électronique d'un atome	139
2	Modèle de la liaison covalente	140
3	Polarité des molécules	142
4	Forces intermoléculaires	143
5	Les solvants moléculaires	145
2	Transformation de la matière	147
1	Description d'un système physico-chimique :	147
2	Transformation chimique d'un système	148
3	État final d'une transformation chimique	149
4	Capacité numérique	151
3	Équilibre acido-basique en solution aqueuse	153
1	Couple acido-basique :	153
2	Constante d'acidité :	154
3	réaction	157
4	Titration acide-base	158
5	Titration acido-basique par suivi conductimétrique	159
6	Titration acido-basique par suivi pH-métrique	161
4	Cinétique chimique	163
1	Vitesse de réaction	163
2	Lois de vitesse	164
3	Mesures physiques	166
4	Méthode intégrale	167
5	Influence de la température	169
5	Solides cristallins	171
1	Le modèle du cristal parfait	171
2	La structure CFC	172
3	Les différentes familles de cristaux	174
6	Dissolution et précipitation	177
1	Précipitation et dissolution d'un sel	177
2	Solubilité	178
3	Facteurs d'influences	179
7	Réaction d'oxydo-réduction	181
1	Oxydants et réducteurs	181
2	Piles et potentiels	182
3	Réaction d'oxydo-réduction	184
8	Diagramme potentiel-pH	187
1	Rappel sur les diagrammes	187
2	Diagramme potentiel-pH de l'eau	187
3	Diagramme potentiel-pH du fer	188

4	Diagramme potentiel-pH du chlore	189
5	Utilisation des diagrammes potentiel-pH	191

Chimie 1 : Molécules et solvants

1 Configuration électronique d'un atome

Définition : Composition d'un atome

L'atome est constitué d'un noyau et de son cortège électronique. On note A_ZX :

- Z le nombre de protons dans le noyau et d'électrons dans l'atome. Z représente le nombre de charges de l'atome. Il est aussi appelé numéro atomique.
- N le nombre de neutrons dans le noyau.
- $A = Z + N$ le nombre total de nucléons. A est aussi appelé nombre de masse.

Un atome est électriquement neutre, il contient donc Z électrons.

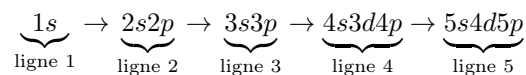
Un **élément chimique** est défini par son numéro atomique Z . Il peut être sous la forme de différents **isotopes** qui possèdent un nombre de masse A différent.

Propriété : Configuration électronique

Les électrons sont répartis dans des couches électroniques associées à un nombre entier n qui se déclinent en sous-couches associées à des lettres s, p, d , etc.

On retiendra que pour un atome dans son état fondamental :

- Une sous-couche s contient au maximum deux électrons, une sous-couche p au maximum six électrons et une sous-couche d au maximum dix électrons ;
- Toutes les sous-couches doivent être pleines avant d'en remplir une nouvelle ;
- L'ordre de remplissage des sous-couche est le suivant :



Définition : Électrons de cœur / électrons de valence

Les énergies des divers électrons présents dans un atome n'évoluent pas de façon continue. Il est d'usage de séparer les électrons d'un atome en deux groupes :

- Les électrons de valence qui sont moins liés au noyau ;
- Les électrons de cœur qui sont solidement liés au noyau.

Propriété : Électrons de valence

Les électrons de valence d'un atome sont les électrons occupant les orbitales de nombre quantique principal n le plus élevé et/ou les sous-couches incomplètes.

Définition : Tableau périodique, construction par bloc

Les éléments sont classés par numéros atomiques Z croissants et rangés en colonnes et lignes appelées périodes de façon à ce que les éléments d'une même colonne présentent des propriétés chimiques analogues.

Des considération de mécanique quantique permettent de définir 4 bloc dans le tableau périodique. À partir de la deuxième période on a :

- le bloc s qui constitue les deux premières colonnes plus les deux premiers éléments H et He ;
- le bloc p qui constitue les 6 dernières colonnes ;
- le bloc d qui constitue les 10 colonnes entre le bloc s et le bloc p à partir de la 4^e ligne ;
- le bloc f qui constitue les 14 colonnes entre le bloc s et le bloc d à partir de la 6^e ligne.

	1																18	
I		2																
II																		
III			3	4	5	6	7	8	9	10	11	12						
	bloc s		bloc d										bloc p					

Definition : Charge formelle

Soit un atome X possédant E électrons de valence. Si au sein d'une molécule X est entouré de P doublets non liants et L doublets liants. Alors X possède une charge formelle :

$$CF = E - 2P - L$$

Propriété : Charge d'une molécule

Si la molécule formée possède une charge q . On peut alors vérifier :

$$q = \sum_i CF_i$$

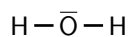
Méthode : Méthode pour trouver le schéma de Lewis d'une molécule

Pour une molécule de charge q , composée de k atomes X_i de nombre d'électrons de valences E_i :

- Déterminer le nombre d'électrons de valence de la molécule : $N = \sum_{i=1}^k E_i - q$;
- Déterminer le nombre de doublets à placer : $D = \frac{N}{2}$;
- Relier chaque atome à ses voisins par un doublet liant.
- Placer les doublets restants de façon à ce que le plus d'atomes respectent la règle du duet ou de l'octet.
- Placer les charges formelles sur chaque atome.

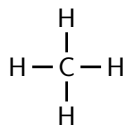
Exemple :

- La molécule d'eau H_2O :



L'atome O possède 6 électrons de valence, 2 doublets non liant et 2 doublet liant : $CF = 6 - 2 \times 2 - 2 = 0$

- La molécule de méthane CH_4 :



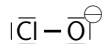
L'atome C possède 4 électrons de valence, 0 doublets non liant et 4 doublet liant : $CF = 4 - 0 \times 2 - 4 = 0$

- La molécule de dichlore Cl_2 :



L'atome Cl possède 7 électrons de valence, 3 doublets non liant et 1 doublet liant : $CF = 7 - 3 \times 2 - 1 = 0$

- L'ion hypochlorite ClO^- :



L'atome O possède 6 électrons de valence, 3 doublets non liant et 1 doublet liant : $CF = 6 - 3 \times 2 - 1 = -1$

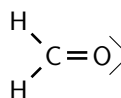
On a bien la somme des charges formelles qui est égale à la charge de l'ion.

- La molécule de diazote N_2 :



L'atome N possède 5 électrons de valence, 1 doublets non liant et 3 doublet liant : $CF = 5 - 1 \times 2 - 3 = 0$

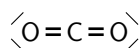
- La molécule de méthanal H_2CO :



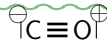
L'atome C possède 4 électrons de valence, 0 doublets non liant et 4 doublet liant : $CF = 4 - 0 \times 2 - 4 = 0$

L'atome O possède 6 électrons de valence, 2 doublets non liant et 2 doublet liant : $CF = 6 - 2 \times 2 - 2 = 0$

- Le dioxyde de carbone CO_2 :



- Le monoxyde de carbone CO :

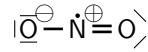


L'atome O possède 6 électrons de valence, 1 doublets non liant et 3 doublet liant : $CF = 6 - 1 \times 2 - 3 = 1$

L'atome C possède 4 électrons de valences, 1 doublets non liant et 3 doublet liant : $CF = 4 - 1 \times 2 - 3 = -1$

On a bien la somme des charges formelles qui est nulle car la molécule n'est pas chargée.

- Le dioxyde d'azote NO_2 :



L'atome O possède 6 électrons de valences, 3 doublets non liant et 1 doublet liant : $CF = 6 - 3 \times 2 - 1 = -1$

L'atome N possède 5 électrons de valences, 1 électron célibataire et 3 doublet liant : $CF = 5 - 1 \times 2 - 3 = -1$.

On a bien la somme des charges formelles qui est nulle car la molécule n'est pas chargée.

Definition : Radicaux

Si le nombre d'électrons de valence de la molécule est impair, alors il reste un électron célibataire à la fin. La molécule est alors extrêmement réactive car cet électron célibataire va chercher à être très réactif.

Definition : Lacune électronique

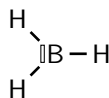
Lorsqu'un atome ne peut pas s'entourer d'un octet d'électrons, il est qualifié d'électrodéficient. Il est schématisé avec une lacune électronique symbolisée par un rectangle vide.

Definition : Hypervalence

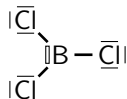
À partir de la troisième ligne incluse, certains atomes peuvent avoir une valence plus grande que 4. On dit que ces atomes sont hypervalent et on ne peut pas prédire ces molécules avec le modèle de Lewis.

Exemple :

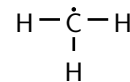
- Le trihydrurobore BH_3 :



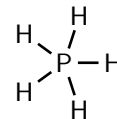
- Le trichlorure d'aluminium AlCl_3 ($Z(\text{Al})=13$) :



- Le méthyle CH_3 est un composé radical :



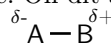
- Le phosphorane PH_5 est un composé hypervalent :



3 Polarité des molécules

Definition : Liaison polaire et électronégativité

Lorsque deux atomes d'éléments chimiques différents sont en liaison covalente, les électrons de valences ne restent pas répartis équitablement entre les deux atomes. Ils sont plus attirés par l'un ou par l'autre des deux atomes, ce qui crée un déséquilibre des charges au niveau de chaque atome. On dit alors que la liaison est polarisée :



L'électronégativité χ d'un élément chimique A quantifie sa propension à s'approprier les électrons d'une liaison covalente qui le lie à B. Ici $\chi_A > \chi_B$ car le nuage électronique est plus proche de A que de B.

Definition : Moment dipolaire d'une liaison

On considère une liaison AB polarisée, on définit le vecteur moment dipolaire $\vec{\mu}$:

$$\overset{\delta^-}{\text{A}} - \overset{\delta^+}{\text{B}} \quad \text{avec} \quad \vec{\mu} = \delta e \times \overrightarrow{\text{AB}} \quad \text{de norme} \quad \|\vec{\mu}\| = \delta e d_{AB}$$

où $\vec{\mu}$ est orienté de la charge négative vers la charge positive (ici de A vers B) d_{AB} est la longueur de la liaison AB et δe la charge partielle en coulomb.

L'unité S.I. du moment dipolaire est le coulomb.mètre ($\text{C} \cdot \text{m}$). Cependant, on utilise beaucoup le Debye (D) :

$$1 \text{ D} = 3,33 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$

Propriété : Évolution dans le tableau

L'électronégativité χ augmente si l'on se déplace dans la classification périodique de la gauche vers la droite ou du bas

vers le haut. L'élément le plus électronégatif est le fluor F.

Il existe plusieurs échelles pour évaluer l'électronégativité d'un atome. Ici quelques valeurs tabulées d'électronégativité avec l'échelle de PAULING.

	H	Li	Be	B	C	N	O	F	S	Cl
χ_P	2,20	0,98	1,57	2,04	2,55	3,04	3,44	3,98	2,58	3,16

Definition : Forme d'une molécule

Les doublets d'électrons se repoussent car sont chargés négativement : la géométrie la plus stable est celle où les doublets sont les plus éloignés les uns des autres.

Propriété : Méthode VSEPR

On considère un atome A central lié à n atomes X et porteur de p doublets non liants, on note : AX_nE_p

On applique alors :

- On calcule la somme de tous les doublets $n + p$, ce qui permet de savoir comment se répartissent les doublets autour de A ;
- On regarde alors la géométrie de l'ensemble des atomes qui forment la molécule.

Definition : Polarité d'une molécule

On dit qu'une molécule est polaire si le barycentre des charges positives de la molécule ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives.

Propriété : Calcul du moment dipolaire d'une molécule

En première approximation, le moment dipolaire d'une molécule est égal à la somme vectorielle des moments dipolaires des liaisons covalentes polarisées de la molécule.

Si son moment dipolaire est non nul alors la molécule est dite polaire, sinon elle est apolaire.

Definition : molécules apolaires

Une molécule apolaire peut être polarisée par l'extérieur de manière transitoire :

- Lorsque la molécule est en présence d'un ion ou d'une molécule polaire, alors elle possède un moment dipolaire induit.
- Lorsque sous l'effet de fluctuations elle possède un moment dipolaire qui est nul en moyenne tout en ayant un moment dipolaire instantané.

Ces deux effets sont plus importants lorsque la molécule est dite polarisable. La polarisabilité d'une molécule est directement liée à sa taille.

Propriété : Polarizabilité

En présence d'un champ électrique \vec{E} (créé par une molécule polaire avoisinante), une molécule possède alors un moment dipolaire induit supplémentaire

$$\vec{p}_{\text{ind}} = \alpha \vec{E} \quad \text{où } \alpha \text{ est la polarisabilité de la molécule}$$

La polarisabilité caractérise l'aptitude du nuage électronique d'un atome ou d'une molécule à se déformer sous l'effet d'un champ \vec{E} . α s'exprime en $\text{C} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1}$ et augmente avec la taille de l'atome ou de la molécule.

4 Forces intermoléculaires

Definition : Interactions de van der Waals

Les interactions de van der Waals sont les interactions électrostatiques attractives qui s'établissent entre les charges dipolaires de deux édifices chimiques. On distingue les interactions :

- de type Keesom : interaction entre deux dipôles permanents (entre deux molécules polaires) ;
- de type Debye : interaction entre un dipôle permanent et un dipôle induit (entre une molécule polaire et une molécule apolaire) ;
- de type London : interaction entre un dipôle instantané et le dipôle qu'il induit (entre deux molécules apolaires).

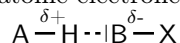
Propriété : Additivité des interactions

Pour une molécule apolaire, on peut lui attribuer un moment dipolaire instantané et un moment dipolaire induit si elle est en présence d'une molécule ionique ou polarisée. On retiendra que l'interaction entre deux molécules est la somme des interactions suivantes :

- deux molécules polaires : Keesom + Debye + London ;
- deux molécules apolaires : London ;
- une molécule apolaire et une molécule polaire : Debye + London.

Définition : Liaison hydrogène

La liaison hydrogène est l'interaction attractive qui s'établit entre un atome d'hydrogène lié à un atome très électronégatif A et un doublet non liant d'électrons porté par un atome électronégatif B .



A et B étant le plus souvent des atomes de fluor (F), d'oxygène (O) ou d'azote (N).

Remarque : Ordre de grandeur

- Liaison covalente : $E_{cov} = 200 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à $800 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Interaction VdW : $E_{VdW} = 1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à $5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Liaison hydrogène : $E_H = 10 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à $40 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

Définition : Température de changement d'état

Lors d'un changement d'état, on change la distance moyenne entre les molécules leurs orientations. Pour chaque état de la matière on a donc des interactions intermoléculaires de différentes intensités :

État de la matière	Intensité des interactions
Solide	forte
Liquide	Intermédiaire
Gazeux	Faible

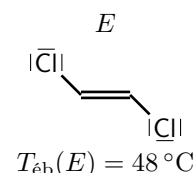
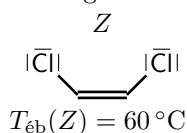
La température de changement d'état correspond à l'énergie d'agitation thermique nécessaire pour diminuer les interactions de van der Waals. On retiendra qu'entre deux composés, celui dont la température de changement d'état est la plus élevée est celui dont l'interaction intermoléculaire est la plus intense.

Propriété : Influence du moment dipolaire

L'existence de moment dipolaire permanent favorise la cohésion entre les molécules. Une molécule polaire aura une température de changement d'état supérieure par rapport à une molécule apolaire semblable.

Exemple :

Les deux isomères de configuration du 1,2-dichloroéthène :

**Propriété : Influence de la polarisabilité**

Plus les atomes composant la molécule sont gros, plus la molécule est polarisable et plus les interactions de cohésion seront intenses.

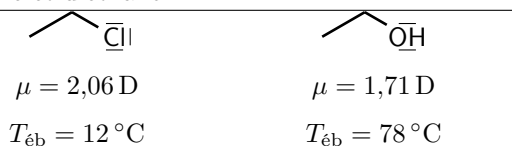
On observe donc une augmentation de la température de changement d'état avec la taille des molécules.

Remarque : Cas particulier :

Pour des molécules présentant des liaisons hydrogènes comme HF, H₂O, NH₃, on observe que la température de changement d'état est plus élevée car l'interaction intermoléculaire est plus intense.

Exemple :

Considérons les molécules de chloroéthane et d'éthanol :



Les interactions de van der Waals sont plus intenses pour le chloroéthane (moment dipolaire plus élevé et plus forte polarisabilité) mais les liaisons hydrogènes de l'éthanol sont plus intenses.

5 Les solvants moléculaires

Definition : Solvant

Une solution est un mélange homogène de deux substances au moins, obtenu par la dissolution de l'une dans l'autre. La substance minoritaire est le soluté et la majoritaire le solvant.

Propriété : Permittivité électrique relative

La permittivité électrique caractérise l'intensité de l'interaction coulombienne entre deux ions de charges opposées $q_1 q_2 < 0$ soit $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$ donc plus ϵ_r est grand, plus les ions seront dissociés car l'interaction coulombienne est moins forte.

Propriété : Le moment dipolaire

Une molécule de solvant de moment dipolaire \vec{p} va pouvoir polariser une liaison afin de faciliter la dissociation d'une espèce dans le solvant sous forme ionique.

**Propriété : Proticité du solvant**

La proticité d'un solvant est la capacité d'un solvant à intervenir dans une liaison hydrogène. On dit alors que le solvant est protique.

Propriété : Solubilité

Un soluté A est soluble dans un solvant S si les interactions A-S sont aussi fortes que les interactions A-A ou S-S. On en déduit la règle empirique qu'un composé est soluble dans un solvant si les deux molécules possèdent des propriétés similaires (moment dipolaire, proticité).

Propriété : Miscibilité de deux solvants

Deux solvants S et S' sont miscibles s'ils présentent des interactions similaires entre eux.

Chimie 2 : Transformation de la matière

1 Description d'un système physico-chimique :

Definition : Corps pur

Les corps purs sont des systèmes composés d'un seul type de particule. Toutes les particules sont identiques.

Definition : Mélanges

Un mélange contient plusieurs espèces chimiques A_i . Pour le décrire, il faut indiquer sa composition en recensant les espèces présentes avec leurs états physiques.

Definition : Solution aqueuses

Une solution est un mélange monophasique dans lequel $H_2O(l)$ est ultra-majoritaire. Cette espèce est appelée solvant. Les espèces minoritaires sont appelées solutés.

Definition : Variables d'états extensives/intensives

On appelle variables d'état les grandeurs macroscopiques permettant de définir l'état d'un système. Elles sont de deux types :

- Une variable extensive est une variable qui dépend de la taille du système.
- Une variable intensive est une variable qui ne dépend pas de la taille du système.

Remarque :

Le rapport de deux variables extensives donne une variable intensive. Par exemple : la masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$; le volume massique $\nu = \frac{V}{m}$; le volume molaire $V_m = \frac{V}{n}$.

Méthode : Description d'une solution aqueuse

On peut décrire la composition chimique d'une solution, de volume V , composée de N solutés A_i à l'aide des variables suivantes :

- Variable extensive : la quantité de matière de chaque constituant : n_i ;
- Variable intensive : la concentration molaire de chaque constituant : $[A_i] = \frac{n_i}{V}$;

Remarque :

En fonction de la situation on optera pour l'utilisation des variables intensives ou extensives.

Méthode : Description d'un mélange gazeux idéal

On peut décrire la composition chimique d'un mélange idéal de gaz, de volume V , de pression P composée de N solutés A_i à l'aide des variables suivantes :

- On considère le gaz comme parfait, soit n_{tot} la quantité de matière totale du gaz tous constituants confondus :

$$PV = n_{\text{tot}}RT \quad \text{avec } R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et T la température du mélange en kelvin.

- Variable extensive : la quantité de matière de chaque constituant : n_i ;
- Variable intensive : la fraction molaire de chaque constituant : $x_i = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}}$;
- Variable intensive : on définit la pression partielle du constituant A_i comme la pression du système de volume V à la température T si A_i était seul :

$$P(A_i) = \frac{n_i RT}{V}$$

Loi de Dalton

En combinant la définition de la pression partielle et la loi des gaz parfaits appliquée au mélange total :

$$P(A_i) = \frac{n_i RT}{V} \quad P = \frac{n_{\text{tot}} RT}{V} \quad \Longleftarrow \quad \frac{P(A_i)}{P} = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}} = x_i$$

On peut alors calculer la pression partielle d'un constituant et la pression totale :

$$P_i = x_i P \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^k P_i = P$$

2 Transformation chimique d'un système

Definition : Transformation chimique

Une transformation chimique est une transformation mettant en jeu une modification des espèces chimiques, de leur nature et de leur quantité de matière.

Propriété : Réaction chimique

Une réaction chimique est définie par une équation bilan et est caractérisée par une constante thermodynamique $K^\circ(T)$ appelée constante d'équilibre, dont la valeur dépend de la température T du système.

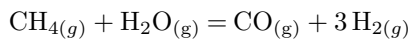
On modélise une réaction chimique faisant intervenir k constituants A_i par l'équation de la réaction :

$$\sum_{i=1}^k \nu_i A_i = 0$$

où ν_i est le coefficient stœchiométrique algébrique de l'espèce A_i . On note :

- $\nu_i > 0$ si A_i est un produit ;
- $\nu_i < 0$ si A_i est un réactif.

Exemple :



Definition : Avancement molaire

On définit alors l'avancement molaire ξ comme :

$$\xi(t) = \frac{n_i(t) - n_i(t=0)}{\nu_i}$$

Propriété : Tableau d'avancement

Un tableau d'avancement consiste à reporter les quantités de matière (en mol) à l'instant initial, et à un instant quelconque pendant la transformation :

	$\text{CH}_4(g)$	+	$\text{H}_2\text{O}(g)$	=	$\text{CO}(g)$	+	$3 \text{H}_2(g)$
EI	n_1		n_2		n_3		n_4
EF	$n_1 - \xi_f$		$n_2 - \xi_f$		$n_3 + \xi_f$		$n_4 + \xi_f$

Avec ξ_f la valeur de l'avancement à la fin de la réaction qu'on appelle avancement final.

Remarque : Avancement volumiques

Lorsque le volume V du système est constant on peut exprimer le tableau d'avancement en fonction de l'avancement volumique $x = \frac{\xi}{V}$ en divisant toutes les cases du tableau par V . On obtient alors :

	$\text{CH}_4(g)$	+	$\text{H}_2\text{O}(g)$	=	$\text{CO}(g)$	+	$3 \text{H}_2\text{gaz}$
EI	C_1		C_2		C_3		C_4
EF	$C_1 - x_f$		$C_2 - x_f$		$C_3 + x_f$		$C_4 + x_f$

Definition : Réaction totale

Une réaction est totale si elle se poursuit jusqu'à épuisement d'au moins un réactif. On dit alors que le ou les réactifs manquant sont **limitants**. L'avancement final est alors égal à l'avancement maximal de la réaction : $\xi_f = \xi_{\max}$

Definition : Taux d'avancement

On définit le taux d'avancement comme le rapport entre l'avancement final de la réaction et son avancement maximal si la réaction était totale :

$$\tau = \frac{\xi_f}{\xi_{\max}}$$

Definition : Quotient de réaction

On définit alors le quotient de réaction qui est une grandeur adimensionnelle instantanée définie par :

$$Q(t) = \prod_{i=1}^k a_i^{\nu_i}(t)$$

avec a_i l'activité chimique de l'espèce A_i qui dépend de la phase de l'espèce et de ses variables d'états.

Propriété : Activité chimique

corps pur		mélange		
phase condensée	phase gazeuse	solvant	soluté au sein d'une solution très diluée	gaz parfait au sein d'un mélange de gaz parfaits
$a_i = 1$	$a_i = \frac{P}{P^\circ}$	$a_i = 1$	$a_i = \frac{[A_i]}{c^\circ}$	$a_i = \frac{P_i}{P^\circ}$

avec $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est la concentration de référence appelée concentration standard ; et $P^\circ = 1 \text{ bar}$ est la pression de référence appelée pression standard.

3 État final d'une transformation chimique

Definition : Équilibre thermodynamique

Un système fermé est à l'équilibre thermodynamique quand sa température T , sa pression P et sa composition chimique n'évoluent plus.

Loi de l'équilibre thermodynamique

À l'équilibre thermodynamique l'avancement de la réaction vaut ξ_{eq} et on a :

$$Q_{\text{req}} = \prod_{i=1}^k a_{\text{eq}}^{\nu_i}(A_i) = K^\circ(T)$$

où $K^\circ(T)$ est la constante d'équilibre thermodynamique de la réaction chimique étudiée.

Propriété : Constante d'équilibre

Une réaction chimique caractérisée par une constante d'équilibre K° est dite :

- favorisée dans le sens direct si $K^\circ > 1$;
- défavorisée dans le sens direct si $K^\circ < 1$ (favorisée dans le sens indirect).

À l'équilibre on peut écrire la constante d'équilibre K_{direct}° associée au sens direct d'équation de réaction :

$$\sum_{i=1}^k \nu_i A_i = 0 \implies K_{\text{direct}}^\circ = \prod_{i=1}^k a_{\text{eq}}^{\nu_i}(A_i)$$

À l'équilibre on peut écrire la constante d'équilibre $K_{\text{indirect}}^\circ$ associée au sens indirect d'équation de réaction :

$$\sum_{i=1}^k -\nu_i A_i = 0 \implies K_{\text{indirect}}^\circ = \prod_{i=1}^k a_{\text{eq}}^{-\nu_i}(A_i) = \frac{1}{K_{\text{direct}}^\circ}$$

Propriété : Réaction très peu avancée

Dans le cas où $K \ll 1$ On parle de réaction très limitée ou très peu avancée. On peut effectuer les simplifications suivantes sur le tableau d'avancement :

	$\text{CH}_4(\text{g})$	+	$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$	=	$\text{CO}(\text{g})$	+	$3 \text{H}_2(\text{g})$
EI	n_1		n_2		0		0
EF	$n_1 - \xi_{\text{eq}} \approx n_1$		$n_2 - \xi_{\text{eq}} \approx n_2$		ξ_{eq}		ξ_{eq}

Propriété : Réaction quantitative

Dans le cas où $K \gg 1$ On parle de réaction quantitative ou très avancée. On peut effectuer les simplifications suivantes sur le tableau d'avancement :

	$\text{CH}_4(\text{g})$	+	$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$	=	CO_{gaz}	+	$3 \text{H}_{2\text{gaz}}$
EI	n_0		n_0		0		0
EF	$n_0 - \xi_{\text{eq}} \approx \epsilon$		$n_0 - \xi_{\text{eq}} \approx \epsilon$		$\xi_{\text{eq}} \approx n_0$		$\xi_{\text{eq}} \approx n_0$

Propriété : Réaction totale

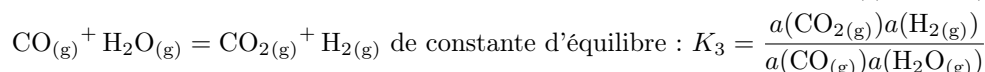
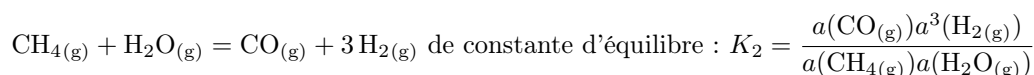
Une réaction totale est une réaction où l'état d'équilibre thermodynamique n'est pas atteint.

Méthode : Déterminer la constante d'équilibre

- Faire une combinaison linéaire des différentes réactions dont la constante d'équilibre est connue pour obtenir la réaction cherchée.
- chaque fois que vous ajoutez deux réactions, vous multipliez les constantes d'équilibre.
- chaque fois que vous faites la soustraction de deux réactions vous divisez les constantes d'équilibre.
- Vous pouvez alors exprimer la constante d'équilibre.

Exemple : $\text{CO}_2(\text{g}) + 4\text{H}_2(\text{g}) = \text{CH}_4(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{g})$

Supposons connues les constantes d'équilibre des réactions suivantes à la température T :



Calculons $K_1 = 1/(K_2 K_3)$

Méthode : Détermination du sens d'évolution spontanée

- Calculer le quotient de réaction à l'état initial $Q(t=0)$;
- Comparer $Q(t=0)$ avec K :
 - Si $K > Q(t=0)$ l'évolution se fait dans le sens direct ;
 - si $K = Q(t=0)$ le système est déjà à l'équilibre thermodynamique et n'évolue pas ;
 - si $K < Q(t=0)$ l'évolution se fait dans le sens indirect.

Méthode : Déterminer l'état final d'un système

- Écrire l'équation bilan de la réaction et le tableau d'avancement correspondant.
- Pour les systèmes en phase gazeuse, ajouter une colonne quantité totale de gaz à exprimer en fonction de ξ_{eq} .
- Exprimer le quotient Q_{eq} de la réaction à l'équilibre en fonction de ξ_{eq} ;
- Pour les systèmes en phase gazeuse, exprimer $P(A_i) = x_i P_{\text{tot}}$ en fonction de ξ_{eq} .
- Écrire la loi de l'équilibre $Q_{\text{eq}} = K^\circ$ et en déduire l'équation vérifiée par ξ_{eq} .
- Résoudre l'équation pour déterminer ξ_{eq} ;
- En déduire la composition du mélange dans l'état final.

Exemple : Sens d'évolution spontanée

Le chlorure de sulfuryle est une molécule qui permet de chlorer des composés organiques. On considère la réaction de dissociation du chlorure de sulfuryle dont l'équation est :



La constante d'équilibre thermodynamique vaut $K^\circ = 2,0$ à $T = 102^\circ\text{C}$

Dans une enceinte initialement vide, à 102°C , sous une pression constante $P_{\text{tot}} = P^\circ = 1,00$ bar, on introduit désormais 1,00 mol de chlorure de sulfuryle SO_2Cl_2 , 5,00 mol de dichlore Cl_2 et 5,00 mol de dioxyde de soufre SO_2 . Déterminer la composition du système à l'état final.

Exprimons le quotient de réaction initial :

$$Q_{r,i} = \frac{P_i(\text{SO}_2)P_i(\text{Cl}_2)}{P_i(\text{SO}_2\text{Cl}_2)P^\circ} \quad P_i(\text{SO}_2) = P_i(\text{Cl}_2) = \frac{5}{11}P_{\text{tot}} \quad P_i(\text{SO}_2\text{Cl}_2) = \frac{1}{11}P_{\text{tot}}$$

On obtient alors : $Q_{r,i} = \frac{25}{11} > K^\circ$ la réaction se fait dans le sens indirect.

Déterminons l'état final, pour cela dressons le tableau d'avancement :

	$\text{SO}_2\text{Cl}_2(\text{g})$	$=$	$\text{SO}_2(\text{g})$	$+$	$\text{Cl}_2(\text{g})$	Total
EI	n_1		n_2		n_2	$2n_2 + n_1$
EF	$n_1 + \xi_{\text{eq}}$		$n_2 - \xi_{\text{eq}}$		$n_2 - \xi_{\text{eq}}$	$2n_2 + n_1 - \xi_{\text{eq}}$

On exprime les activités des constituants à l'équilibre :

$$P_{\text{eq}}(\text{Cl}_2) = P_{\text{eq}}(\text{SO}_2) = \frac{n_2 - \xi_{\text{eq}}}{2n_2 + n_1 - \xi_{\text{eq}}} P_{\text{tot}} \quad P_{\text{eq}}(\text{SO}_2\text{Cl}_2) = \frac{n_1 + \xi_{\text{eq}}}{2n_2 + n_1 - \xi_{\text{eq}}}$$

On applique alors la loi de l'équilibre :

$$Q_{r,\text{eq}} = K^\circ \implies \frac{(n_2 - \xi_{\text{eq}})^2}{(n_1 + \xi_{\text{eq}})(2n_2 + n_1 - \xi_{\text{eq}})} \frac{P_{\text{tot}}}{P^\circ} = K^\circ$$

On peut faire apparaître le taux d'avancement car $\xi_{\text{max}} = n_2$ soit $\tau_{\text{eq}} = \frac{\xi_{\text{eq}}}{n_2}$:

$$\frac{(1 - \tau_{\text{eq}})^2}{\left(\frac{n_1}{n_2} + \tau_{\text{eq}}\right) \left(2 + \frac{n_1}{n_2} - \tau_{\text{eq}}\right)} = K^\circ$$

Cette équation possède deux solutions : $\tau_{\text{eq}1} = 0,05 < 1$ et $\tau_{\text{eq}2} = 1,05 > 1$ on ne garde donc que la solution $\tau_{\text{eq}1}$.

4 Capacité numérique

Definition : Méthode dichotomique

Le principe de l'algorithme dichotomique est de partir d'un intervalle $[a_0, b_0]$ où l'on sait qu'une fonction f donnée s'annule (fonction monotone sur $[a_0, b_0]$ avec $f(a) \times f(b) < 0$). La méthode est décrite ci-dessous :

- On teste alors successivement $f(m)$ avec m le milieu de l'intervalle : $m = \frac{a_0 + b_0}{2}$.
- Si $f(m)$ est du même signe que $f(a)$ alors on réduit l'intervalle à $[a_1, b_0]$ avec $a_1 = m$.
- Sinon on réduit l'intervalle à $[a_0, b_1]$ avec $b_1 = m$.
- On arrête lorsque la taille de l'intervalle est à la bonne précision 2ϵ choisie.

Propriété : Fonction de recherche dichotomique

```
def Dichot(a,b,f,eps):
    g=a
    d=b
    m=(g+d)/2
    while (d-g)/2>eps:
        if f(g)*f(m)>0:
```

```

    g=m
else:
    d=m
m=(g+d)/2
return m

```

Propriété : Capacité numérique 4

Déterminer, à l'aide de python, l'état final d'un système, siège d'une transformation, modélisée par une réaction à partir des conditions initiales et valeur de la constante d'équilibre.

Exemple : Formation de $\text{SO}_3(\text{g})$

On considère la réaction : $2\text{SO}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) = 2\text{SO}_3(\text{g})$ de constante d'équilibre en fonction de la température T :
 $K^\circ = e^{\frac{198000-188 \times T}{RT}}$ dans les proportions stœchiométrique le quotient de réaction s'écrit : $Q_r = \frac{\xi^2(3-\xi)}{(1-\xi)^3}$

On définit alors les fonctions python :

```

def K(T):
    return np.exp((198000-188*T)/(8.31*T))
def Q(kxi):
    return (kxi**2)*(3-kxi)/((1-kxi)**3)
def f(kxi):
    return Q(kxi)-K(700)
Dichot(f,0.00001)

```

Exemple : Formation de $\text{NOBr}(\text{g})$

On considère la réaction : $2\text{NO}(\text{g}) + \text{Br}_2(\text{g}) = 2\text{NOBr}(\text{g})$ de constante d'équilibre : $K^\circ(330 \text{ K}) = 13,2$ dans les proportions
 $n(\text{NO}) = n_1 = 4,81 \times 10^{-3} \text{ mol}$ et $n(\text{Br}_2) = n_2 = 1,88 \times 10^{-3} \text{ mol}$: $Q_r = \frac{a\xi^2}{(n_1 - 2\xi)^2(n_2 - \xi)} = \frac{a\tau^2}{n_2(n_1/n_2 - 2\tau)^2(1 - \tau)}$

On définit alors les fonctions python :

```

n1 = 4.81e-3
n2 = 1.88e-3
a = 0.289
K0 = 13.2
def f(x):
    return a*x**2/(n2*(n1/n2-2*x)**2 * (1-x))-K0
print(Dichot(f,0.00001))

```


Chimie 3 : Équilibre acido-basique en solution aqueuse

1 Couple acido-basique :

Definition : Acide

Un acide est une espèce susceptible de libérer un ou plusieurs protons H^+ . On parlera de «monoacide» dans le cas d'un seul proton, une espèce pouvant libérer plusieurs protons est un «polyacide».

Lorsqu'un acide AH libère un proton H^+ il se transforme en sa base conjuguée A^- . Ils forment un couple acide/base : AH/A^- .

Definition : Base

Une base est une espèce susceptible de capter un ou plusieurs protons H^+ . On parlera de «monobase» dans le cas d'un seul proton, une espèce pouvant capter plusieurs protons est une «polybase».

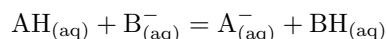
Lorsqu'une base A^- capte un proton H^+ elle se transforme en son acide conjugué AH . Ils forment un couple acide/base : AH/A^- .

Propriété : Amphotère

Une espèce qui est à la fois acide et base de deux couples différents est une espèce amphotère.

Remarque :

Un proton n'existe pas dans l'eau de manière stable, dès qu'il est cédé par un acide, il est immédiatement capté par une base. On appelle alors une réaction acido-basique entre un couple $AH_{(aq)}/A^-_{(aq)}$ et un couple $BH_{(aq)}/B^-_{(aq)}$ une réaction acido-basique de la forme :



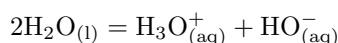
Propriété : Les couples de l'eau

L'eau est une espèce amphotère :

- C'est la base conjuguée de l'ion oxonium ou hydronium dans le couple $H_3O^+_{(aq)}/H_2O_{(l)}$;
- C'est l'acide conjugué de l'ion hydroxyde dans le couple $H_2O_{(l)}/HO^-_{(l)}$.

Propriété : Autoprotolyse de l'eau

La réaction de l'eau comme acide avec l'eau comme base est appelée autoprotolyse de l'eau d'équation de réaction :



La constante d'équilibre associée est appelée produit ionique de l'eau $K_e(T)$:

$$K_e(T) = \frac{a(H_3O^+_{(aq)})a(HO^-_{(aq)})}{a^2(H_2O_{(l)})} = \frac{[H_3O^+][HO^-]}{(C^\circ)^2}$$

À 25 °C le produit ionique de l'eau vaut : $K_e(T) = 10^{-14}$.

Remarque :

On définit pour une grandeur adimensionnée X la quantité $pX = -\log(X)$.

En particulier, on définit $pK_e = -\log(K_e(T)) = 14$ (à 25 °C).

Definition : Le pH d'une solution aqueuse

On définit le pH d'une solution aqueuse par :

$$pH = -\log\left(\frac{[H_3O^+]}{C^\circ}\right)$$

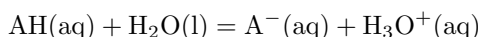
2 Constante d'acidité :

Definition : Force d'un acide

Pour définir la force des acides et les classer entre eux, l'idée est de les faire réagir sur la même base et d'observer l'avancement de la réaction à l'équilibre : plus la réaction est avancée, plus l'acide est «fort». On choisit comme base commune l'eau.

Propriété : Constante d'acidité

On a alors l'équation caractéristique d'un acide $AH_{(aq)}$:



On définit la constante d'acidité $K_A(T)$ comme la constante d'équilibre de cette réaction notée $K_A(T)$:

$$K_A = \frac{a(A^-(aq))a(H_3O^+(aq))}{a(AH(aq))a(H_2O(l))} = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[AH]c^\circ}$$

avec $pK_A = -\log(K_A)$.

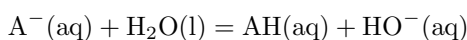
Un acide est d'autant plus fort que la constante d'acidité K_A du couple auquel il appartient est élevé. Un acide est donc d'autant plus fort que son pK_A est faible.

Definition : Force d'une base

Pour classer entre elles les bases on les fait réagir avec le même acide et on fait la même chose. On choisit également comme acide commun l'eau.

Propriété : Constante de basicité

On a alors l'équation caractéristique d'une base $A^-(aq)$:



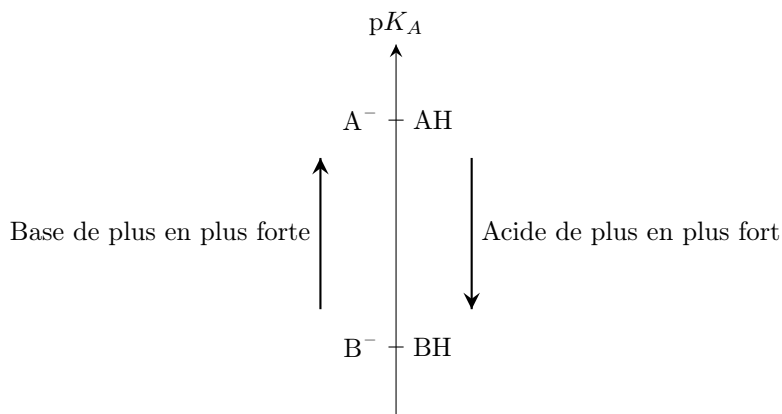
On définit la constante de basicité $K_B(T)$ comme la constante d'équilibre de cette réaction notée $K_B(T)$:

$$K_B = \frac{a(AH(aq))a(HO^-(aq))}{a(A^-(aq))a(H_2O(l))} = \frac{[HO^-][AH]}{[A^-]c^\circ}$$

avec $pK_B = -\log(K_B)$.

Propriété : Relation entre acidité et basicité dans un couple

Une base est d'autant plus forte que la constante d'acidité K_A du couple auquel elle appartient est faible. Une base est d'autant plus forte que son pK_A est élevé.



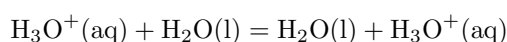
Exemple : Exemples à connaître

Nom	Formule	Nature
Acide sulfurique	H ₂ SO ₄	Diacide (Fort puis faible)
Acide nitrique	HNO ₃	Acide fort
Acide chlorhydrique	HCl	Triacide faible
Acide phosphorique	H ₃ PO ₄	Triacide faible
Acide acétique	CH ₃ CO ₂ H	Acide faible
Soude	NaOH	Base forte
Ion hydrogénocarbonate	HCO ₃ ⁻	Acide et base faible
Ammoniac	NH ₃	Base faible

Propriété : Les couples de l'eau

On calcule la constante d'acidité associée à chaque couple de l'eau.

Pour le couple H₃O⁺(aq)/H₂O(l) on a la réaction suivante :

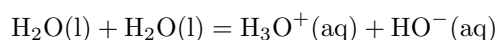


La constante d'acidité associée au couple H₃O⁺(aq)/H₂O(l) est donc :

$$K_A(\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}(\text{l})) = \frac{a(\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}))a(\text{H}_2\text{O}(\text{l}))}{a(\text{H}_2\text{O}(\text{l}))a(\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}))} = 1$$

On calcule alors : $\text{p}K_A(\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}(\text{l})) = 0$

Pour le couple H₂O(l)/HO⁻(aq) on a la réaction suivante :



C'est l'autoprotolyse de l'eau, dont la constante d'équilibre est K_e .

On calcule alors : $\text{p}K_A(\text{H}_2\text{O}(\text{l})/\text{HO}^-(\text{aq})) = 14$

Definition : Acide fort

On désigne par acide fort une acide qui réagit quasiment totalement avec l'eau. On considère alors que sa réaction avec l'eau est totale.

Les acides forts n'existent pas dans l'eau, ils réagissent immédiatement pour donner un ion H₃O⁺(aq).

Definition : Base forte

La base conjuguée d'un acide fort ne réagit pas avec l'eau, on dit qu'elle est indifférente.

De manière équivalente on désigne par base forte une base qui réagit quasiment totalement avec l'eau. On considère alors que sa réaction avec l'eau est totale.

Les bases fortes n'existent pas dans l'eau, elles réagissent immédiatement avec l'eau pour donner un ion HO⁻(aq).

Propriété : Nivellement du solvant

L'ion oxonium est l'acide le plus fort dans l'eau dont on peut mesurer le $\text{p}K_A$.

Un acide plus fort que l'oxonium verra sa réaction avec l'eau totale et donc on aura en solution comme acide le plus fort l'oxonium. On appelle ça le nivellement du solvant.

L'ion hydroxyde est la base la plus forte dans l'eau dont on peut mesurer le $\text{p}K_A$.

Une base plus forte que l'hydroxyde verra sa réaction avec l'eau totale et donc on aura en solution comme base la plus forte l'hydroxyde.

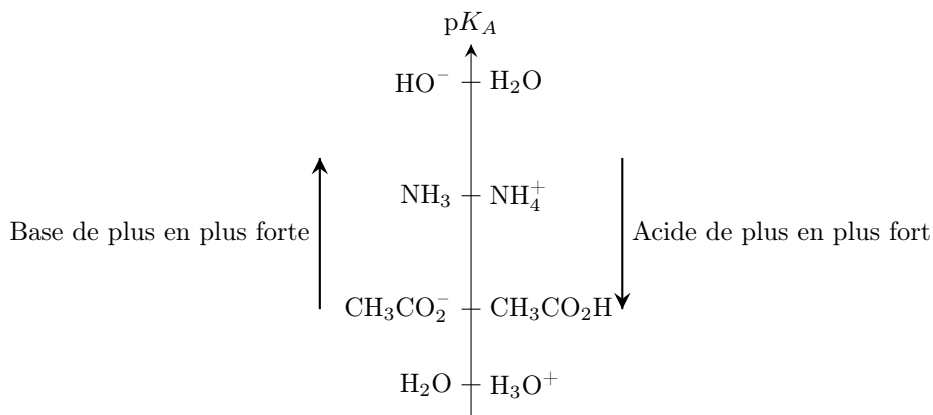
Exemple :

$\text{HCl}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}) + \text{Cl}^-(\text{aq})$ La réaction est totale et donc à l'équilibre on a uniquement l'acide H₃O⁺(aq) en solution.

$\text{NaOH}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{Na}^+(\text{aq}) + \text{HO}^-(\text{aq})$ La réaction est totale et donc à l'équilibre on a uniquement la base $\text{HO}^-(\text{aq})$ en solution.

Propriété : Échelle des $\text{p}K_A$

On peut alors borner l'échelle des $\text{p}K_A$ utile en solution aqueuse :



Propriété : Diagramme de prédominance

Lorsque l'acide n'est pas fort et que la base n'est pas faible, on parle d'acide faible-base faible, la réaction avec l'eau n'est pas totale. On montre alors que pour un couple $\text{AH}(\text{aq}) + \text{A}^-(\text{aq})$:

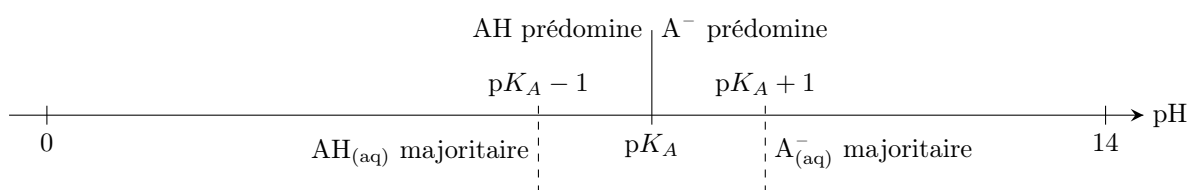
$$\text{p}K_A = -\log(K_A) = -\log\left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]C^\circ}\right) = \text{pH} + \log\left(\frac{[\text{AH}]}{[\text{A}^-]}\right) \implies \text{pH} = \text{p}K_A + \log\left(\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}\right)$$

On parle de prédominance si une espèce est plus nombreuse qu'une autre, on en déduit alors que :

- Si $\text{pH} > \text{p}K_A$ alors $[\text{A}^-] > [\text{AH}]$;
- Si $\text{pH} < \text{p}K_A$ alors $[\text{A}^-] < [\text{AH}]$;

Maintenant si on cherche les domaines où une espèce est majoritaire, c'est à dire que sa concentration est 10 fois supérieure à la concentration de son espèce conjuguée :

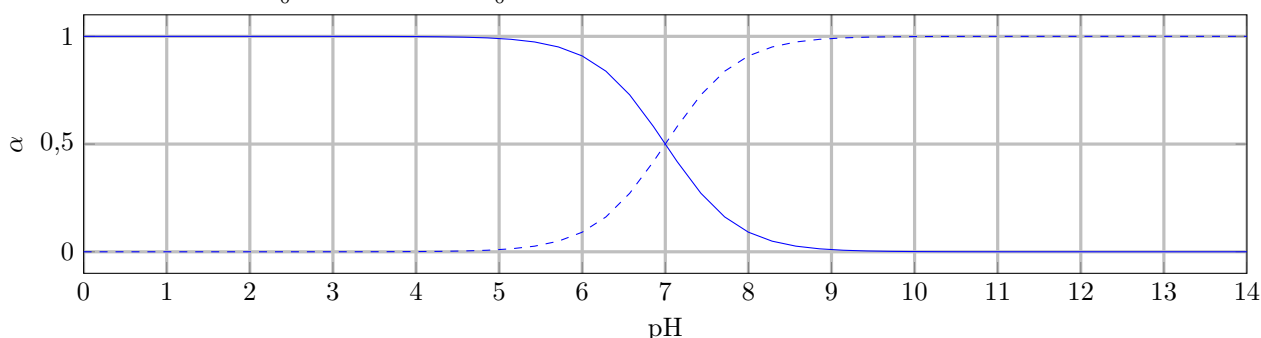
- Si $\text{pH} > \text{p}K_A + 1$ alors $[\text{A}^-] > 10[\text{AH}]$;
- Si $\text{pH} < \text{p}K_A - 1$ alors $10[\text{A}^-] < [\text{AH}]$;



Propriété : Courbe de distribution d'un monoacide faible

Pour un monoacide $\text{AH}(\text{aq})$, on a $[\text{AH}] + [\text{A}^-] = C_0$ la concentration initiale de l'espèce introduite dans la solution.

On affiche alors $\alpha(\text{AH}) = \frac{[\text{AH}]}{C_0}$ et $\alpha(\text{A}^-) = \frac{[\text{A}^-]}{C_0}$ en fonction du pH.



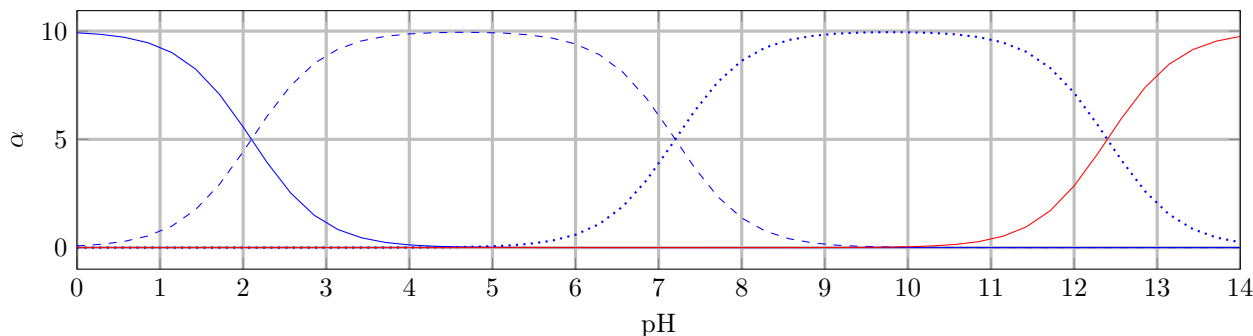
Propriété : Courbe de distribution d'un polyacide faible

On a la conservation de la matière qui donne :

$$C_0 = [\text{AH}_n] + [\text{AH}_{n-1}^-] + \dots + [\text{A}^{n-}] = \sum_{i=0}^n [\text{AH}_i^{(n-i)-}]$$

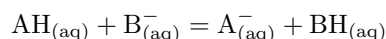
On trace alors les $\alpha(\text{AH}_i^{(n-i)-})$ en fonction du pH.

Exemple avec AH_3 :

**3 réaction****Propriété : Constante de réaction entre un acide faible / base faible**

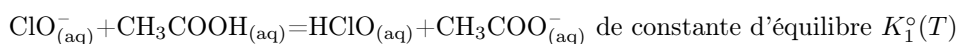
Lors d'une réaction acido-basique entre un acide faible et une base faible on peut déterminer la constante d'équilibre à partir des constantes d'acidité des deux couples.

Soit un couple $\text{AH}_{(\text{aq})}/\text{A}^{-}_{(\text{aq})}$ et un couple $\text{BH}/\text{aq}/\text{B}^{-}(\text{aq})$ qui réagissent lors d'une réaction acido-basique de la forme :



La constante d'équilibre de cette réaction est K° tel que :

$$K^\circ = \frac{K_A(\text{AH}_{(\text{aq})}/\text{A}^{-}_{(\text{aq})})}{K_A(\text{BH}/\text{aq}/\text{B}^{-}(\text{aq}))}$$

Exemple :**Méthode : Réaction prépondérante**

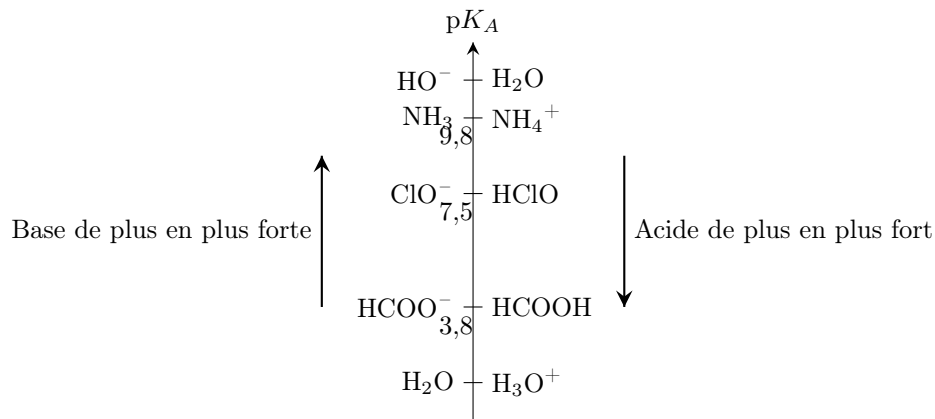
Lorsque plusieurs espèces sont en solution, on doit recenser tous les couples présents que l'on place sur une échelle des $\text{p}K_A$ pour déterminer la classe des acides et bases en fonction de leurs forces.

La réaction prépondérante est celle qui possède la constante d'équilibre la plus élevée. C'est la réaction de la base la plus forte avec l'acide le plus fort présents en solution.

On utilise la règle du «gamma» pour obtenir l'équation de la réaction prépondérante.

Exemple :

On mélange en solution aqueuse les espèces suivantes : $\text{ClO}^{-}_{(\text{aq})}$, $\text{HCOOH}_{(\text{aq})}$, $\text{NH}_3_{(\text{aq})}$.



On a alors comme réaction prépondérante :

4 Titrage acide-base

Definition : Réaction de titrage

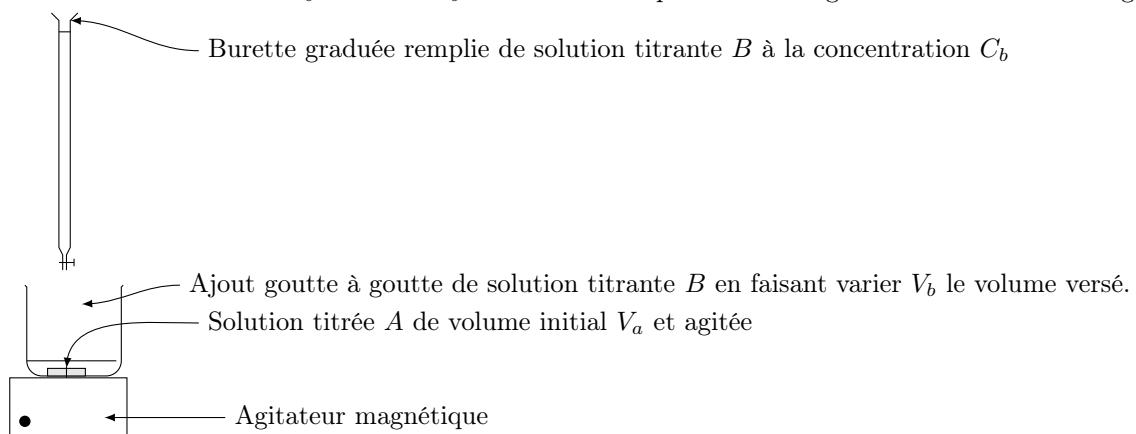
Doser une espèce signifie déterminer sa quantité de matière. Un titrage est une méthode de dosage mettant en œuvre une réaction chimique entre une espèce à doser appelée espèce titrée et une espèce appelée réactif titrant.

Un réaction de titrage doit être :

- Totale ($K^\circ > 10^4$) ;
- Unique (Pas de réaction parasite) ;
- Rapide.

L'espèce à titrer est généralement dans un bécher contenant un volume V_a de solution A à titrer. On cherche alors à déterminer la concentration de la solution A : C_a .

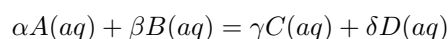
L'espèce titrante est généralement dans une burette placée au dessus du bécher, contenant une solution B de l'espèce titrante à la concentration connue C_b . On note V_b le volume versé par la burette graduée au cours du titrage.



Definition : Équivalence

À l'équivalence, l'espèce titrante et titrée ont été introduites en proportion stœchiométriques.

Pour un titrage de A par B on a la réaction :



Si on introduit $n_0(A)$ et $n_0(B)$ à l'équivalence on a

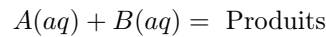
$$\frac{n_0(A)}{\alpha} = \frac{n_0(B)}{\beta}$$

On définit alors le volume équivalent V_{eq} tel que $V_b = V_{eq}$ à l'équivalence. On a alors :

$$\frac{C_a V_a}{\alpha} = \frac{C_b V_{eq}}{\beta}$$

Méthode : Suivi du titrage

Pour illustrer la méthode de suivi du titrage on prend une réaction de titrage simple du type :



où on ne s'intéresse pas aux produits ici.

Lors du titrage on étudie l'état final de la réaction de titrage qu'on suppose totale en fonction de l'ajout de solution B titrante, donc du volume V_B . On a alors trois cas possibles :

- Cas où $V_b < V_{eq}$: alors le réactif limitant est l'espèce titrante.

	A(aq)	+	B(aq)	=	Produits
EI	$C_a V_a$		$C_b V_b$		
EF	$C_a V_a - C_b V_b$		ϵ		

- Cas où $V_b = V_{eq}$: d'après la définition de l'équivalence, les deux réactifs sont limitants.

	A(aq)	+	B(aq)	=	Produits
EI	$C_a V_a$		$C_b V_b$		
EF	$C_a V_a - C_b V_{eq} = \epsilon$		ϵ		

- Cas où $V_b > V_{eq}$: le réactif limitant est l'espèce titrée.

	A(aq)	+	B(aq)	=	Produits
EI	$C_a V_a$		$C_b V_b$		
EF	ϵ		$C_b V_b - C_b V_{eq} =$ $C_b V_b - C_a V_a$		

Comme la réaction est rapide, on s'intéresse uniquement à l'état final de chaque tableau d'avancement, et on dresse un tableau d'avancement de titrage qui reprend chaque dernière ligne de chaque tableau d'avancement :

	A(aq)	+	B(aq)	=	Produits
$V_b = 0$	$C_a V_a$		0		
V_b avant équivalence	$C_a V_a - C_b V_b$		ϵ		
$V_b = V_{eq}$	$C_a V_a - C_b V_{eq} = \epsilon$		ϵ		
V_b après équivalence	ϵ		$C_b V_b - C_a V_a$		

De cette manière on obtient la quantité de matière de chaque espèce en fonction du volume V_b versé lors du titrage.

On peut repérer l'équivalence par :

- l'utilisation d'un indicateur coloré ;
- un suivi conductimétrique ;
- un suivi pH-métrique ;
- un suivi potentiométrique.

La suite de ce chapitre constitue une suite d'exemple permettant de mettre en application le suivi d'un titrage pour repérer l'équivalence. Les résultats ne sont pas à connaître par cœur, il faut connaître la méthode qui constitue une application des connaissances et grandeurs introduites dans les chapitres précédents.

5 Titrage acido-basique par suivi conductimétrique

Definition : Rappel sur la conductivité d'une solution

Si la solution étudiée est composée de N ions $A_i^{z_i \pm}$ avec z_i le nombre de charges élémentaires, positives ou négatives, portées par l'ion $A_i^{z_i \pm}$. Alors la conductivité de la solution est :

$$\sigma = \sum_{i=1}^N z_i [A_i^{z_i \pm}] \lambda_i^\circ$$

avec λ_i° la conductivité molaire ionique limite de l'ion $A_i^{z_i \pm}$.

Exemple :

On considère le titrage d'une solution de HCl (acide fort donc dissocié totalement dans l'eau) par une solution de soude ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$, obtenue par dissolution de NaOH(s)). On note :

- $C_a = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ la concentration initiale en H_3O^+ dans la solution de HCl et $V_a = 10 \text{ mL}$ le volume de la solution de HCl à titrer.
- $C_b = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ la concentration initiale en HO^- dans la solution titrante de soude et V_b le volume de la solution versé.

La constante de la réaction associée est $K^\circ = \frac{1}{K_e} = 10^{14}$, on peut donc considérer la réaction comme totale.

On dresse alors le tableau d'avancement du titrage :

	$\text{H}_3\text{O}^+_{(\text{aq})}$	+	$\text{HO}^-_{(\text{aq})}$	=	$2\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$
$V_b = 0$	$C_a V_a$		ϵ		
$V_b < V_{eq}$	$C_a V_a - C_b V_b$		ϵ		
$V_b = V_{eq}$	$C_a V_a - C_b V_{eq} = \epsilon$		ϵ		
$V_b > V_{eq}$	ϵ		$C_b V_b - C_a V_a$		

Propriété : Suivi conductimétrique du titrage

On effectue un suivi conductimétrique du titrage en plongeant une cellule conductimétrique dans la solution contenue dans le bécher.

On peut alors exprimer la conductivité σ de la solution dans le becher en fonction de V_b le volume de solution titrante versée : $\sigma = \lambda^\circ(\text{Na}^+) [\text{Na}^+] + \lambda^\circ(\text{HO}^-) [\text{HO}^-] + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) [\text{Cl}^-] + \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) [\text{H}_3\text{O}^+]$

- Avant l'équivalence : $V_b < V_{eq}$

$$\sigma = \lambda^\circ(\text{Na}^+) [\text{Na}^+] + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) [\text{Cl}^-] + \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) [\text{H}_3\text{O}^+]$$

On utilise alors les expressions des quantités de matières contenue dans le tableau d'avancement :

$$\sigma = \lambda^\circ(\text{Na}^+) \frac{C_b V_b}{V_a + V_b} + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) \frac{C_a V_a}{V_a + V_b} + \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) \frac{C_a V_a - C_b V_b}{V_a + V_b}$$

- Après l'équivalence : $V_b > V_{eq}$

$$\sigma = \lambda^\circ(\text{Na}^+) [\text{Na}^+] + \lambda^\circ(\text{HO}^-) [\text{HO}^-] + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) [\text{Cl}^-]$$

On utilise alors les expressions des quantités de matières contenue dans le tableau d'avancement :

$$\sigma = \lambda^\circ(\text{Na}^+) \frac{C_b V_b}{V_a + V_b} + \lambda^\circ(\text{HO}^-) \frac{C_b V_b - C_a V_a}{V_a + V_b} + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) \frac{C_a V_a}{V_a + V_b}$$

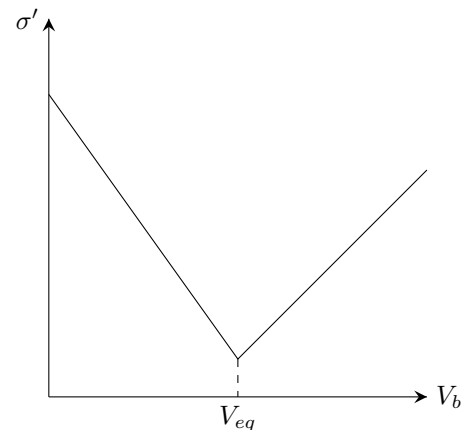
En sachant que $\lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+)$ et $\lambda^\circ(\text{HO}^-)$ sont grands devant les autres λ° . On peut alors tracer la courbe $\sigma' = \sigma(V_a + V_b) = f(V_b)$:

- Avant l'équivalence : $V_b < V_{eq}$

$$\begin{aligned} \sigma' &= \lambda^\circ(\text{Na}^+) C_b V_b + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) C_a V_a + \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) (C_a V_a - C_b V_b) \\ &= (\lambda^\circ(\text{Cl}^-) + \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+)) C_a V_a + (\lambda^\circ(\text{Na}^+) - \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+)) C_b V_b \\ &\approx \underbrace{\lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) C_a V_a}_{\alpha_1} - \underbrace{\lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) C_b V_b}_{-\beta_1} \end{aligned}$$

- Après l'équivalence : $V_b > V_{eq}$

$$\begin{aligned} \sigma' &= \lambda^\circ(\text{Na}^+) C_b V_b + \lambda^\circ(\text{HO}^-) (C_b V_b - C_a V_a) + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) C_a V_a \\ &= (\lambda^\circ(\text{Cl}^-) - \lambda^\circ(\text{HO}^-)) C_a V_a + (\lambda^\circ(\text{Na}^+) + \lambda^\circ(\text{HO}^-)) C_b V_b \\ &\approx \underbrace{-\lambda^\circ(\text{HO}^-) C_a V_a}_{\alpha_2} + \underbrace{\lambda^\circ(\text{HO}^-) C_b V_b}_{\beta_2} \end{aligned}$$



On a donc une pente $\beta_1 < 0$ avant l'équivalence et une pente $\beta_2 > 0$ après l'équivalence.

Remarque :

Cet exemple illustre très bien l'intérêt de ce suivi car la rupture de pente lors du titrage est très grande.

On peut appliquer le même suivi à d'autres réactions du moment que les porteurs de charges sont différents avant l'équivalence et après, on a alors une rupture de pente.

6 Titration acido-basique par suivi pH-métrique**Definition : Principe du pH-mètre**

Un pH-mètre est un voltmètre qui mesure la différence de potentiel entre une électrode de verre (dont le potentiel dépend du pH de la solution) et une électrode de référence dont le potentiel est fixe (par exemple l'électrode au calomel saturée ECS) plongeant dans la solution étudiée. Cette tension est convertie en valeur de pH (après étalonnage).

Les deux électrodes sont en pratique présente au sein du même élément qu'on plonge dans la solution.

Exemple :

On considère le titrage d'une solution d'acide éthanóique CH_3COOH (acide faible) par une solution de soude ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$, obtenue par dissolution de NaOH(s)). On note :

- $C_a = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ la concentration initiale en CH_3COOH dans la solution d'acide éthanóique et $V_a = 10 \text{ mL}$ le volume de la solution à titrer.
- $C_b = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ la concentration initiale en HO^- dans la solution titrante de soude et V_b le volume de la solution versé.

Sachant que le $\text{p}K_a(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,8$, la constante de la réaction associée est $K^\circ = \frac{K_a}{K_e} = 10^{9,2}$, on peut donc considérer la réaction comme totale.

On dresse alors le tableau d'avancement du titrage :

	$\text{CH}_3\text{COOH(aq)}$	$+ \text{HO}^-(\text{aq})$	$= \text{CH}_3\text{COO}^-(\text{aq})$	$+ \text{H}_2\text{O(l)}$
$V_b = 0$	$C_a V_a$	0	0	
$V_b < V_{eq}$	$C_a V_a - C_b V_b$	0	$C_b V_b$	
$V_b = V_{eq}$	$C_a V_a - C_b V_{eq} = 0$	0	$C_b V_b = C_a V_a$	
$V_b > V_{eq}$	0	$C_b V_b - C_a V_a$	$C_a V_a$	

Propriété : Suivi pH-métrique du titrage

On effectue un suivi pH-métrique du titrage en plongeant une électrode de verre reliée à un pH-mètre préalablement étalonné dans la solution contenue dans le bécher.

- Avant l'équivalence : $V_b < V_{eq}$

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \left(\frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} \right) = \text{p}K_a + \log \left(\frac{C_b V_b}{C_a V_a - C_b V_b} \right)$$

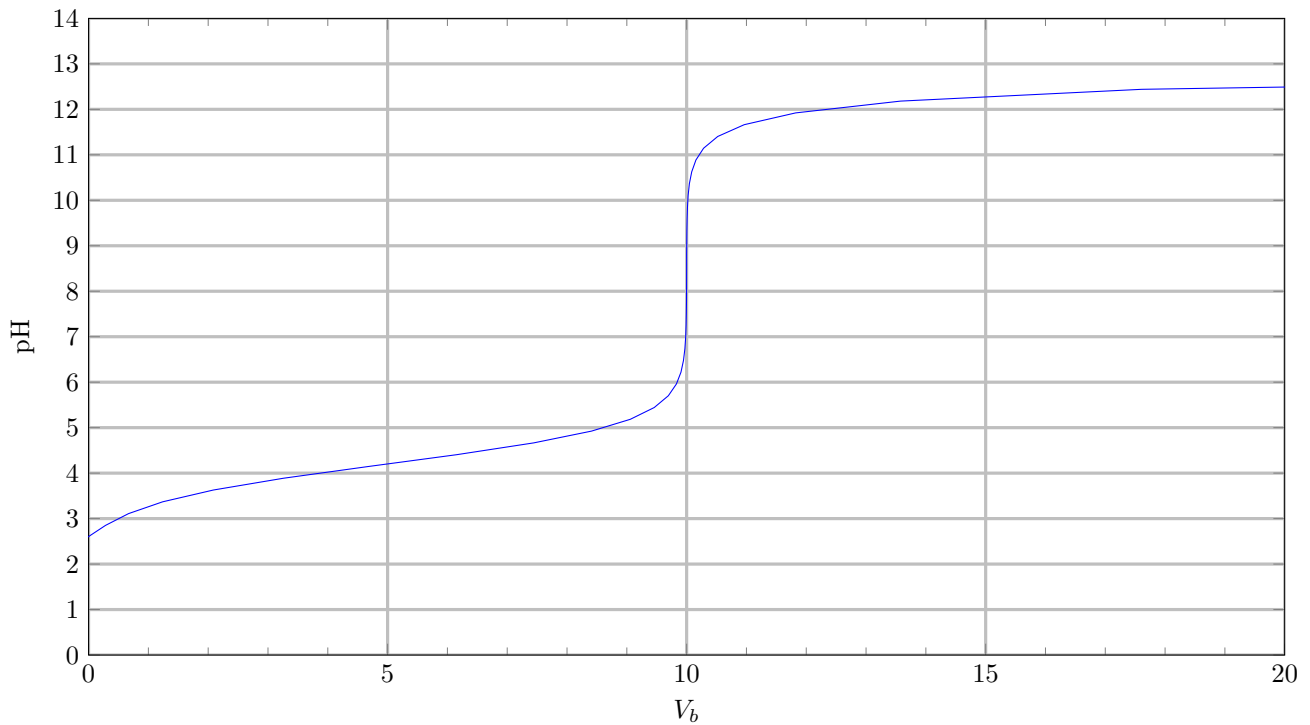
- Après l'équivalence : $V_b > V_{eq}$

$$\text{pH} = -\log \left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ} \right) = -\log \left(\frac{K_e c^\circ}{[\text{HO}^-]} \right) = \text{p}K_e + \log \left(\frac{[\text{HO}^-]}{c^\circ} \right)$$

On utilise alors les expressions des quantités de matières contenue dans le tableau d'avancement :

$$\text{pH} = \text{p}K_e + \log \left(\frac{C_b V_b - C_a V_a}{c^\circ (V_a + V_b)} \right)$$

Titration d'un acide faible par une base forte



On peut alors tracer la courbe $\text{pH} = f(V_b)$ avec les points caractéristiques suivants :

- À $V_b = 0$ on obtient le pH on étudiant la réaction de $\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$.
- À $V_b = \frac{V_{eq}}{2}$: $\text{pH} = \text{p}K_a$.
- À $V_b = V_{eq}$: on obtient le pH_e en étudiant la réaction de $\text{CH}_3\text{COO}^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$.
- À $V_b \rightarrow +\infty$: $\text{pH}_\infty = 14 + \log\left(\frac{C_b}{c^\circ}\right) = 13$.

Expérimentalement on repère l'équivalence en traçant $\frac{d\text{pH}}{dV_b} = g(V_b)$. L'équivalence correspond au maximum de la dérivée.

Chimie 4 : Cinétique chimique

1 Vitesse de réaction

Definition : Cadre

Beaucoup de systèmes chimiques peuvent donner lieu à des études cinétiques, dans ce chapitre on se limitera aux systèmes fermés, homogènes, effectuant une transformation isotherme.

Dans le chapitre sur la transformation de la matière on a vu que la thermodynamique permettait de prédire l'état final d'un système. En revanche elle ne nous permet pas de décrire le temps d'évolution du système, ni le chemin par lequel cette transformation s'effectue.

En cinétique chimique on s'intéresse à des équations différentielles qui permettent de décrire l'évolution temporelle des variables d'état du système. Ces équations ont été établies empiriquement, c'est-à-dire à partir de résultats expérimentaux.

Durant ce chapitre on considèrera uniquement des réaction totale.

Remarque : Rappel sur les réactions

Pour une transformation chimique faisant intervenir N constituants A_i d'équation bilan de la forme :

$$\sum_{i=1}^N \nu_i A_i = 0$$

où ν_i est le coefficient stœchiométrique algébrique de l'espèce A_i . On note :

- $\nu_i > 0$ si A_i est un produit ;
- $\nu_i < 0$ si A_i est un réactif.

On définit alors l'avancement ξ comme :

$$\xi(t) = \frac{n_i(t) - n_i(t=0)}{\nu_i}$$

Definition : Vitesse de réaction

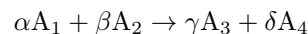
On définit la vitesse de la réaction :

$$r = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} \text{ si le volume est constant au cours de la réaction : } r = \frac{dx}{dt}$$

avec $x = \frac{\xi}{V}$ l'avancement volumique de la réaction. L'unité de la vitesse est : $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Definition : Vitesse de consommation/d'apparition d'un réactif/produit

Considérons un système fermé dans lequel se produit une transformation chimique à volume constant, caractérisée par la réaction d'équation bilan :



A et B représentent les réactifs, et C et D sont les produits.

On définit la vitesse de disparition des réactifs :

$$v(A_1) = -\frac{d[A_1]}{dt} \text{ et } v(A_2) = -\frac{d[A_2]}{dt}$$

On définit la vitesse de formation des produits :

$$v(A_3) = \frac{d[A_3]}{dt} \text{ et } v(A_4) = \frac{d[A_4]}{dt}$$

Propriété : Relation vitesse de réaction

On peut alors exprimer la vitesse de réaction en fonction des vitesse de formation et de disparition :

$$r = \frac{1}{\nu_i} \frac{d[A_i]}{dt}$$

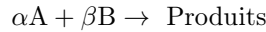
où ν_i est le coefficient stœchiométrique algébrique de l'espèce A_i . On note :

- $\nu_i > 0$ si A_i est un produit ;
- $\nu_i < 0$ si A_i est un réactif.

2 Lois de vitesse

Definition : Loi de vitesse avec ordre de réaction

Soit une réaction d'équation de la forme :



Les résultats expérimentaux montrent que dans certains domaines de température et de pression, si la réaction admet un ordre, on peut relier la vitesse de réaction aux concentrations des réactifs de la forme :

$$r = k \times [A]^{n_1} \times [B]^{n_2}$$

On appelle k la constante de vitesse, ne dépendant que de la température.

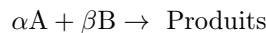
On appelle n_1 et n_2 les ordres partiels par rapport aux réactifs A et B, et $n = n_1 + n_2$ l'ordre global de la réaction.

Remarque :

- Les ordres partiels ne sont à priori pas égaux aux coefficients stœchiométriques de l'équation. Il faut partir du principe qu'ils seront différents.
- toutes les réactions n'admettent pas forcément d'ordre. Certaines réactions possèdent des modélisations plus complexes n'intégrant pas la notion d'ordre de réaction.
- La dimension de la constante de vitesse dépend de l'ordre global de la réaction.

Propriété : Réaction sans ordre

Soit une réaction d'équation de la forme :



Si la réaction n'admet pas d'ordre, on peut toujours exprimer à $t = 0$:

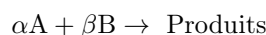
$$r(t = 0) = k [A]_0^{n_1} \times [B]_0^{n_2}$$

où $r(t = 0)$ est la vitesse de réaction initiale, $[A]_0$ et $[B]_0$ les concentrations initiales des réactifs.

On appelle alors n_1 et n_2 les ordres partiels initiaux et $n = n_1 + n_2$ l'ordre global initial de la réaction.

Propriété : Ordre global

Si pour une réaction de la forme :



On a initialement les réactifs en proportions stœchiométriques, on dresse alors un tableau d'avancement en fonction de l'avancement volumique :

	αA	+	βB	=	Produits
$t = 0 \text{ s}$	$[A]_0$		$[B]_0$		
t quelconque	$[A]_0 - \alpha x(t)$		$[B]_0 - \beta x(t)$		

Avec $\frac{[A]_0}{\alpha} = \frac{[B]_0}{\beta}$. On a alors la relation :

$$[A](t) = \frac{\alpha}{\beta} [B](t)$$

On a alors l'expression de la vitesse de réaction :

$$r = k \left(\frac{\alpha}{\beta} [B] \right)^{n_1} [B]^{n_2} \implies r = k' [B]^{n_1+n_2}$$

Avec $k' = \frac{\alpha^{n_1}}{\beta^{n_1}} k$ On obtient alors l'équation différentielle d'ordre global $n = n_1 + n_2$:

$$r = -\frac{1}{\beta} \frac{d[B]}{dt} = k' [B]^n$$

Exemple :

Soit la réaction $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5(\text{aq}) + \text{HO}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq}) + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{aq})$

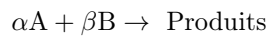
On fait un tableau d'avancement avec à $t = 0$: $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]_0 = [\text{HO}^-]_0 = a$

	$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5(\text{aq})$	+	$\text{HO}^-(\text{aq})$	\rightarrow	$\text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq})$	+	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{aq})$
$t = 0 \text{ s}$	a		a		0		0
t quelconque	$a - x(t)$		$a - x(t)$		$x(t)$		$x(t)$
$t \rightarrow +\infty$	0		0		a		a

On a alors : $r = k [\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]^{n_1} [\text{HO}^-]^{n_2} = k(a - x(t))^n$ avec $n = n_1 + n_2$ l'ordre global de la réaction.

Propriété : Dégénérescence de l'ordre

Si pour une réaction de la forme :



On a initialement un des réactif en large excès de manière à avoir $[B] \gg [A]$. On peut faire le tableau d'avancement de la réaction :

	αA	+	βB	=	Produits
$t = 0 \text{ s}$	$[A]_0$		$[B]_0$		
t quelconque	$[A]_0 - \alpha x(t)$		$[B]_0 - \beta x(t) \approx [B]_0$		

On a alors l'expression de la vitesse de réaction :

$$r = k [A]^{n_1} [B]^{n_2} \implies r = k [A]^{n_1} [B]_0^{n_2}$$

On obtient alors l'équation différentielle d'ordre partiel n_1 :

$$r = -\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k' [A]^n$$

avec $k' = k [B]_0^{n_2}$

Méthode : Méthode différentielle

On se place dans les conditions d'une expérience pour déterminer un ordre (soit dans des conditions stœchiométrique pour déterminer l'ordre global, soit dans le cas d'un réactif en excès pour déterminer l'ordre partiel). On a une équation de la forme :

$$r = \frac{1}{\nu_a} \frac{d[A]}{dt} = k' [A]^n$$

On applique le logarithme à l'équation différentielle :

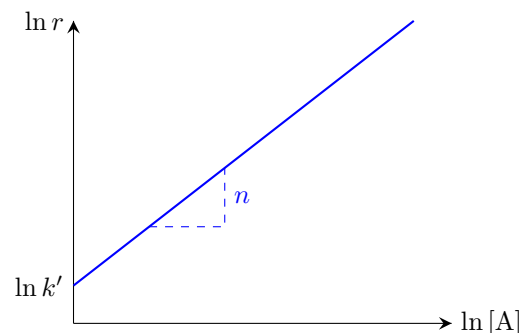
$$\ln r = \ln k' + n \ln [A]$$

On calcule r en traçant la tangente en un point expérimental comme expliqué plus haut.

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de r_i et $[A]_i$ effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
$\ln(r_1)$	$\ln([A]_1)$
$\ln(r_2)$	$\ln([A]_2)$
...	...
$\ln(r_N)$	$\ln([A]_N)$

$$a = n \quad b = \ln(k')$$



3 Mesures physiques

Propriété : suivi conductimétrique

Si la réaction étudiée met en jeu des ions en tant que réactifs ou produits tel que l'équation de la réaction peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^N \nu_i A_i^{z_i \pm} = 0$$

avec z_i le nombre de charges élémentaires, positives ou négatives, portées par l'ion $A_i^{z_i \pm}$. Alors la conductivité de la solution est :

$$\sigma = \sum_{i=1}^N z_i [A_i^{z_i \pm}] \lambda_i^\circ$$

avec λ_i° la conductivité molaire ionique limite de l'ion $A_i^{z_i \pm}$.

Exemple : Si on reprend l'équation : $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5(\text{aq}) + \text{HO}^-_{(\text{aq})} \rightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2^-_{(\text{aq})} + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{aq})$

Les ions HO^- sont introduit à l'aide de la dissolution de la soude $\text{NaOH}_{(\text{s})} \rightarrow \text{HO}^-_{(\text{aq})} + \text{Na}^+_{(\text{aq})}$. On a toujours à $t = 0$: $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]_0 = [\text{HO}^-]_0 = a$ et donc $[\text{Na}^+]_0 = a$

On effectue un suivi conductimétrique et on a :

- à $t = 0$: $\sigma_0 = \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+]_0 + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-]_0 = (\lambda_{\text{Na}^+} + \lambda_{\text{HO}^-})a$;
- à t quelconque : $\sigma(t) = \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+] + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-] + \lambda_{\text{CH}_3\text{CO}_2^-} [\text{CH}_3\text{CO}_2^-] = \lambda_{\text{Na}^+}a + \lambda_{\text{HO}^-}(a - x(t)) + \lambda_{\text{CH}_3\text{CO}_2^-}x(t)$;
- à $t \rightarrow +\infty$: $\sigma_\infty = \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+]_\infty + \lambda_{\text{CH}_3\text{CO}_2^-} [\text{CH}_3\text{CO}_2^-]_\infty = (\lambda_{\text{Na}^+} + \lambda_{\text{CH}_3\text{CO}_2^-})a$.

On peut alors exprimer les concentrations :

$$[\text{CH}_3\text{CO}_2^-] = [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] = x(t) = a \frac{\sigma_0 - \sigma(t)}{\sigma_0 - \sigma_\infty}$$

$$[\text{HO}^-] = [\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5] = a - x(t) = a \frac{\sigma(t) - \sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_\infty}$$

Il est très difficile de mesurer précisément σ_0 , car à peine les réactifs mis en solution la réaction démarre. On l'obtient par extrapolation des mesures. On peut en revanche obtenir σ_∞ en mesurant sur un temps très long.

Propriété : Suivi

La spectrophotométrie d'absorption dans l'ultra-violet et le visible est une technique très employée en analyse physico-chimique.

Différentes situations permettent l'emploi de la spectrophotométrie en cinétique chimique :

- un réactif (ou un produit) présente un spectre d'absorption UV-visible alors que le produit (ou le réactif) n'absorbe pas.
- réactifs et produits présentent des maxima dans leurs spectres d'absorption ; dans ce cas il est nécessaire de connaître les coefficients d'absorptivité molaire des espèces en présence et de procéder à un étalonnage pour effectuer des mesures cinétiques.

L'absorbance de la lumière est alors calculée grâce à la loi de Beer-Lambert :

$$A = -\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \epsilon l C$$

avec :

- I_0 l'intensité lumineuse du faisceau incident ;
- I l'intensité lumineuse du faisceau transmis ;
- $\epsilon(\lambda)$ le coefficient d'absorptivité molaire à la longueur d'onde λ ;
- C la concentration de l'espèce absorbante en solution ;
- l la longueur de la cuve.

Cette loi est linéaire pour des solutions diluées, si on a plusieurs espèces absorbante A_i on peut alors calculer :

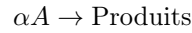
$$A = l \sum_{i=1}^N \epsilon_i [A_i]$$

Remarque : Choix de la longueur d'onde

On choisit la longueur d'onde λ pour laquelle l'absorbance est maximum pour diminuer l'incertitude sur la mesure.

4 Méthode intégrale**Definition : Principe**

Pour une réaction admettant un ordre du type :



La vitesse de réaction s'écrit :

$$r = -\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^n$$

Pour chaque ordre, on pose $[A](t=0) = [A]_0$, et on utilise pour résoudre cette équation la méthode de séparation des variables.

Propriété : Ordre 0

L'équation différentielle devient alors :

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k$$

On obtient alors : $[A](t) = [A]_0 - \alpha kt$

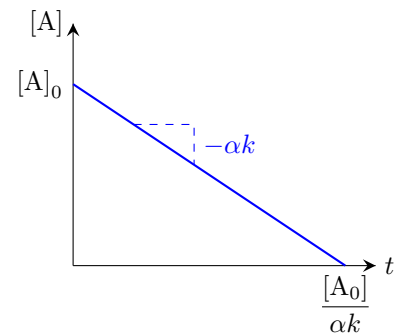
On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de t_i et $[A]_i$ effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
t_1	$[A]_1$
t_2	$[A]_2$
...	...
t_N	$[A]_N$

$$a = -\alpha k \quad b = [A]_0$$

On en déduit immédiatement que :

$$d[A] = -\alpha k dt \iff \int_{[A]_0}^{[A](t)} d[A] = -\alpha k \int_{t=0}^t dt'$$

**Propriété : Ordre 1**

L'équation différentielle devient alors : $-\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k[A]$

On en déduit immédiatement que :

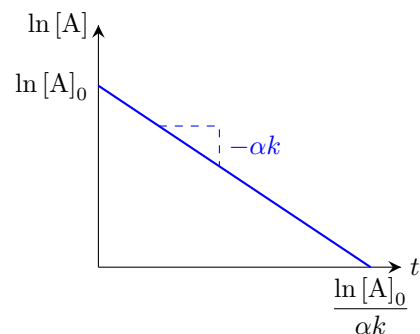
$$\frac{1}{[A]} d[A] = -\alpha k dt \iff \int_{[A]_0}^{[A](t)} \frac{1}{[A]} d[A] = -\alpha k \int_{t=0}^t dt' \implies \ln \frac{[A]}{[A]_0} = -\alpha kt$$

On obtient alors : $[A](t) = [A]_0 e^{-\alpha kt}$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de t_i et $[A]_i$ effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
t_1	$\ln([A]_1)$
t_2	$\ln([A]_2)$
...	...
t_N	$\ln([A]_N)$

$$a = -\alpha k \quad b = \ln([A]_0)$$



Propriété : Ordre 2

L'équation différentielle devient alors :

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k [A]^2$$

On en déduit immédiatement que :

$$\frac{1}{[A]^2} d[A] = -\alpha k dt \iff \int_{[A]_0}^{[A](t)} \frac{1}{[A]^2} d[A] = -\alpha k \int_{t=0}^t dt' \implies -\frac{1}{[A]} + \frac{1}{[A]_0} = -\alpha k t$$

On obtient alors : $[A](t) = \frac{[A]_0}{1 + \alpha [A]_0 k t}$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de t_i et $[A]_i$ effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
t_1	$\frac{1}{[A]_1}$
t_2	$\frac{1}{[A]_2}$
...	...
t_N	$\frac{1}{[A]_N}$

$$a = -\alpha k \quad b = \frac{1}{[A]_0}$$
Definition : Temps de demi-réaction

On définit pour une réaction donnée le temps de demi-réaction comme le temps nécessaire pour consommer la moitié de la quantité de matière initiale du réactif limitant A . On peut alors définir le temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$:

$$[A](t = t_{\frac{1}{2}}) = \frac{[A]_0}{2}$$

Propriété : Expression de $t_{1/2}$

On peut alors exprimer pour chaque ordre le temps de demi-réaction en fonction de la concentration initiale $[A]_0$. On peut alors effectuer plusieurs expériences à partir de plusieurs concentrations initiales différentes, en mesurant $t_{\frac{1}{2}}$ en fonction de $[A]_0$ on peut alors déterminer l'ordre de la réaction.

Pour l'ordre $n = 0$: On a

$$[A](t = t_{\frac{1}{2}}) = [A]_0 - \alpha k t_{\frac{1}{2}} = \frac{[A]_0}{2} \implies t_{\frac{1}{2}} = \frac{[A]_0}{2\alpha k}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de $t_{1/2,i}$ et $[A]_{0,i}$ effectuées de type $Y = aX$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
$t_{1/2,1}$	$[A]_{0,1}$
$t_{1/2,2}$	$[A]_{0,2}$
...	...
$t_{1/2,N}$	$[A]_{0,N}$

$$a = \frac{1}{2\alpha k} > 0$$

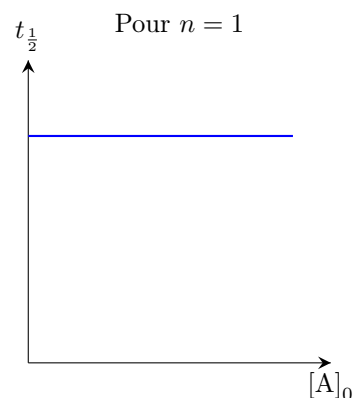
Pour l'ordre $n = 1$: On a

$$[A](t = t_{\frac{1}{2}}) = [A]_0 e^{-\alpha k t_{\frac{1}{2}}} = \frac{[A]_0}{2} \implies t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\alpha k}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de $t_{1/2,i}$ et $[A]_{0,i}$ effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
$t_{1/2,1}$	$[A]_{0,1}$
$t_{1/2,2}$	$[A]_{0,2}$
...	...
$t_{1/2,N}$	$[A]_{0,N}$

$$a = 0$$



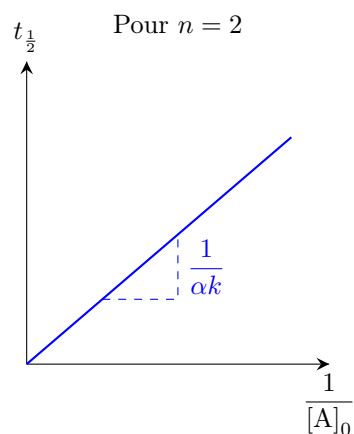
Pour l'ordre $n = 2$: On a

$$[A](t = t_{1/2}) = \frac{[A]_0}{1 + \alpha [A]_0 k t_{1/2}} = \frac{[A]_0}{2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{\alpha k [A]_0}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de $t_{1/2,i}$ et $[A]_{0,i}$ effectuées de type $Y = aX$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
$t_{1/2,1}$	$\frac{1}{[A]_{0,1}}$
$t_{1/2,2}$	$\frac{1}{[A]_{0,2}}$
...	...
$t_{1/2,N}$	$\frac{1}{[A]_{0,N}}$

$$a = \frac{1}{\alpha k} > 0$$



5 Influence de la température

Loi d'Arrhenius

On modélise la dépendance de k avec la température par la loi d'Arrhénius :

$$k = A e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

avec E_a l'énergie d'activation en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$, R la constante des gaz parfaits, et T la température en K. Ici A est seulement un pré-facteur de la même unité que k .

Méthode : Mesure de E_a

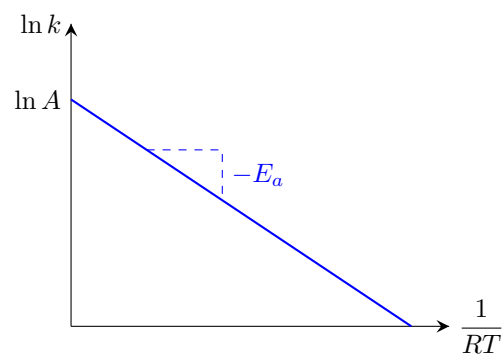
On peut mesurer l'énergie d'activation en faisant le suivi cinétique d'une réaction à différentes températures. Pour chaque suivi on effectue une mesure de $k(T)$ et on trace en suite :

$$\ln(k) = \ln(A) - \frac{E_a}{RT}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de k_i et T_i effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
$\frac{1}{T_1}$	$\ln(k_1)$
$\frac{1}{T_2}$	$\ln(k_2)$
...	...
$\frac{1}{T_N}$	$\ln(k_N)$

$$a = -\frac{E_a}{R} \quad b = \ln(A)$$



Remarque : Échelle microscopique

À l'échelle microscopique, c'est la collision entre les molécules réactifs qui provoque la formation des molécules produits. La collision entre les molécules est directement reliée à l'agitation thermique des molécules et donc à la température T en K.

Chimie 5 : Solides cristallins

1 Le modèle du cristal parfait

Definition : Solide cristallin

Un solide cristallin est un assemblage d'entités (atomes, molécules ou ions) caractérisé par une structure se répétant périodiquement dans les trois directions de l'espace. Il est ordonné sur des distances très grandes par rapport à la distance interatomique.

Remarque : Solide amorphe

Un solide amorphe est un assemblage d'entités (atomes, molécules ou ions) ayant un ordre à courte distance seulement (quelques nanomètres) mais par d'ordre à longue distance. Il ne comporte pas de structure périodique.

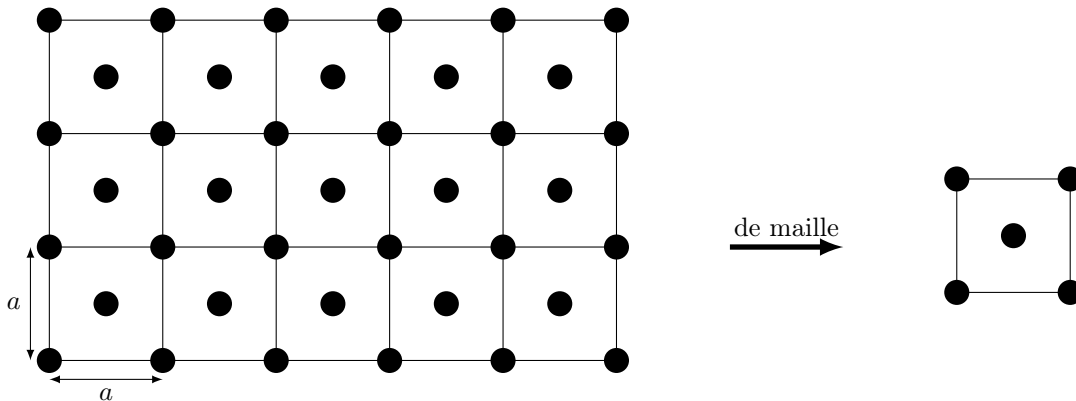
Definition : Maille d'un cristal

Un cristal parfait est décrit par une maille qui se répète périodiquement dans les trois directions de l'espace. L'étude d'une maille permet de connaître les propriétés de l'ensemble du cristal.

On se limitera à l'étude de mailles en forme de parallélépipède.

Exemple : Maille carrée bidimensionnelle

On considère le réseau représenté ci-dessous de paramètre de maille a :



Ici la maille est carré et on peut donc décrire la maille avec un seul paramètre a . Dans le cas général pour une maille à trois dimensions on a besoin de trois paramètres a , b et c .

Definition : Population de la maille

La population de la maille est le nombre d'entités (atomes, molécules ou ions) par maille. Pour calculer la population on divise chaque entité par le nombre de maille auquel elle appartient et on fait la somme.

Exemple :

Pour la maille ci-dessus à deux dimensions on a la population qui vaut : $1 \times 1 + 4 \times \frac{1}{4} = 2$ atomes par mailles.

Definition : Coordinence d'un atome

La coordinence d'un atome est le nombre de ses plus proches voisins.

Remarque :

Les corps pur peuvent posséder plusieurs structure cristallines, on appelle ces différentes structures des variétés allotropiques. Le passage de l'une à l'autre est une transition de phase allotropique.

Les limites du modèle des cristaux parfait sont :

- L'énergie cinétique non nulle des atomes sur le réseau, l'idée d'atomes immobiles est fausse.
- La présence de lacunes ou d'impuretés qui vient perturber la structure localement et modifie les propriétés physiques du cristal.

Definition : Modèle des sphères dures

On associe chaque atome à une boule de rayon R_{at} indéformable et en contact avec ses plus proches voisins. On peut alors relier R_{at} au paramètre de maille a .

Definition : Compacité

On définit la compacité d'un cristal comme le rapport du volume occupé par les sphères dures sur le volume de la maille :

$$\phi = \frac{P \times V_{\text{sphere}}}{V_{\text{maille}}}$$

Propriété : masse volumique théorique

On peut définir la masse volumique du cristal à partir de la masse volumique d'une maille :

$$\rho = \frac{P \times m_{\text{atome}}}{a^3} = \frac{PM}{\mathcal{N}_A a^3}$$

avec M la masse molaire atomique de l'élément considéré et \mathcal{N}_A la constante d'Avogadro.

Definition : Site interstitiel

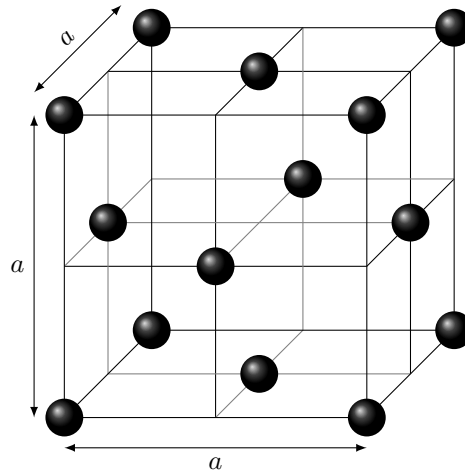
Un site interstitiel est un espace de vide situé entre les sphères non tangentes. La forme du site est donnée en reliant tous les atomes autour du centre du site interstitiel. Nous verrons deux types de sites :

- les sites octaédriques ;
- les sites tétraédriques.

2 La structure CFC

Definition : Structure cubique à faces centrées

Un atome est présent sur chaque sommet et au centre de chaque face de la maille.

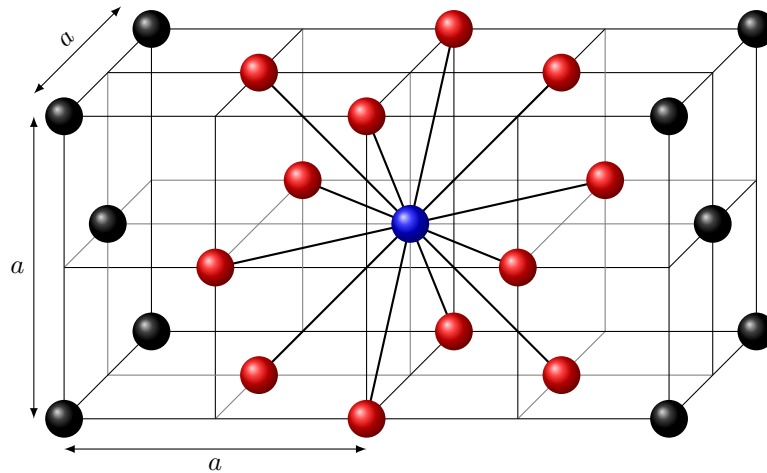
**Propriété : Coordinence et population**

Pour déterminer la coordinence il faut déterminer qui sont les plus proches voisins, les atomes au centre d'une face sont distant des atomes sur les sommets d'une distance $d_1 = a \frac{\sqrt{2}}{2}$, ils sont distant des autres atomes au centre d'une face d'une distance $d_2 = d_1$. Chaque atome possède alors :

$$C = 12$$

La population de la maille est 8 atomes partagés par 8 mailles (aux sommets de la maille) et 6 atomes partagés par 2 mailles (aux centres des faces de la mailles) :

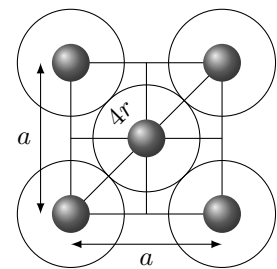
$$P = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ atomes par mailles}$$



Propriété : Condition de tangence

On se place dans le plan d'une face :
 À partir du modèle des sphères dures on peut voir sur une maille CFC que :

$$a\sqrt{2} = 4r \implies r = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$



Propriété : Compacité

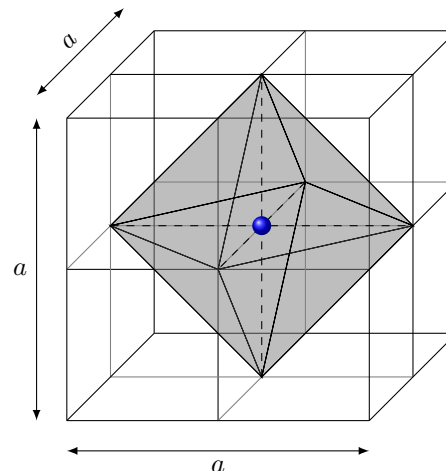
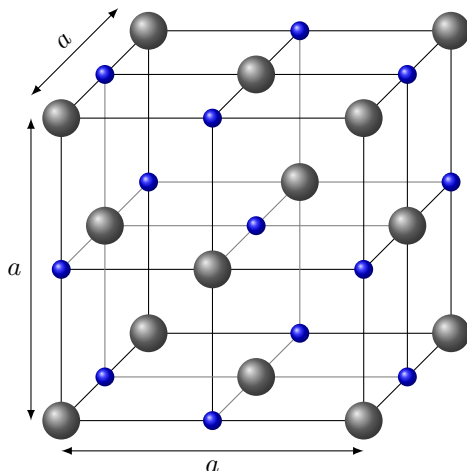
On définit la compacité d'un cristal comme le rapport du volume occupé par les sphères dures sur le volume de la maille :

$$\phi = \frac{P \times V_{\text{sphère}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4P\pi r^3}{a^3} \implies \phi = \frac{16}{3}\pi \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^3 \simeq 0,74$$

Definition : Site octaédrique d'une structure CFC

Un site octaédrique est l'emplacement situé au centre d'un octaèdre régulier dont les 6 sommets sont des nœuds du réseau. Les sites octaédriques d'un réseau CFC sont situés :

- 1 au centre de la maille ;
- 1 au centre de chaque arête.



Les sites octaédriques d'une structure CFC forment une structure CFC décalée de $\frac{a}{2}$ par rapport à la structure de base.

Propriété : Habitabilité d'un site octaédrique

On cherche le rayon r_O d'une sphère dure de plus grande taille qu'on peut placer sur un site octaédrique en conservant

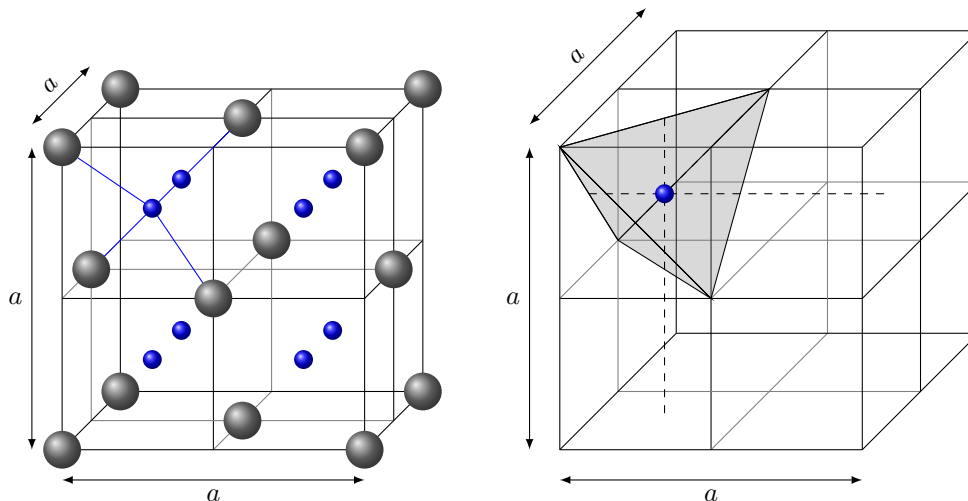
la condition de tangence.

$$a = 2r + 2r_O \implies \frac{4r}{\sqrt{2}} = 2r + 2r_O \implies r_O = r(\sqrt{2} - 1)$$

Definition : Site tétraédriques d'une structure CFC

Un site tétraédrique d'un réseau est un emplacement situé au centre d'un tétraèdre régulier dont les 4 sommets sont des atomes de la structure. Ils sont situés :

- Au centre d'un 8^e de cube de la maille.



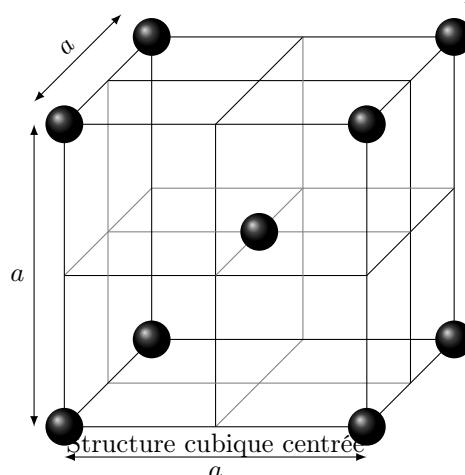
Propriété : Habitabilité d'un site tétraédrique

On cherche le rayon r_T d'une sphère dure de plus grande taille qu'on peut placer sur un site octaédrique en conservant la condition de tangence.

$$a\sqrt{3} = 4r + 4r_T \implies \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = r + r_O \implies r_O = r \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

Remarque :

Il existe également les structures cubiques centrées et hexagonales. La structure CFC est à connaître dans le programme mais les autres structures classiques peuvent être étudiée lors d'exercice de TD, de colle, de DS, de concours...



3 Les différentes familles de cristaux

Definition : Les cristaux métalliques

Les propriétés macroscopiques des métaux sont :

- bonne conductivité électrique et thermique ;
- ils se déforment facilement (ductible) ;

- réfléchissent la lumière ;

On peut faire des alliages en ajoutant d'autres éléments dans la structure.

D'un point de vue microscopique :

- La liaison métallique est forte ;
- elle est non directionnelle ;
- La faible électronégativité des métaux explique la conductivité.

Remarque :

La liaison est une liaison forte et non directionnelle, c'est-à-dire que la liaison d'un atome est aussi forte avec tous ses voisins.

La force de la liaison implique une température de fusion élevée des métaux : $T_{fus} \sim 500 \text{ K}$ à 1000 K .

La non directionnalité de la liaison explique la malléabilité des métaux (aptitude à se déformer sans se rompre).

La faible électronégativité des métaux explique la bonne conductivité thermique et électrique.

Definition : Cristal ionique

Ils sont formés de 2 éléments ioniques et donc :

- la condition de tangence est entre un anion et un cation ;
- la coordinence d'un ion correspond au nombre de plus proche voisin de charge opposé.

La liaison ionique est forte et non directionnelle.

La force de la liaison implique une température de fusion élevée des métaux : $T_{fus} \sim 500 \text{ K}$ à 1000 K .

La solubilité des cristaux dans les solvant polaire s'explique par la nature ionique des cristaux.

Definition : Les cristaux covalents

C'est un cristal où les atomes sont liés par des liaisons covalentes, celle-ci est :

- forte, ce qui donne des température de changement d'état élevé.
- directionnelle : la liaison ne peut pas se défaire puis se refaire avec un autre atome, ce qui explique la dureté.
- localisée : les électrons ne peuvent pas se déplacer, donc les cristaux sont de mauvais conducteurs.

Exemple : NaCl(s)

On considère une maille de chlorure de sodium où les ions Na^+ forment une maille CFC et les ions Cl^- se situent au centre des sites octaédriques de la maille.

Coordinence des ions :

Condition de tangence :

Exemple : Le carbone Diamant

Les atomes de carbones dans le diamant forment un cristal covalent de type CFC avec un site tétraédrique sur deux occupé. C'est un CFC non compact.

Coordinence :

Condition de tangence :

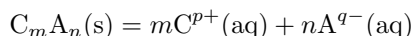
Compacité :

Chimie 6 : Dissolution et précipitation

1 Précipitation et dissolution d'un sel

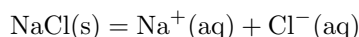
Definition : Équation de réaction de dissolution

Un solide ionique est un assemblage neutre ordonné de cations C^{p+} et d'anions A^{q-} . Au contact d'un solvant (pour nous l'eau), une partie du solide peut se dissoudre en se dissociant suivant l'équation de la réaction :



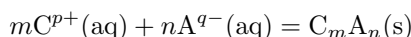
Exemple :

Si on introduit du chlorure de sodium $NaCl(s)$ dans de l'eau, celui-ci se dissout en ses ions constitutifs :



Definition : Équation de réaction de précipitation

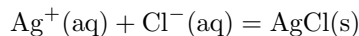
Une réaction de précipitation est une réaction au cours de laquelle des ions C^{p+} et A^{q-} en solution réagissent pour former un cristal ionique encore appelé sel. On peut modéliser cette réaction par l'équation suivante :



C'est la réaction inverse à la réaction de dissolution.

Exemple :

On mélange dans un tube à essai quelques millilitres d'une solution de nitrate d'argent (Ag^+ , NO_3^-) et quelques millilitres d'une solution de chlorure de potassium (K^+ , Cl^-). On observe la formation d'un précipité blanc. Ce solide est du chlorure d'argent $AgCl(s)$. On dit que les ions Ag^+ et Cl^- ont précipité en chlorure d'argent :



Propriété : Neutralité du solide

La neutralité du solide impose : $mp = nq$

Definition : Produit de solubilité

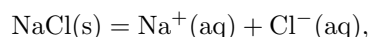
Lors d'une réaction de dissolution, on définit la constante d'équilibre K_s appelée produit de solubilité du solide $C_m A_n(s)$ par :

$$K_s = a(C^{p+})^m a(A^{q-})^n = \frac{[C^{p+}]^m [A^{q-}]^n}{(c^\circ)^{m+n}}$$

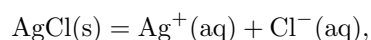
On définit également :

$$pK_s = -\log K_s$$

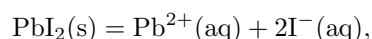
Exemple :



$$K_s = 32,98$$



$$K_s = 1,78 \times 10^{-10}$$



$$K_s = 9,8 \times 10^{-9}$$

Propriété : Condition de précipitation

Soit une solution contenant des ions $C^{p+}(aq)$ à la concentration C_1 de volume V_1 qu'on mélange à une solution contenant des ions $A^{q-}(aq)$ à la concentration C_2 de volume V_2 . Après mélange on obtient une solution contenant des ions aux concentrations :

$$[C^{p+}]_0 = \frac{C_1 V_1}{V_1 + V_2} \quad \text{et} \quad [A^{q-}]_0 = \frac{C_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

On peut alors calculer le quotient de réaction initiale :

$$Q_{r,i} = \frac{[C^{p+}]_0^m [A^{q-}]_0^n}{(c^\circ)^{m+n}}$$

On a alors deux situations possibles :

- Si $Q_{r,i} < K_s$: aucun précipité se forme.
- Si $Q_{r,i} > K_s$: il y a apparition d'un précipité solide $P_m A_n(s)$.

2 Solubilité

Definition : Solution saturée/insaturée

On appelle solution saturée, une solution dans laquelle la quantité maximale du sel a été dissoute. À l'état final, le sel existe dans la solution. Ainsi, l'état final est un état d'équilibre.

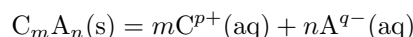
Une solution dans laquelle on peut encore dissoudre ce sel est dite insaturée. À l'état final, le sel n'existe pas dans la solution. Ainsi, l'état final n'est pas un état d'équilibre.

Definition : Solubilité

La solubilité s d'un solide est la quantité maximale de solide pouvant être dissoute par litre d'eau pure. Elle s'exprime souvent en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Propriété : Détermination de la solubilité

Pour un solide $C_m A_n(s)$ qu'on dissout dans l'eau suivant la réaction de dissolution :



de produit de solubilité K_s , on ajoute s mole par litre d'eau et on obtient le tableau d'avancement suivant :

	$C_m A_n(s)$	=	$m C^{p+}(aq)$	+	$n A^{q-}(aq)$
$t = 0 \text{ s}$			0		0
$t \rightarrow +\infty$			ms		ns

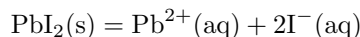
On obtient alors l'expression du produit de solubilité :

$$K_s = \frac{(ms)^m (ns)^n}{(c^\circ)^{m+n}} \implies s = c^\circ \left(\frac{K_s}{m^m n^n} \right)^{\frac{1}{m+n}}$$

Exemple :

On va chercher à calculer la solubilité s_m en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ de l'iodure de plomb $\text{PbI}_2(s)$ dans de l'eau pure. On donne $pK_s(\text{PbI}_2) = 8,0$ et $M(\text{PbI}_2) = 461 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

La réaction de dissolution de PbI_2 est :



On dresse le tableau d'avancement après avoir versé s moles de sel par litre d'eau pure :

	$\text{PbI}_2(s)$	=	$\text{Pb}^{2+}(aq)$	+	$2\text{I}^{-}(aq)$
$t = 0 \text{ s}$			0		0
$t \rightarrow +\infty$			s		$2s$

On a saturé la solution et on peut donc calculer la constante d'équilibre K_s en fonction de s :

$$K_s = \frac{[\text{Pb}^{2+}] [\text{I}^{-}]^2}{(c^\circ)^3} = \frac{4s^3}{(c^\circ)^3} \implies s = c^\circ \left(\frac{K_s}{4} \right)^{\frac{1}{3}}$$

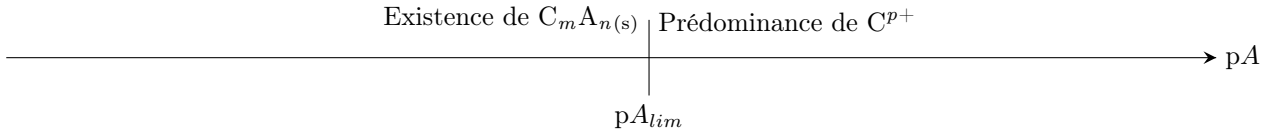
AN : $s = 1,36 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. En multipliant la masse molaire, on obtient : $s_m = 627 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Propriété : Diagramme d'existence

On considère une solution de C^{p+} à la concentration C_0 . On ajoute à cette solution de concentration $[A^{q-}]$. On cherche la concentration limite $[A^{q-}]_{lim}$ tel que :

$$K_s = (c_0)^m [A^{q-}]_{lim}^n \implies pK_s = -m \log c_0 + npA_{lim}$$

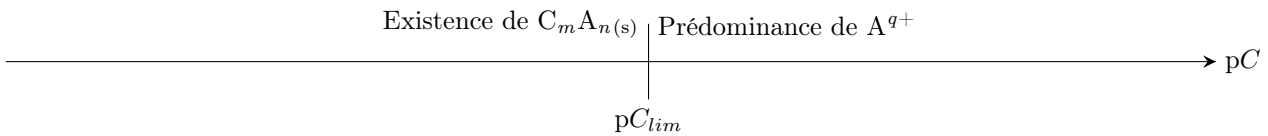
On définit alors $pA = -\log [A^{q-}]$ et on peut tracer la diagramme d'existence de $C_m A_n(s)$ en fonction de pA :



On considère une solution de A^{q-} à la concentration C_0 . On ajoute à cette solution de concentration $[C^{p+}]$. On cherche la concentration limite $[C^{p+}]_{lim}$ tel que :

$$K_s = (c_0)^n [C^{p+}]_{lim}^m \implies pK_s = -n \log c_0 + mpC_{lim}$$

On définit alors $pC = -\log [C^{p+}]$ et on peut tracer la diagramme d'existence de $C_m A_n(s)$ en fonction de pC :



3 Facteurs d'influences

Propriété : Influence de la température

La solubilité dépend de la température car le produit de solubilité est une constante qui ne dépend que de la température ($K_s(T)$). La plupart du temps la solubilité augmente avec la température sauf pour le carbonate de calcium (le calcaire).

Propriété : Influence des ions communs

Si un solide $C_m A_n(s)$ est versé dans une solution contenant une concentration $[A^{q-}]_0$. Alors on définit la solubilité s' tel que $s' < s$ avec s la solubilité de $C_m A_n(s)$ dans de l'eau pure.

Exemple :

Déterminons la solubilité s' du carbonate de calcium dans de l'eau contenant déjà des ions carbonate résultant d'une dissolution de carbonate de magnésium telle que $[CO_3^{2-}]_0 = c = 2,6 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$:

	$\text{CaCO}_3(s)$	=	$\text{Ca}^{2+}(aq)$	+	$\text{CO}_3^{2-}(aq)$
$t = 0 \text{ s}$			0		c
$t \rightarrow +\infty$			s'		$s' + c$

À l'équilibre on suppose que $s' \ll c$ et on a : $K_s = \frac{s'(s' + c)}{(c^\circ)^2} \approx \frac{s'c}{(c^\circ)^2} = 5,0 \times 10^{-9} \implies s' = \frac{K_s (c^\circ)^2}{c}$

Propriété : Influence du pH

Si l'un des ions présente un caractère acido-basique alors le pH de la solution influence la solubilité du solide.

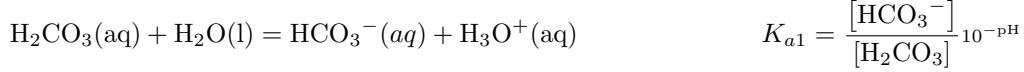
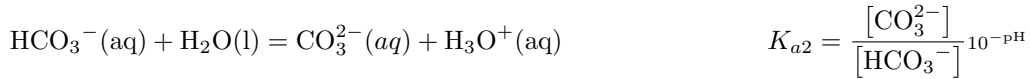
Exemple :

Déterminons les liens entre la solubilité s du carbonate de calcium et le pH de la solution. On considère dans un premier temps la dissolution du carbonate de calcium dans de l'eau jusqu'à saturation de la solution :

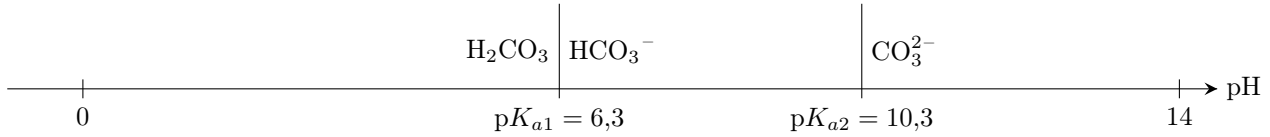
	$\text{CaCO}_3(s)$	=	$\text{Ca}^{2+}(aq)$	+	$\text{CO}_3^{2-}(aq)$
EI	sV		0		0
EF	0		sV		sV

On voit alors que $[\text{Ca}^{2+}] = s$. Pour l'ion carbonate, à l'équilibre sa concentration dépend du pH car c'est une base qui

dans les réactions :



On peut alors tracer le diagramme de prédominance :



À l'équilibre la conservation de la matière nous donne :

$$s = [\text{CO}_3^{2-}] + [\text{HCO}_3^-] + [\text{H}_2\text{CO}_3]$$

de plus :

$$K_s = \frac{[\text{Ca}^{2+}] [\text{CO}_3^{2-}]}{(c^\circ)^2} = \frac{s [\text{CO}_3^{2-}]}{(c^\circ)^2}$$

On se place alors dans les différents domaines de prédominance :

- pour $\text{pH} > \text{p}K_{a2} + 1$: $[\text{CO}_3^{2-}] \gg [\text{HCO}_3^-] \gg [\text{H}_2\text{CO}_3]$

$$s \simeq [\text{CO}_3^{2-}] \implies \log\left(\frac{s}{c^\circ}\right) = -\frac{1}{2}\text{p}K_s$$

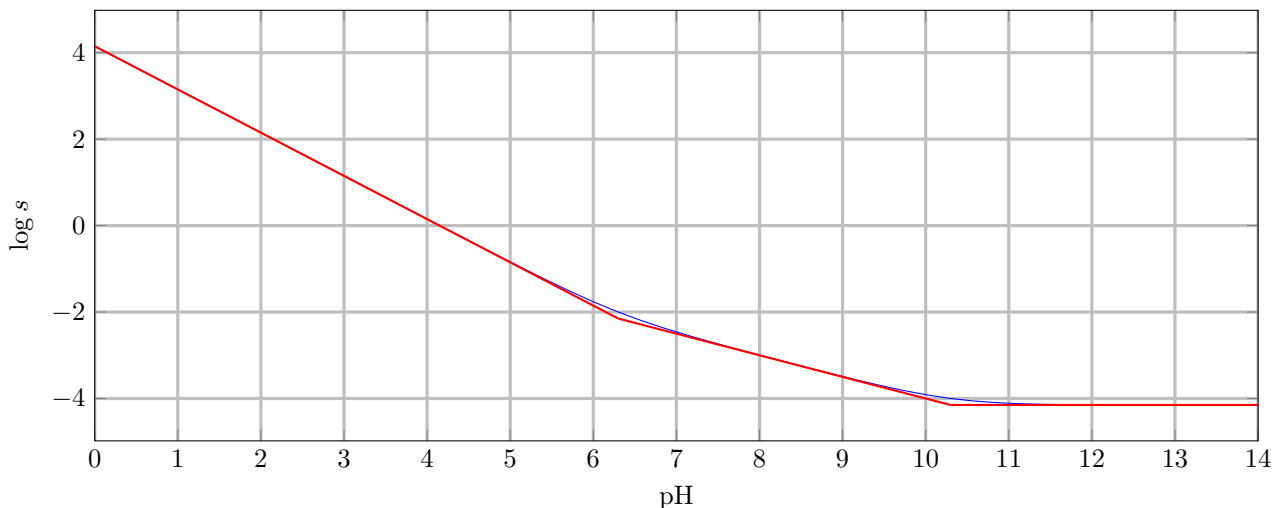
- pour $\text{p}K_{a1} + 1 < \text{pH} < \text{p}K_{a2} - 1$:

$$s \simeq [\text{HCO}_3^-] \quad \text{or} \quad [\text{CO}_3^{2-}] = [\text{HCO}_3^-] 10^{\text{pH} - \text{p}K_{a2}} \implies \log\left(\frac{s}{c^\circ}\right) = -\frac{1}{2}\text{p}K_s - \frac{1}{2}(\text{pH} - \text{p}K_{a2})$$

- pour $\text{pH} < \text{p}K_{a1} - 1$: $[\text{H}_2\text{CO}_3] \gg [\text{HCO}_3^-] \gg [\text{CO}_3^{2-}]$

$$s \simeq [\text{H}_2\text{CO}_3] \quad \text{or} \quad [\text{H}_2\text{CO}_3] = [\text{CO}_3^{2-}] 10^{2\text{pH} - \text{p}K_{a2} - \text{p}K_{a1}} \implies \log\left(\frac{s}{c^\circ}\right) = -\frac{1}{2}\text{p}K_s + \frac{1}{2}(\text{p}K_{a2} + \text{p}K_{a1}) - \text{pH}$$

On peut alors tracer avec $\text{p}K_s = 8,3$:



Chimie 7 : Réaction d'oxydo-réduction

1 Oxydants et réducteurs

Definition : Couple Oxydant/Réducteur

Un oxydant est une espèce susceptible de capter un ou plusieurs électrons. Lorsqu'il gagne des électrons, subit une réduction. Il devient un réducteur.

Un réducteur est une espèce susceptible de céder un ou plusieurs électrons., lorsqu'il perd des électrons, subit une oxydation. Il devient un oxydant.

Lors d'une oxydation, un réducteur est transformé en son oxydant conjugué. Ils forment alors un couple Red/Ox.

Lors d'une réduction, un oxydant est transformé en son réducteur conjugué.

Propriété : Demi-équation d'un couple Ox/Red

L'oxydant et le réducteur sont reliés par une demi-équation du type :



La demi-équation doit être équilibrée en atomes et charges avec des molécules de H_2O et des ions hydronium qu'on note H^+ par simplicité.

Definition : Nombre d'oxydation

Le nombre d'oxydation permet de caractériser l'état d'oxydation d'un élément dans une molécule ou un ion. On le définit en attribuant la charge électrique qu'il porterait si on attribuait les électrons d'une liaison à l'atome le plus électronégatif. Lors d'une oxydation ou d'une réduction le nombre d'oxydation d'un ou plusieurs éléments varie.

Propriété : Règles de calcul du nombre d'oxydation

Les nombres d'oxydations sont écrits en chiffres romains, pour connaître le nombre d'oxydation d'un élément on utilise les règles suivantes :

- Le n.o. d'un élément dans une espèce monoatomique est égal à la charge algébrique de cette espèce.

Exemple : n.o.(Fe(s))=0, n.o.(Fe²⁺(aq))=+II, n.o.(Fe³⁺(aq))=+III, n.o.(Cl⁻(aq))=-I

- Dans un édifice polyatomique, la somme des nombres d'oxydations de chaque élément est égale à la charge de l'édifice.

Exemple : Dans O_2 : n.o(O)=0

- Lors de l'attribution des électrons d'une liaison covalente à l'atome le plus électronégatif, le n.o(O)=-II dans les oxydes de type M_xO_y ou les hydroxydes de type $\text{M}_x(\text{OH})_y$.

Exemple : Dans MnO_4^- : n.o(Mn)+4× n.o(O)=-I soit n.o(Mn)=+VII

- Lors de l'attribution des électrons d'une liaison covalente à l'atome le plus électronégatif, le n.o(O)=-I dans les peroxydes de type R-O-O-R.

Exemple : Dans H_2O_2 : n.o(H)=+I, n.o(O)=-I

- Le plus grand nombre d'oxydation accessible correspond à son nombre d'électron de valence.

Exemple : Mg possède deux électrons de valences, son plus grand nombre d'oxydation possible est +II

- Le plus petit nombre d'oxydation accessible correspond au nombre d'électrons à ajouter pour obtenir la configuration électronique d'un gaz noble qui le suit.

Exemple : O possède le nombre d'électrons de valence d'un gaz noble quand son n.o est -II

Propriété : nombre d'oxydation lors d'une réduction ou d'une oxydation

Le nombre d'oxydation d'un élément subissant une oxydation augmente.

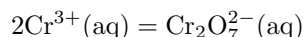
Le nombre d'oxydation d'un élément subissant une réduction diminue.

Propriété : Nombre d'oxydation et demi-équation

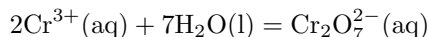
Lorsqu'un élément est oxydé, son nombre d'oxydation augmente du nombre d'électron qu'il a cédé. On peut donc déduire d'une demi-équation électronique une relation entre les n.o. d'un élément pour un couple Ox/Red et le nombre d'électron échangé.

Méthode : Écrire une demi-équation redox à l'aide des nombres d'oxydation

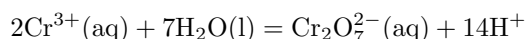
- Placer le réactif et sa forme conjuguée de chaque côté du signe $\ll = \gg$.
- Assurer la conservation de l'élément commun à l'oxydant et au réducteur.



- Assurer l'équilibrage des atomes d'oxygène O à l'aide de molécules d'eau H_2O :



- Assurer l'équilibrage des atomes d'hydrogène H à l'aide d'ions H^+ :



- Assurer la conservation de la charge avec des électrons e^-



- On peut calculer le n.o. inconnu à l'aide de la demi-équation :

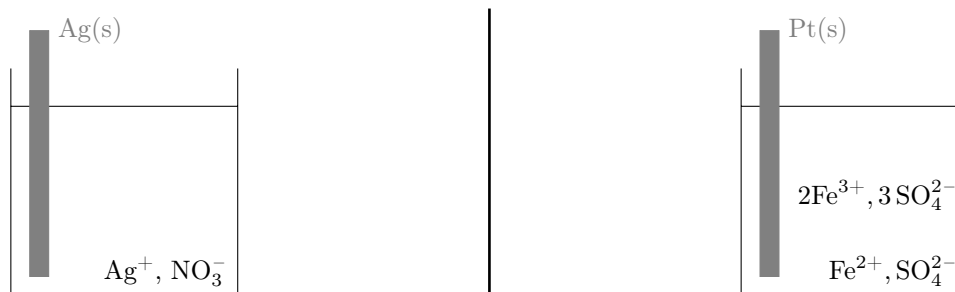
$$2n.o(\text{Cr}^{3+}) = 2n.o(\text{Cr} \in \text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) - 6 \quad \Rightarrow \quad n.o(\text{Cr} \in \text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) = +VI$$

Exemple : Exemples à connaître

Nom	Formule	Couple
Ion permanganate	MnO_4^-	$\text{MnO}_4^- / \text{Mn}^{2+}$
Ion hypochlorite	ClO^-	$\text{ClO}^- / \text{Cl}^-$
Peroxyde d'hydrogène	H_2O_2	$\text{H}_2\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$
Ion thiosulfate	$\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	$\text{S}_4\text{O}_6^{2-} / \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$

2 Piles et potentiels**Definition : Demi-pile**

C'est le lieu où on peut avoir une réaction soit d'oxydation soit de réduction. Elle est composée d'un conducteur métallique qui peut être le réducteur du couple (électrode active) ou d'un métal inerte qui ne réagit pas avec les espèces. L'ensemble des deux espèces du couple sont en contact avec l'électrode.

Exemple :**Definition : Anode et cathode**

L'électrode où la réaction d'oxydation a lieu est appelée anode tandis que l'électrode où la réaction de réduction a lieu est appelée cathode.

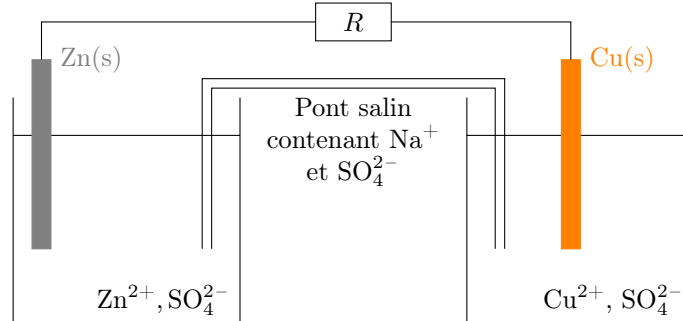
Definition : Pile électrochimique

Une pile électrochimique est l'association en série de deux demi-piles reliées par une jonction électrolytique qui peut être :

- une paroi poreuse ;
- un pont salin.

Exemple : La pile Daniell

$[Zn^{2+}] = 5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[Cu^{2+}] = 5 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ soit $e = 1,16 \text{ V}$.



Definition : Force électromotrice

La force électromotrice de la pile est la différence de potentiels mesurée par un voltmètre lorsque la pile ne débite aucun courant :

$$e = V_+ - V_-$$

où V_+ est le potentiel de la cathode et V_- est le potentiel de l'anode.

Definition : Capacité d'une pile

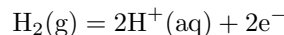
On appelle capacité d'une pile Q la quantité maximale de charge électrique qu'elle peut fournir au cours de sa décharge.

Definition : Électrodes de référence

On choisit des demi-piles particulières dont le potentiel est constant :

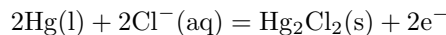
Électrode standard à hydrogène (ESH)

L'électrode standard à hydrogène (ESH) fait intervenir le couple $H^+(aq)/H_2(g)$. Elle est constituée d'une électrode en platine plongée dans une solution contenant des ions H_3O^+ , de pH nul, dans laquelle barbote du dihydrogène à la pression partielle $P^\circ = 1 \text{ bar}$. On lui attribue conventionnellement la valeur $E^\circ(H^+/H_2) = 0 \text{ V}$ afin qu'elle serve d'origine des potentiels.



Électrode au calomel saturée (ECS)

L'ESH étant peu pratique d'emploi, on lui privilégie souvent l'électrode au calomel saturée en $KCl(s)$, de potentiel connu (par rapport à l'ESH) et constant. Elle fait intervenir le couple $Hg_2Cl_2(s)/Hg(l)$ où Hg_2Cl_2 est le précipité de chlorure mercureux appelé calomel.



On fixe $[Cl^-]$ en saturant la solution en KCl .

À 25°C : $E_{ECS} = 0,24 \text{ V}$

Formule de Nernst

On considère le potentiel d'électrode d'une demi-pile associée au couple (Ox/Red) comme la différence de potentiel de cette demi-pile avec une ESH. Celle-ci est donnée par la formule de Nernst associée à la demi-équation électronique :



le potentiel rédox $E(Ox/Red)$ dépend des activités de l'oxydant et du réducteur et du potentiel standard $E^\circ(Ox/Red)$ à la température T :

$$E(Ox/Red) = E^\circ(Ox/Red) + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \frac{a^\beta(Ox)a^\gamma(H^+(aq))}{a^\alpha(Red)a^\delta(H_2O(l))}$$

avec $\mathcal{F} = \mathcal{N}_A e = 96,5 \times 10^3 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante de Faraday et $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.

On retiendra qu'à $T = 298 \text{ K}$ on a :

$$E(Ox/Red) = E^\circ(Ox/Red) + \frac{0,059}{n} \log \left(\frac{a^\alpha(Ox)}{a^\beta(Red)} \right) - \frac{0,059\gamma}{n} \text{pH}$$

Exemple :

Soit le couple ClO^-/Cl^- à $T = 298\text{ K}$ de demi-équation :



On écrit la formule de Nernst :

$$E(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) + \frac{0.06}{2} \log \left(\frac{a(\text{ClO}^-(\text{aq}))a^2(\text{H}^+(\text{aq}))}{a(\text{Cl}^-(\text{aq}))a(\text{H}_2\text{O}(\text{l}))} \right)$$

On obtient alors :

$$E(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) + 0.03 \log \left(\frac{[\text{ClO}^-][\text{H}^+]^2}{[\text{Cl}^-]c^\circ} \right)$$

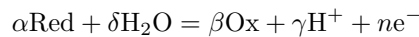
Ce qui donne :

$$E(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) - 0.06\text{pH} + 0.03 \log \left(\frac{[\text{ClO}^-]}{[\text{Cl}^-]} \right)$$

3 Réaction d'oxydo-réduction

Definition : Convention de tracé en oxydo-réduction

On considère un couple Ox/Red. La demi-équation électronique peut s'écrire :



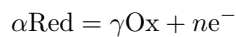
On fait intervenir ici, de manière inhabituelle, les ions H^+ pour bien mettre en évidence l'influence du pH. Le potentiel E de la solution est :

$$E = E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) + \frac{0.059}{n} \log \left(\frac{a(\text{Ox})^\beta [\text{H}^+]^\gamma}{a(\text{Red})^\alpha (c^\circ)^\gamma} \right) = E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) + \frac{0.059}{n} \log \left(\frac{a(\text{Ox})^\beta}{a(\text{Red})^\alpha} \right) - \frac{0.059\gamma}{n} \text{pH}$$

Pour pouvoir étudier la stabilité des espèces du couple (Ox/Red) en fonction du potentiel d'électrode E , il faut fixer la valeur du terme $\frac{a(\text{Ox})^\beta}{a(\text{Red})^\alpha}$ à la frontière entre les domaines de stabilités. Pour cela, on utilise des conventions de tracé arbitraires, c.à.d. que l'on choisit arbitrairement les activités des espèces pour fixer la valeur de ce terme.

Propriété : Diagramme de stabilité redox

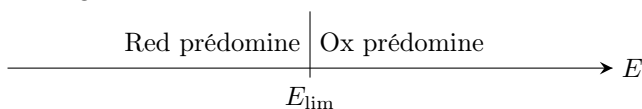
On considère un couple redox tel que la demi-équation électronique s'écrit :



On calcule alors le potentiel de Nernst de la solution :

$$E = E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) + \frac{0.06}{n} \log \left(\frac{a(\text{Ox})^\gamma}{a(\text{Red})^\alpha} \right)$$

À la frontière entre les deux domaines de stabilités on utilise la convention de tracé qui fixe la valeur de E_{lim} . On obtient alors le diagramme de stabilité suivant :



avec E_{lim} calculé selon la convention de tracé choisie.

Exemple : Diagramme de prédominance du couple $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$

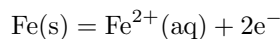
Soit la demi équation électronique : $\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) = \text{Fe}^{3+}(\text{aq}) + \text{e}^-$

On obtient alors : $E = E^\circ(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) + 0.06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$

On obtient le diagramme de prédominance suivant :

**Exemple : Diagramme de stabilité du couple Fe^{2+}/Fe**

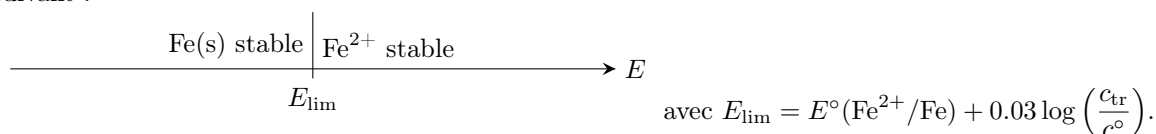
Soit la demi équation électronique :



On obtient alors :

$$E = E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + 0.03 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{2+}]}{c^\circ} \right)$$

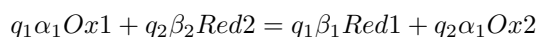
On doit ici prendre une convention de tracé, on prend $[\text{Fe}^{2+}] = c_{\text{tr}}$ choisi arbitrairement. On obtient le diagramme de stabilité suivant :

**Méthode : Équilibrer une réaction d'oxydo-réduction**

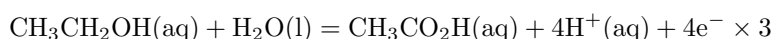
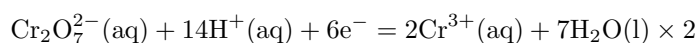
On considère une réaction d'oxydo-réduction entre un oxydant $Ox1$ appartenant à un couple $Ox1/Red1$ et un réducteur $Red2$ appartenant à un couple $Ox2/Red2$ de demi-équations :



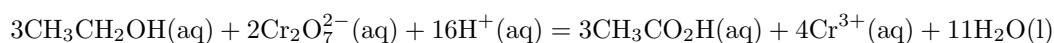
L'équation de la réaction d'oxydo-réduction s'obtient multipliant les deux demi-équations par q_1 et q_2 de manière à égaliser les nombres d'électrons tel quel $q_1 n_1 = q_2 n_2$:

**Exemple :**

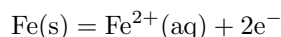
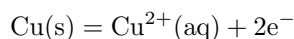
Soit $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ qui réagit avec $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$:



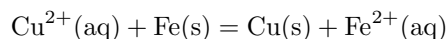
Dans ce cas :



Soit $\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$ qui réagit avec Fe(s) :



Dans ce cas :

**Propriété : Constante d'équilibre**

À l'équilibre thermodynamique, les potentiels de tous les couples rédox en solution sont égaux. Dans le cas d'une réaction entre un oxydant $Ox1$ appartenant à un couple $Ox1/Red1$ et un réducteur $Red2$ appartenant à un couple $Ox2/Red2$:

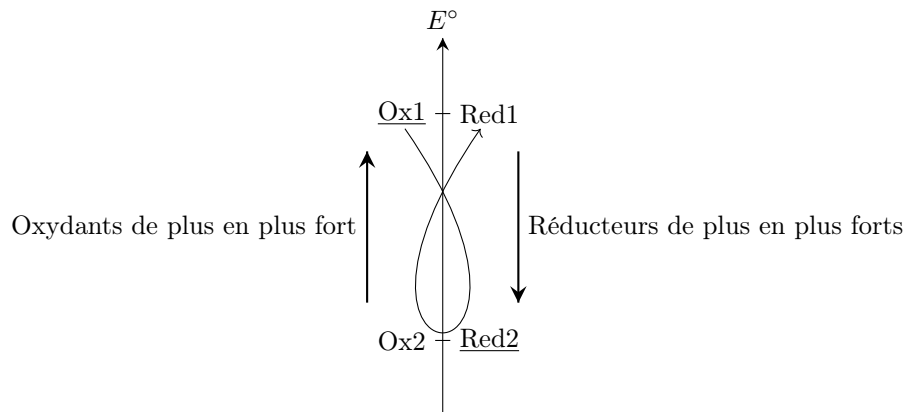
$$E(\text{Ox1}/\text{Red1}) = E(\text{Ox2}/\text{Red2})$$

On obtient alors :

$$K^\circ = 10^{\pm \frac{n}{0.059} |\Delta E^\circ|}$$

Propriété : Échelle des potentiels standards

On peut classer couples red/ox sur une échelle des E° :



On retiendra que :

- Si $E^\circ(Ox) > E^\circ(Red)$ alors $K^\circ > 1$ la réaction est thermodynamiquement favorable.
- Si $E^\circ(Ox) - E^\circ > 0,2V$ alors $K^\circ > 10^3$ la réaction est quantitative.
- Si $E^\circ(Ox) < E^\circ(Red)$ alors $K^\circ < 1$ la réaction est thermodynamiquement défavorable.
- Si $E^\circ(Ox) - E^\circ > -0,2V$ alors $K^\circ < 10^{-3}$ la réaction est limitée.

Definition : Dismutation et médiamutation

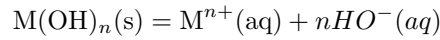
Lors d'une dismutation, une espèce amphotère instable réagit sur elle-même en jouant le rôle à la fois d'oxydant et de réducteur. La réaction inverse est appelée une médiamutation.

Chimie 8 : Diagramme potentiel-pH

1 Rappel sur les diagrammes

Definition : Convention de tracé lors d'une précipitation

On considère un sel du type $M(OH)_n(s)$, et on considère la réaction de dissolution est la suivante :



On peut alors définir un couple $M^{n+}/M(OH)_n$ dont on pourra tracer le diagramme d'existence de $M(OH)_n$ en fonction du pH. Pour cela il faudra fixer la valeur de $[M^{n+}]$ arbitrairement.

Propriété : Diagramme d'existence

Soit la dissolution d'un sel du type $M(OH)_n(s)$, on cherche à tracer le diagramme d'existence du couple $M^{n+}/M(OH)_n$ en fonction du pH. On cherche le pH_{lim} pour lequel le quotient de réaction est égal au produit de solubilité :

$$K_s = \frac{[M^{n+}][HO^-]_{lim}^n}{(c^\circ)^{n+1}} = [M^{n+}] \left(\frac{K_e}{[H_3O^+]_{lim}} \right)^n = \frac{[M^{n+}]}{c^\circ} 10^{n(pH_{lim} - pK_e)}$$

On impose une convention de tracé : $[M^{n+}] = c_{tr}$

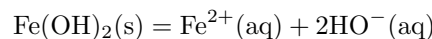
$$pH_{lim} = pK_e + \frac{1}{n} \log \left(\frac{K_s c^\circ}{c_{tr}} \right)$$

On obtient alors le diagramme d'existence suivant :



Exemple : Diagramme d'existence de $Fe(OH)_2(s)$

Soit la réaction de dissolution suivante :



On cherche la valeur pH_{lim} tel que l'équilibre thermodynamique est atteint avec une convention de tracé : $[Fe^{2+}] = c_{tr}$

$$K_s = \frac{[Fe^{2+}][HO^-]_{lim}^2}{(c^\circ)^3} = [Fe^{2+}] \left(\frac{K_e}{[H_3O^+]_{lim}} \right)^2 = \frac{[Fe^{2+}]}{c^\circ} 10^{2(pH_{lim} - pK_e)}$$

On obtient alors : $pH_{lim} = pK_e + \frac{1}{2} \log \left(\frac{K_s c^\circ}{c_{tr}} \right)$

On trace alors le diagramme d'existence :

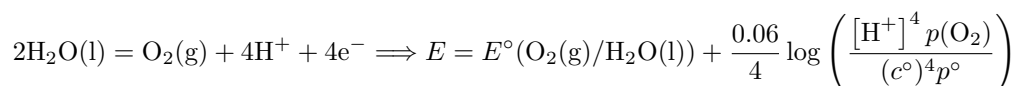


2 Diagramme potentiel-pH de l'eau

Definition : Les couples de l'eau

L'eau $H_2O(l)$ intervient dans deux couples oxydant réducteur :

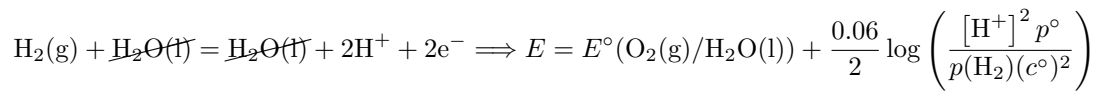
- Le couple $O_2(g)/H_2O(l)$ de demi-équation :



En utilisant la convention de tracé $p(O_2) = P_{tr} = p^\circ$ on obtient :

$$E = 1,23 - 0.06pH$$

- Le couple $\text{H}_2\text{O}(l)/\text{H}_2(g)$ où l'on considère que H_2O est équivalent à H^+ , de demi-équation :

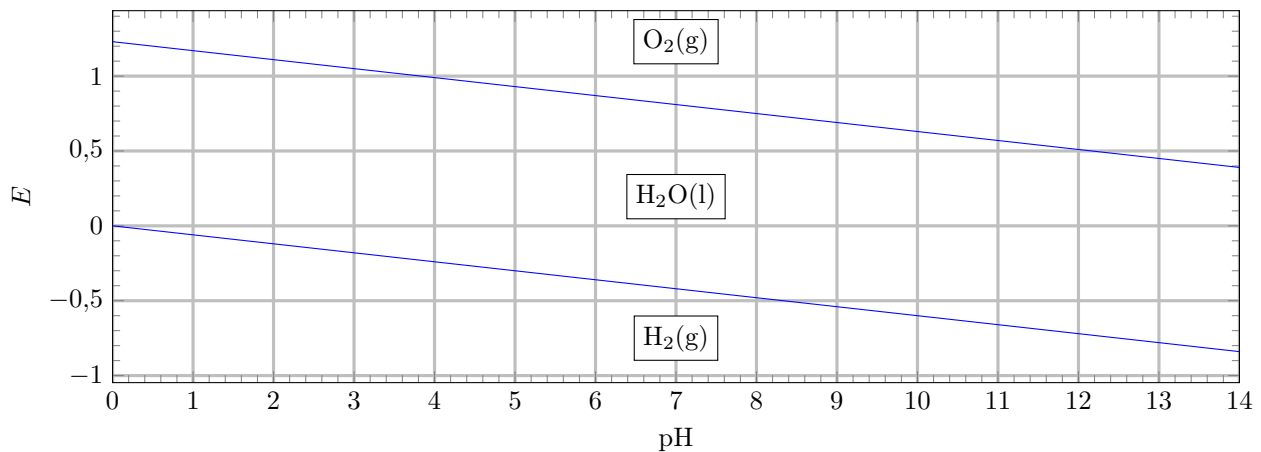


En utilisant la convention de tracé $p(\text{H}_2 = P_{\text{tr}} = p^\circ)$ on obtient :

$$E = -0.06\text{pH}$$

Propriété : Diagramme potentiel-pH de l'eau

On cherche à tracer le diagramme $E - \text{pH}$ de toutes les espèces conjuguées à H_2O . On impose une convention de tracé $p(\text{H}_2) = p(\text{O}_2) = P_{\text{tr}} = p^\circ$:



Propriété : Interprétation du diagramme

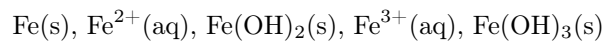
Le diagramme se décompose en trois zones :

- La zone au dessus de la courbe du haut : stabilité de $\text{O}_2(g)$, l'eau va donc réagir comme réducteur lors d'une oxydation.
- La zone entre les deux courbes : stabilité de $\text{H}_2\text{O}(l)$.
- La zone en dessous de la courbe du bas : stabilité de $\text{H}_2(g)$, l'eau va donc réagir comme oxydant lors d'une réduction.

3 Diagramme potentiel-pH du fer

Definition : Diagramme de situation

On souhaite placer les différentes espèces conjuguées du fer dans un diagramme, on dispose de la liste des espèces suivantes :

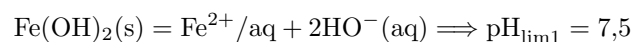


On dispose également des données thermodynamiques suivantes :

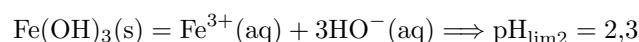
- $\text{p}K_s(\text{Fe}(\text{OH})_2(s)) = 15,0$;
- $\text{p}K_s(\text{Fe}(\text{OH})_3(s)) = 37,2$;

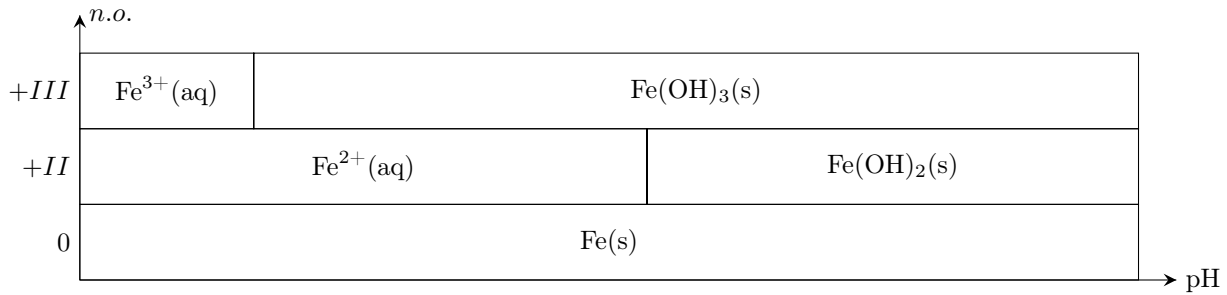
Le diagramme de situation consiste à tracer le diagramme d'existence en fonction du pH pour chaque nombre d'oxydation (*n.o.*) du fer au sein des espèces. En utilisant comme convention de tracé la concentration $c_{\text{tr}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, on obtient :

- Pour *n.o.* = 0 on a uniquement $\text{Fe}(s)$;
- Pour *n.o.* = +II on a $\text{Fe}^{2+}(\text{aq})$ et $\text{Fe}(\text{OH})_2(s)$ qui forment un couple via la réaction de dissolution :



- Pour *n.o.* = +III on a $\text{Fe}^{3+}(\text{aq})$ et $\text{Fe}(\text{OH})_3(s)$ qui forment un couple via la réaction de dissolution :





Une fois ce diagramme obtenu, ajouter les diagramme de prédominance ou d'existence entre des espèces de nombre d'oxydation différent via la demi-équation électronique.

Propriété : Frontières entre espèces de nombre d'oxydation différent

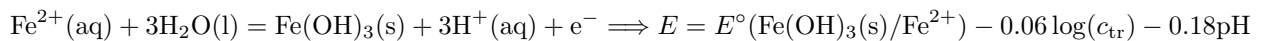
On peut vous demander de justifier ou de retrouver le pente d'une frontière entre deux domaines d'espèces qui possèdent un $n.o.$ différent. Pour cela on calcule simplement le potentiel de Nernst associé au couple envisagé et on regarde le coefficient devant le pH.

On pour le diagramme potentiel-pH du fer les données suivantes :

- $E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0,44 \text{ V}$;
- $E^\circ(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$;

Exemple : Frontière entre Fe^{2+} et $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})$

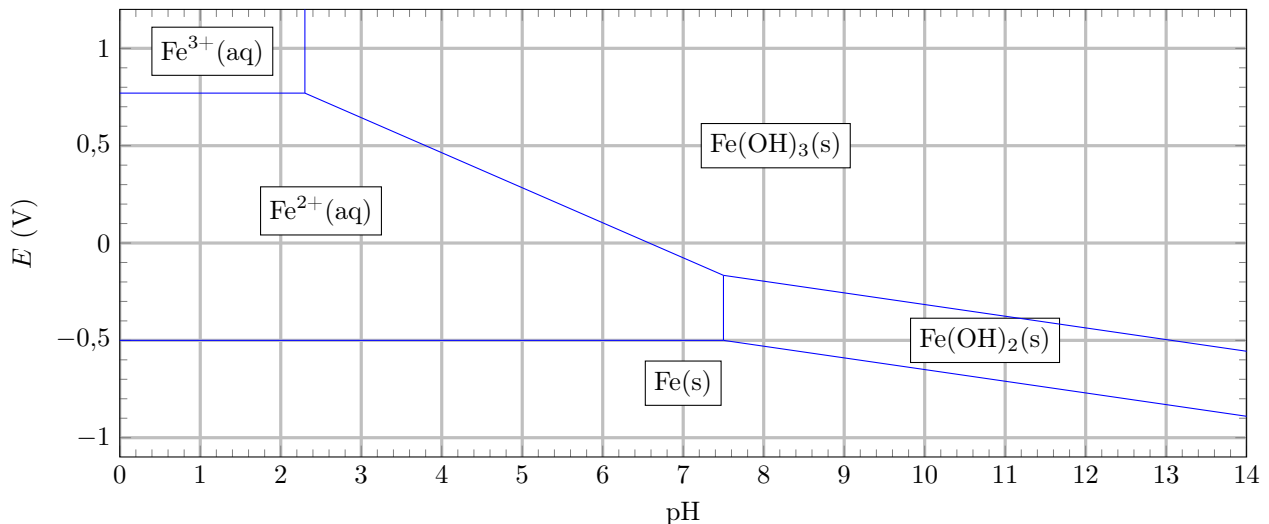
Considérons la demi-équation suivante :



On a alors une droite de pente $-0,18$. Comme on ne nous donne pas le potentiel standard du couple $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})/\text{Fe}^{2+}$, on utilise la continuité avec la frontière du couple $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ qui est égale au potentiel standard du couple.

Propriété : Diagramme potentiel-pH du fer

On obtient alors le diagramme suivant :



4 Diagramme potentiel-pH du chlore

Definition : Diagramme de situation

On souhaite placer les différentes espèces conjuguées du chlore dans un diagramme, on dispose de la liste des espèces suivantes :

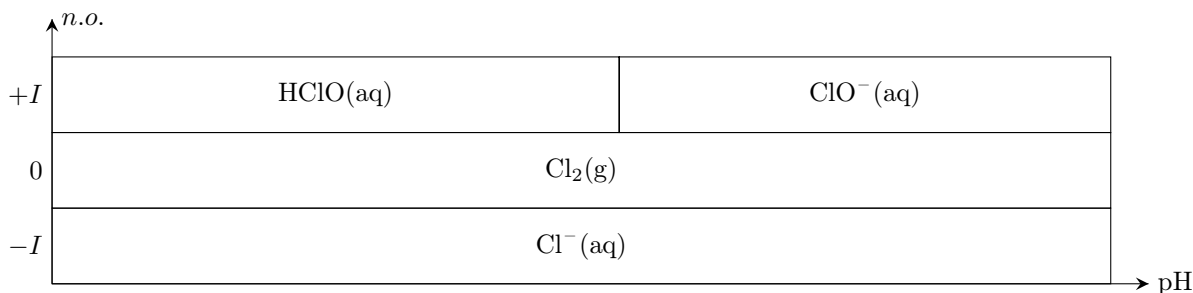
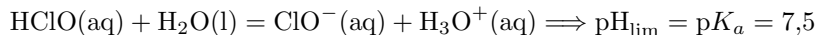


On dispose également des données thermodynamiques suivantes :

- $\text{p}K_a(\text{HClO}/\text{ClO}^-) = 7,5$;

Le diagramme de situation consiste à tracer le diagramme d'existence en fonction du pH pour chaque nombre d'oxydation (*n.o.*) du fer au sein des espèces. En utilisant comme convention de tracé la concentration $c_{tr} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ on obtient :

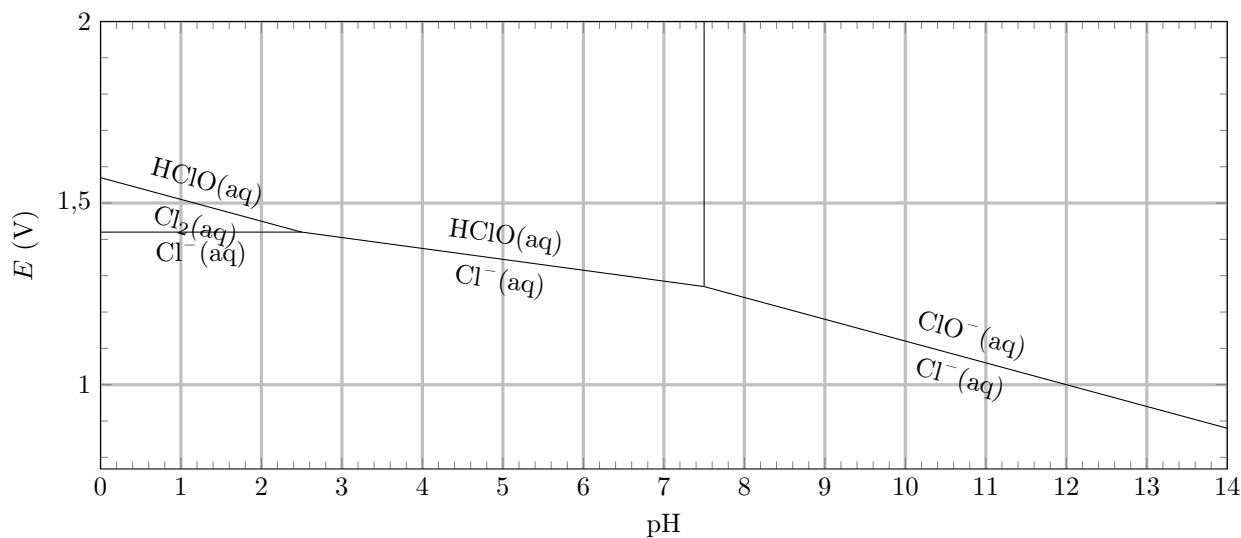
- Pour $n.o. = -I$ on a uniquement $\text{Cl}^-(\text{aq})$;
- Pour $n.o. = 0$ on a uniquement $\text{Cl}_2(\text{g})$;
- Pour $n.o. = +I$ on a $\text{HClO}(\text{aq})$ et $\text{ClO}^-(\text{aq})$ qui forment un couple acide-base :



Une fois ce diagramme obtenu, ajouter les diagramme de prédominance ou d'existence entre des espèces de nombre d'oxydation différent via la demi-équation électronique.

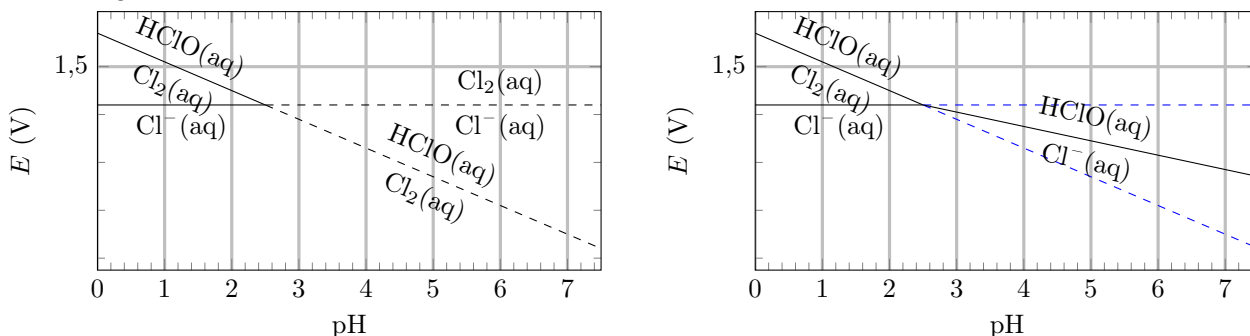
Propriété : Diagramme potentiel-pH du chlore

On obtient alors le diagramme suivant :



Remarque : Dismutation du chlore

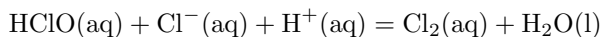
Pour un $\text{pH} > 2,5$ on a disparition du domaine de Cl_2 . En effet les frontières théoriques initiales devaient donner pour $\text{pH} < 7,5$ le diagramme suivant :



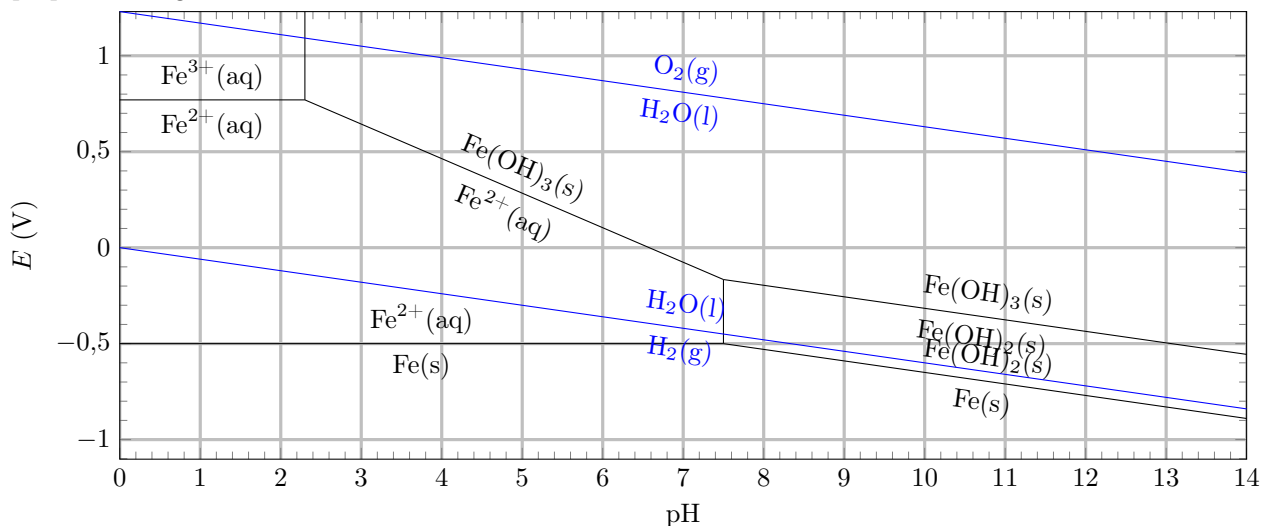
Les deux domaines de Cl_2 sont disjoints. On a alors Cl_2 oxydant dans le couple Cl_2/Cl^- qui réagit avec Cl_2 réducteur dans le couple Cl_2/HClO . On trace alors une nouvelle frontière pour le nouveau couple HClO/Cl^- .

Remarque : Médiامتutation

Pour $pH < 2,5$ on a le domaine de stabilité de Cl_2 où à lieu la réaction de médiامتutation :

**5 Utilisation des diagrammes potentiel-pH****Exemple : Superposition de deux diagrammes potentiel-pH**

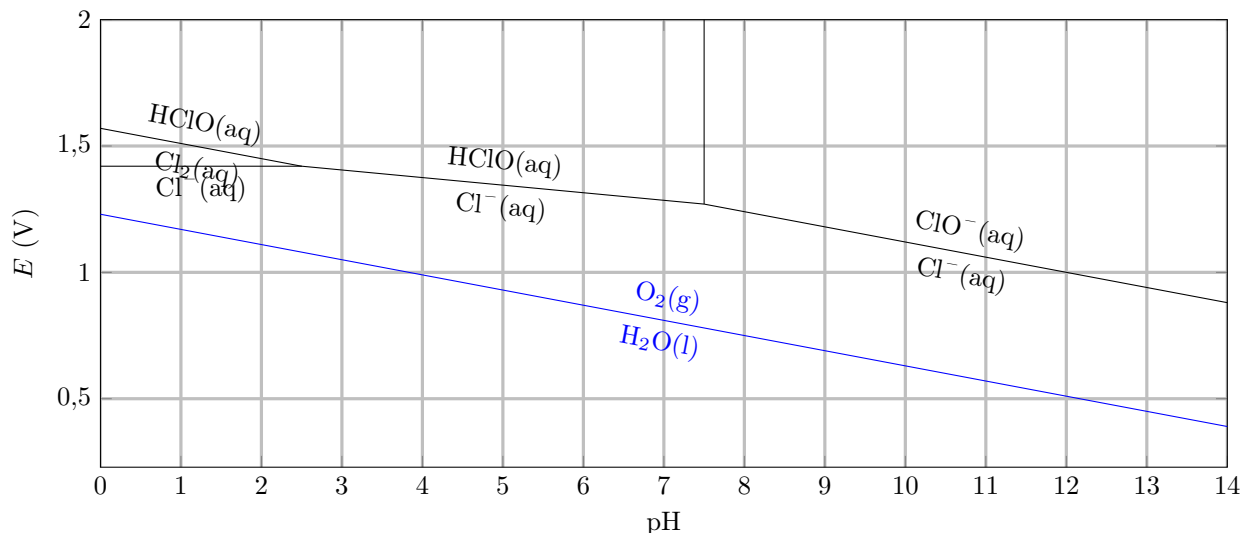
On superpose le diagramme du fer et de l'eau :

**Propriété : Stabilité d'une espèce dans l'eau**

Une espèce donnée est stable dans l'eau si lors de la superposition des deux diagrammes potentiel-pH les domaines se recoupent. Par exemple dans le diagramme potentiel-pH du fer et de l'eau on voit que le domaine de l'eau recoupe les domaines de :

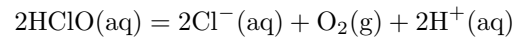
- Fe^{2+} ,
- Fe^{3+} ,
- $Fe(OH)_2$,
- $Fe(OH)_3$.

Ces espèces sont donc stable dans l'eau, en revanche on voit que les domaines de Fe et H_2O sont disjointes, on a donc instabilité de Fe dans l'eau.

Exemple : Superposition de deux diagrammes potentiel-pH

Propriété : Réaction thermodynamiquement favorisée

Les espèces instables sont l'acide hypochloreux HClO et l'ion hypochlorite ClO^- . Les réactions entre l'eau et ces deux espèces sont donc favorisées et on a :

**Remarque : Instable mais à quelle vitesse ?**

On peut donc observer l'instabilité ou la stabilité d'une espèce dans l'eau, mais cette observation ne concerne que le caractère thermodynamiquement favorisé d'un état d'équilibre. On ne sait rien de la transformation pour l'atteindre et encore moins de la cinétique, certaines espèces peuvent paraître stable sur une échelle de temps donnée car elles ont une cinétique d'oxydation très lente. C'est le cas par exemple de l'ion hypochlorite ClO^- .

Cinquième partie

Thermodynamique

Liste des chapitres Thermodynamique

1 Introduction à la thermodynamique	195
1 Système thermodynamique	195
2 Équilibre thermodynamique à l'échelle macroscopique	196
3 Équilibre thermodynamique à l'échelle microscopique	198
4 Énergie interne	199
2 Énergie échangées, transformations	201
1 Transformation thermodynamique :	201
2 Travail des forces	201
3 Transfert thermique :	202
4 Les différents types de transformations :	203
5 Corps pur diphasé en équilibre thermodynamique	206
3 Le premier principe	209
1 Premier principe :	209
2 La fonction d'état enthalpie :	211
3 Enthalpie de changement d'état	213
4 Le second principe	215
1 Irréversibilité et entropie :	215
2 Entropie d'un corps pur	216
3 Application :	218
5 Machines thermiques	221
1 Introduction aux machines thermiques	221
2 Les moteurs dithermes	222
3 Les machines frigorifiques dithermes	224
4 Les pompes à chaleur dithermes	224

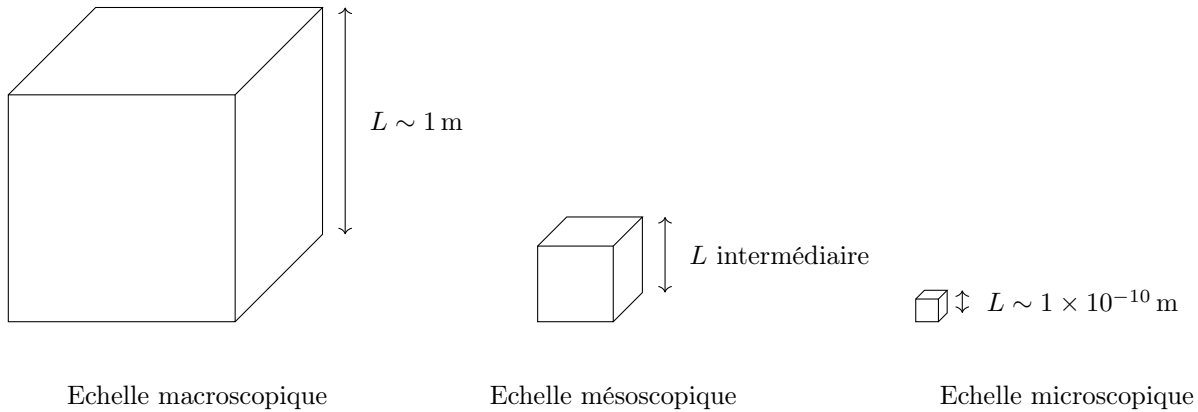
Thermodynamique 1 : Introduction à la thermodynamique

1 Système thermodynamique

Definition : Les différentes échelles de la matière

On distingue trois échelles de description de la matière :

- L'échelle microscopique : à l'échelle de l'atome ou de la molécule, la matière peut être vue comme un ensemble de particules d'une taille de l'ordre de 1×10^{-10} m. Les particules interagissent ensemble et ces interactions définissent la structure de la matière. La matière n'est pas continue à l'échelle microscopique.
- L'échelle macroscopique : de notre point de vue, la matière est continue, cette échelle est de l'ordre du mètre.
- L'échelle mésoscopique : échelle intermédiaire, la matière est considérée comme continue et on peut utiliser les variables d'état. L'échelle reste suffisamment petite pour qu'on puisse évaluer l'évolution spatiale des variables d'état (utile en mécanique des fluides).



Remarque :

Un grand nombre de particules signifie $N \gg N_A$ le nombre d'Avogadro. On a $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Definition : Phase solide

Aspect macroscopique : matière qui ne change ni de volume ni de forme.

Aspect microscopique : les particules sont ordonnées suivant un réseau. La distance entre deux particules est de l'ordre de la taille de la particule.

Definition : Phase liquide

Aspect macroscopique : matière qui ne change pas de volume mais change de forme.

Aspect microscopique : les particules sont non ordonnées mais très proches. On a un ordre de courte portée, c'est-à-dire qu'elles sont ordonnées sur une courte distance. La distance entre deux particules est de l'ordre de la taille de la particule.

Definition : Phase gazeuse

Aspect macroscopique : matière qui change de volume et de forme.

Aspect microscopique : les particules sont éloignées les unes des autres, leurs positions sont aléatoires. la distance entre deux particules est plus grande que la taille de la particule.

Remarque :

les phases solide et liquide sont 1000 fois plus denses que la phase gazeuse. On a alors $\rho_{\text{liquide}} \sim 1000\rho_{\text{gaz}}$ et $\rho_{\text{liquide}} \sim \rho_{\text{solide}}$.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Donc :

- la phase solide et la phase liquide sont appelées phases condensées.
- le liquide et le gaz peuvent changer de forme donc peuvent s'écouler.
- la phase liquide et la phase gazeuse sont appelées phases fluides.

Definition : Système thermodynamique

On appelle système thermodynamique tout système constitué d'un très grand nombre de particules microscopiques.

On appelle choisir un système le fait d'étudier un système. Le système est alors séparé de l'extérieur.

La surface fermée qui délimite le système est appelée surface de contrôle. L'intérieur de la surface de contrôle fait partie du système. L'extérieur de la surface de contrôle fait partie de l'extérieur.

- On appelle système fermé un système qui n'échange pas de matière avec l'extérieur.
- On appelle système isolé un système qui n'échange pas d'énergie avec l'extérieur.
- On appelle système ouvert un système qui échange de la matière avec l'extérieur.

Propriété : Description d'un état macroscopique

À l'état macroscopique de la matière, on utilise des variables d'états pour décrire le système. Les variables usuelles sont la quantité de matière n , le volume V , la pression P , la température T .

2 Équilibre thermodynamique à l'échelle macroscopique

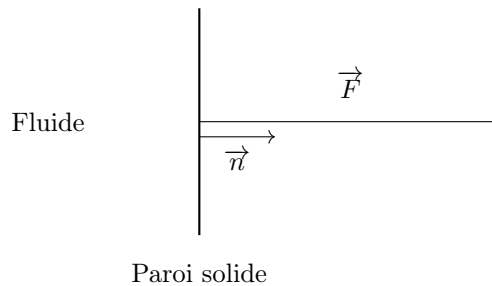
Definition : Équilibre thermodynamique

Un système est dit en équilibre macroscopique si, à la fois :

- toutes les variables d'état sont définies et constantes au cours du temps ;
- il n'échange ni énergie ni matière avec l'extérieur à l'échelle macroscopique.

Definition : La pression

Considérons un fluide en contact avec une paroi solide de surface S .



Une force \vec{F} s'exerce alors du fluide vers la paroi. Elle est orthogonale à la paroi et orientée vers l'extérieur. Elle est proportionnelle à la surface S de la paroi. On définit la pression P comme :

$$\vec{F} = PS\vec{n}$$

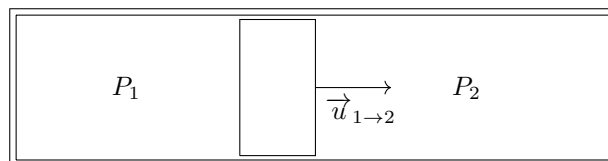
où P est la pression du fluide et \vec{n} le vecteur orthogonal à la paroi dirigée vers le solide.

Remarque : Unité

Le pascal noté Pa. On a l'équivalence $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. On utilise également le bar avec l'équivalence $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Propriété : Équilibre mécanique

On considère un système isolé composé de deux chambres. Les deux chambres sont séparées par une paroi mobile. Le fluide contenu dans la chambre 1 à la pression P_1 exerce une force \vec{F}_1 sur la partie mobile. Le fluide contenu dans la chambre 2 à la pression P_2 exerce une force \vec{F}_2 sur la partie mobile.



Soit $\vec{F}_1 = P_1 S \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_2 = P_2 S \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$. On applique les conditions d'équilibre mécanique sur la partie mobile et on obtient :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \iff P_1 S \vec{u}_{1 \rightarrow 2} + P_2 S \vec{u}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} \iff \boxed{P_1 = P_2}$$

Si l'on choisit cette fois le fluide contenu dans la chambre 1, on a $P_1 = P$ et le fluide contenu dans la chambre 2 correspond

à l'extérieur. On a alors $P_2 = P_{ext}$.

L'équilibre mécanique impose : $P = P_{ext}$

Definition : Équilibre thermique

La condition d'équilibre thermique impose l'égalité de température dans tout le système. Elle impose aussi l'égalité entre la température du système et la température extérieure. On a alors :

$$T = T_{ext}$$

Definition : Équation d'état

On appelle équation d'état une relation entre les variables d'état à l'équilibre. Dans le cas d'un corps pur sous une phase on a :

$$f(T, V, P, n) = 0 \quad \text{ou} \quad f(T, V_m, P) = 0$$

Definition : Modèle du gaz parfait

Le gaz parfait est un gaz théorique idéal composé de particules dont on fait les hypothèses suivantes :

- Particules ponctuelles ($V_{part} = 0$) ;
- Pas d'interactions entre particules (pas de collisions, pas de répulsions, pas d'attraction).

Ce modèle correspond à peu près à la réalité si les molécules du gaz sont très éloignées les unes des autres, c'est-à-dire si le volume molaire du gaz V_m tend vers l'infini.

L'équation d'état du gaz parfait s'écrit : $PV = nRT$ avec $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.

Remarque : Ordre de grandeur

On trouve dans les conditions normales de température et pression (CNTP) avec $T = 273,15 \text{ K}$ et $P = 1,0133 \times 10^5 \text{ Pa}$:

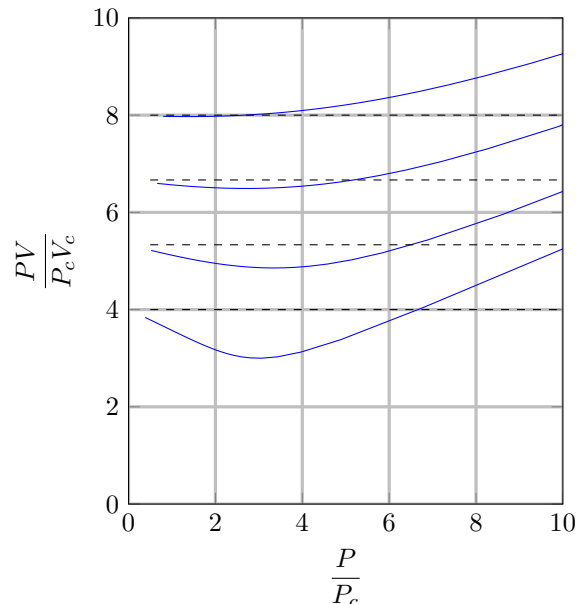
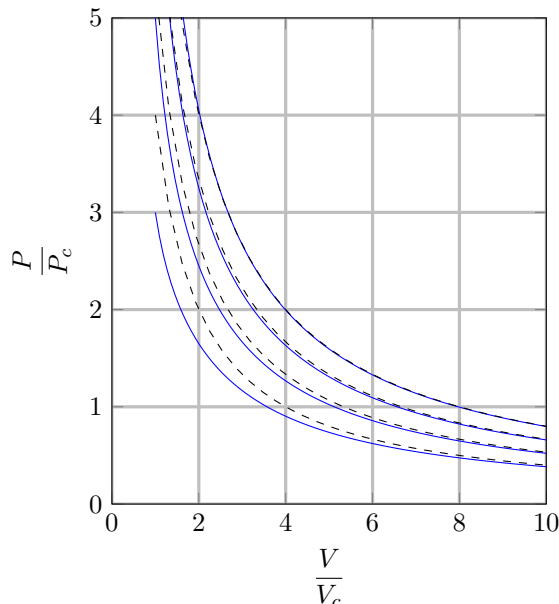
$$V_m = 22,41 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} = 22,41 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Definition : Limite du modèle du gaz parfait

Le modèle possède plusieurs limites :

- $V_{part} \neq 0$ donc si $V \rightarrow 0$ le modèle ne peut pas décrire la réalité.
- Les interactions existent (collisions, attraction) donc si $\frac{n}{V}$ est grand alors on sort du modèle.

On trace des courbes d'isothermes (pour $T = C^{te}$) dans le diagramme de Clapeyron ($P = f(V)$) et le diagramme d'Amagat ($PV = f(P)$) avec un modèle de gaz réel :



On voit que le modèle du gaz parfait est valable pour de grandes températures, et pour de faibles pressions.

Definition : Modèle de la phase condensée idéale

Une phase condensée idéale est supposée incompressible, c'est-à-dire que son volume ne varie pas peu importe la valeur de la pression du fluide et de la température. On en déduit alors l'équation d'état :

$$V = nV_m \quad \text{ou} \quad m = \rho V$$

Remarque : Ordre de grandeur

On trouve pour l'eau :

$$V_m = \frac{M_{\text{eau}}}{\rho_{\text{eau}}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} = 1,8 \times 10^{-2} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

3 Équilibre thermodynamique à l'échelle microscopique

Definition : Agitation thermique

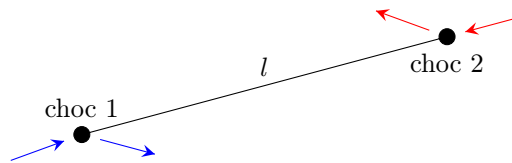
Les particules microscopiques sont constamment en mouvement, même lorsque la matière est immobile à l'échelle macroscopique. On parle d'agitation thermique.

Pour un solide les particules vibrent autour de leurs positions d'équilibre.

Pour un liquide ou un gaz les particules se déplacent en s'entrechoquant continuellement.

Propriété : Libre parcours moyen

Pour caractériser l'agitation thermique on calcule le libre parcours moyen soit la distance l moyenne parcourue par une particule entre deux chocs.



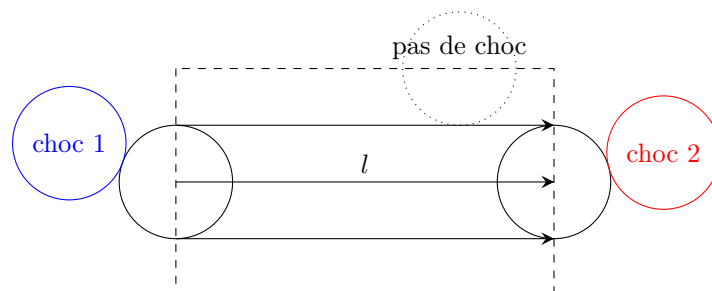
Propriété : Ordre de grandeur du libre parcours moyen

Dans un fluide composé de N particules de diamètre d occupant un volume V on calcule le volume moyen occupé par particule :

$$V_{\text{part}} = \frac{V}{N} = \frac{V_m}{\mathcal{N}_A}$$

Une particule de diamètre d effectuant une trajectoire rectiligne de longueur l ne rencontre aucune particule sur cette trajectoire. Alors le volume du cylindre de rayon d et de hauteur l ne contient en moyenne qu'une seule particule. On en déduit :

$$\pi d^2 l = V_{\text{part}} = \frac{V_m}{\mathcal{N}_A} \implies l = \frac{V_m}{\pi d^2 \mathcal{N}_A}$$



Avec $d \simeq 3 \times 10^{-10} \text{ m}$, on a alors :

- pour un gaz $V_m = \frac{RT}{P} \simeq 25 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ soit $l \sim 10^{-7} \text{ m}$;
- pour un liquide (H_2O) $V_m = \frac{M}{\rho} \sim 10 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ soit $l \sim 10^{-10} \text{ m}$.

Definition : La température cinétique

La température T est une grandeur qui mesure l'énergie cinétique du mouvement d'agitation thermique des particules microscopiques.

Dans un gaz parfait monoatomique (c'est-à-dire dont les molécules ne comportent qu'un seul atome) l'énergie cinétique moyenne d'une molécule est :

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

où $k_B = 1,38066 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann. La température T se mesure en kelvin, de symbole K.

Definition : Distribution des vitesses d'un gaz

On considère un gaz immobile à l'échelle macroscopique. Le système est composé de N molécules chacune possédant une vitesse \vec{v}_i . On s'intéresse à la distribution des vitesses du gaz, on suppose :

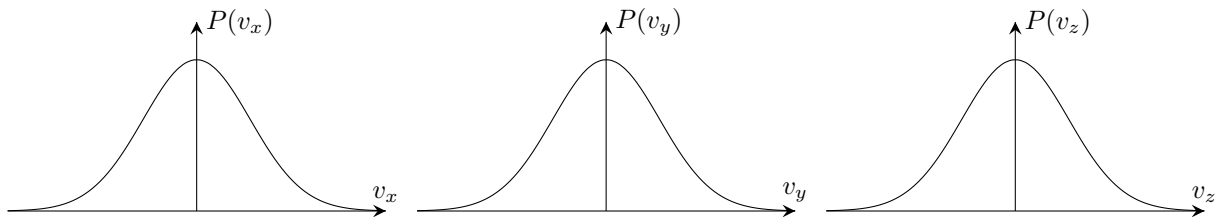
- la distribution **homogène** : la probabilité pour une molécule d'avoir une vitesse donnée est indépendante de la position de la particule.
- la distribution est **isotrope** : la probabilité est la même pour deux vitesses de même norme mais de directions différentes (il n'y a pas de direction privilégiée).

Propriété : Vitesse moyenne

En raison de l'isotropie de la distribution on a :

$$\langle \vec{v}_i \rangle = \vec{0}$$

Ce qui implique que toutes les composantes du vecteur vitesse sont en moyenne nulle : $\langle v_x \rangle = 0$, $\langle v_y \rangle = 0$ et $\langle v_z \rangle = 0$

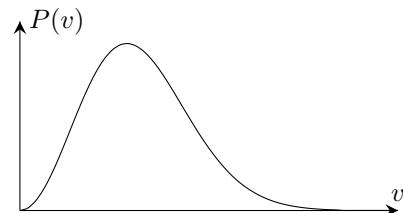
**Propriété : Vitesse quadratique moyenne**

La vitesse quadratique moyenne u est par définition la racine carrée de la valeur moyenne du carré des vitesses, soit :

$$u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

Pour un gaz parfait monoatomique on a :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$$



4 Énergie interne

Definition : Énergie interne

On définit l'énergie interne U d'un système thermodynamique comme l'énergie totale des particules qui composent le système.

$$U = \Sigma (E_{C,i} + E_{P,i})$$

L'énergie interne est une fonction additive (extensive).

Definition : Capacité thermique à volume constant

On appelle capacité thermique à volume constant, noté C_V , la dérivée partielle de l'énergie interne U par rapport à la température, en conservant le volume constant :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad C_V \text{ s'exprime en } \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$$

La capacité thermique à volume constant C_V est une grandeur extensive et additive. On définit alors :

- Pour les gaz : la capacité thermique molaire à volume constant $C_{Vm} = \frac{C_V}{n}$ exprimée en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- Pour les phases condensées : la capacité thermique massique à volume constant $c_V = \frac{C_V}{m}$ exprimée en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Propriété : Capacité thermique à volume constant d'un gaz parfait monoatomique

Pour un gaz parfait monoatomique on admet que :

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad \text{on a alors } dU = \frac{3}{2}nRdT$$

Exemple de gaz monoatomique : H_e

On a alors $C_V = \frac{3}{2}nR$ et $C_{Vm} = \frac{3}{2}R$. On peut alors définir l'énergie interne molaire : $U_m = \frac{U}{n}$.

Première loi de Joule

Les gaz parfaits vérifient la première loi de Joule :

$$U_m = U_m(T) \quad \text{L'énergie interne molaire ne dépend que de la température.}$$

On a alors : $C_{Vm} = \frac{dU_m}{dT}$

Propriété : Variation d'énergie interne d'un gaz parfait

On considère un système thermodynamique Σ qui passe d'un état d'équilibre à la température T_1 à un autre état d'équilibre à la température T_2 . Comme pour un gaz parfait l'énergie interne ne dépend que de T et de n , pour un système fermé on a :

$$dU = C_V dT \implies \int_{U_1=U(T_1)}^{U_2=U(T_2)} dU = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT \implies \Delta U = U(T_2) - U(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$$

Si on considère maintenant que C_V est indépendant de T alors on obtient : $\Delta U = C_V \Delta T$.

Propriété : Capacité thermique à volume constant d'une phase condensée idéale

L'énergie interne d'une phase condensée incompressible ne dépend que de n et T . On a alors l'énergie interne molaire qui ne dépend que de T :

$$U_m = U_m(T) \quad \text{l'énergie interne molaire.}$$

La capacité thermique molaire à volume constant est donc : $C_{Vm} = \frac{dU_m}{dT}$. On utilise beaucoup l'énergie interne massique $u(T)$ avec $c_V = \frac{du}{dT}$.

Propriété : Variation d'énergie interne d'une phase condensée idéale

On considère un système thermodynamique Σ qui passe d'un état d'équilibre à la température T_1 à un autre état d'équilibre à la température T_2 . Comme pour une phase condensée l'énergie interne ne dépend que de T et de m , pour un système fermé on a :

$$dU = C_V dT \implies \int_{U_1=U(T_1)}^{U_2=U(T_2)} dU = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT \implies \Delta U = U(T_2) - U(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$$

Si on considère maintenant que C_V est indépendant de T alors on obtient : $\Delta U = C_V \Delta T$.

Thermodynamique 2 : Énergie échangées, transformations

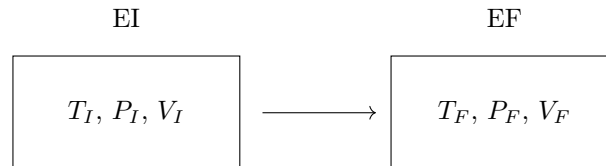
1 Transformation thermodynamique :

Definition : Transformation thermodynamique

On appelle transformation thermodynamique le passage d'un système thermodynamique d'un état d'équilibre initial (EI) à un état d'équilibre appelé état final (EF). La transformation est causée par une rupture de l'équilibre initial en modifiant une ou des contraintes extérieures (Soit par un changement de la pression extérieure, ou bien de la température extérieure).

L'état d'équilibre initial est décrit à l'aide des variables d'états, elles ont pour valeurs (T_I, P_I, V_I) .

L'état d'équilibre final est décrit à l'aide des variables d'états, elles ont pour valeurs (T_F, P_F, V_F)



Propriété : Variation d'une fonction d'état au cours d'une transformation

Lors d'une transformation, la variation d'une fonction d'état X se note $\Delta X_{i \rightarrow f}$. On calcul $\Delta X_{i \rightarrow f}$ en faisant la différence entre X_f et X_i . On a alors :

$$\Delta X_{i \rightarrow f} = X_f - X_i$$

Remarque :

Si les deux état d'équilibres sont infiniment proche, alors on peut considérer une variation élémentaire des variables d'états tel que :

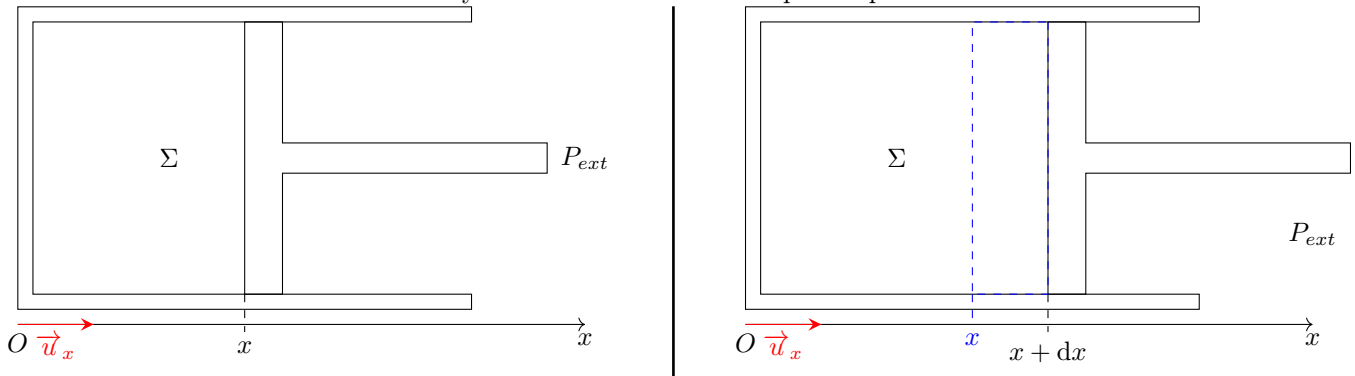
$$dX = X_f - X_i$$

où dX est la différentielle de X .

2 Travail des forces

Definition : Travail des forces de pression

On considère un fluide contenu dans un cylindre indéformable fermé par un piston mobile de surface S .



Système : { fluide + piston }

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{piston}} = -P_{\text{ext}} S \vec{u}_x$$

Soit $d\vec{l} = dx \vec{u}_x$ le déplacement élémentaire du piston. On calcul alors le travail élémentaire de la force :

$$\delta W_p = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{piston}} \cdot d\vec{l} = -P_{\text{ext}} S dx = -P_{\text{ext}} dV \quad \text{car } S dx = dV$$

On a alors le travail élémentaire reçu par la fluide :

$$\delta W_p = -P_{\text{ext}} dV \quad \text{exprimé en joules noté J}$$

Remarque :

Les échanges d'énergies sont toujours exprimés en valeur algébrique : ils sont positifs lorsque le système choisi reçoit de l'énergie et négatifs lorsqu'il en cède.

$\delta W \neq dW$: W n'est pas une fonction d'état. Ce n'est pas une caractéristique du fluide, c'est un transfert d'énergie reçu par le fluide. On ne peut pas calculer sa différentielle.

Propriété : Travail des forces de pression lors d'une transformation

Lors d'une transformation thermodynamique entre un état initial i et un état final f on calcul le travail reçu par le système :

$$W_p = - \int_i^f P_{ext} dV \qquad W_p = \int_i^f \delta W_p$$

Remarque : Différence entre δW et dX

- ΔX ou dX représente une variation d'une fonction d'état et ne dépend que de l'état initial et de l'état final. Une fonction d'état X ne dépend que des variables d'états.
- W ou δW représente un transfert d'énergie, ce n'est pas une fonction d'état. Il représente le travail reçu par le système entre l'état initial et l'état final. W dépend donc de la transformation entre l'état initial et l'état final.
- La pression extérieure est une contrainte externe, elle n'est pas forcément constante et son évolution sera décrite dans les énoncés des exercices.

Propriété : Représentation dans un diagramme de Clapeyron

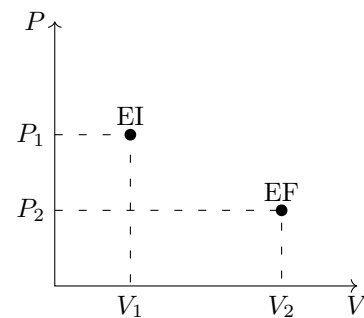
Le diagramme de Clapeyron est le diagramme (P, V) :

- La pression P est l'ordonnée,
- Le volume V est l'abscisse.

Pour un état initial (EI) de coordonnée (P_1, V_1) et un état final (EF) de coordonnée (P_2, V_2) . On représente dans le diagramme de Clapeyron :

On a $\Delta X_{1 \rightarrow 2}$ qui ne dépend que des coordonnées de (EI) et (EF).

On a W qui dépend de la trajectoire entre (EI) et (EF).

**Remarque :**

Lors d'une transformation, on appelle le travail W le travail total de l'ensemble des forces qui s'exercent sur Σ . On appelle W_p le travail des forces de pressions, et on définit W_u le travail dit utile qui est :

$$W_u = W - W_p$$

le travail des forces autres que les forces de pressions.

3 Transfert thermique :

Definition : Transfert thermique

Un système thermodynamique Σ peut recevoir de l'énergie sans l'intervention d'une action mécanique mesurable.

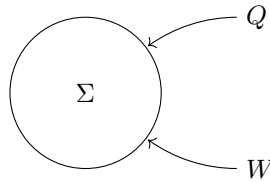
Ce transfert d'énergie complémentaire du travail s'appelle transfert thermique noté Q et s'exprime en joule noté J.

Il existe trois mode de transfert thermique :

- La conduction thermique : transfert par collisions.
- La convection thermique : fluide en mouvement.
- Le rayonnement thermique : émission d'ondes.

Remarque :

- Comme W , on calcul Q comme le transfert thermique reçu par Σ :



- Comme W , le transfert thermique n'est pas une fonction d'état. On note alors δQ le transfert thermique élémentaire.
- Par convention, on a W et Q qui sont négatif si l'énergie du système Σ est perdue, et positif si l'énergie est reçue.

4 Les différents types de transformations :

Definition : Transformation irréversible

Une transformation où seuls l'état initial et l'état final sont des états d'équilibre est une transformation irréversible.

Causes de l'irréversibilité au choix :

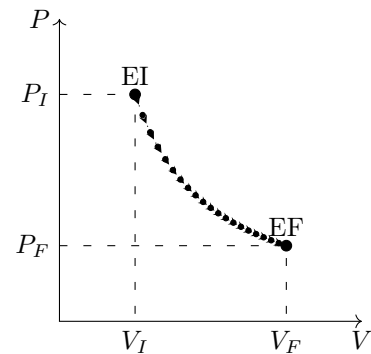
- la présence de frottements,
- la présence de transferts thermique,
- l'inhomogénéité de n, P, T ,
- la présence de réaction chimiques.

Une transformation irréversible n'est pas invariante par renversement du temps.

Definition : Transformation quasi-statique

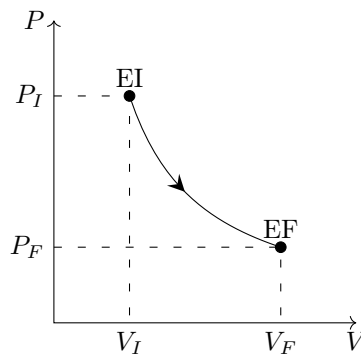
Une transformation quasi-statique est constituée par une suite d'états d'équilibre infiniment voisins. Pratiquement, c'est une transformation lente.

$$EI \rightarrow E1 \rightarrow E2 \rightarrow E3 \rightarrow E4 \rightarrow \dots \rightarrow Ei \rightarrow \dots \rightarrow EF$$



Definition : Transformation réversible

Une transformation est réversible si elle est quasi-statique et si, à chaque instant de la transformation, il y a équilibre entre le système étudié et le milieu extérieur avec lequel il interagit. Pour qu'une transformation soit réversible, il ne faut aucunes causes d'irréversibilité.



Rappel : Un état d'équilibre thermodynamique est un état dans lequel les variables d'états P et T sont à l'équilibre avec le milieu extérieur. On a alors $T = T_{ext}$ et $P = P_{ext}$.

Propriété : Transformation isochore

Une transformation est isochore quand le volume du système est constant au cours de la transformation.

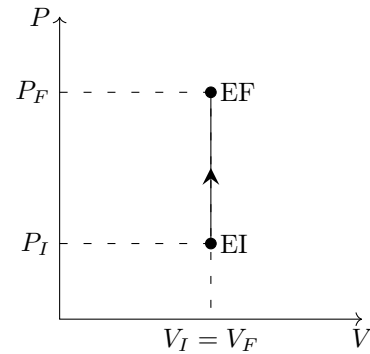
On a alors : $V_I = V_F$.

Dans le diagramme de Clapeyron une transformation isochore a pour trajectoire un segment vertical :

On a alors le travail des forces de pression : $\delta W = -P_{ext}dV = 0$ J

Les transformations sont isochore pour :

- une phase condensée idéale (incompressible).
- un gaz dans une enceinte rigide (indéformable).



Propriété : Transformation monobare

Une transformation est monobare lorsque la pression extérieure est constante au cours de la transformation. On a alors $P_{ext} = C^{te} = P_F$. Une transformation monobare est quelconque, elle peut être irréversible, quasi-statique ou même réversible.

Si la transformation est monobare et irréversible non quasi-statique, on peut très bien avoir $P_{ext} \neq P_I$. L'état initial étant un état d'équilibre rompu.

Dans le cas d'une transformation monobare on a :

$$W_p = -P_{ext}\Delta V = -P_F(V_F - V_I)$$

Propriété : Transformation isobare

Dans le cas d'une transformation monobare où la pression est définie à chaque instant et est en équilibre avec l'extérieur (quasi-statique) on a :

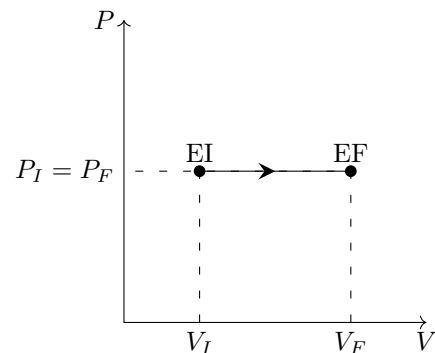
$$P_I = P(t) = P_F = P_{ext} \forall t$$

Dans ce cas on peut représenter la trajectoire de la transformation dans le diagramme de Clapeyron :

On a toujours :

$$W = -P_{ext}(V_F - V_I) = -P_{ext}V_F + P_{ext}V_I = -P_FV_F + P_IV_I = -\Delta(PV)$$

Les transformations isobares sont des transformations lentes avec une paroi mobile.



Propriété : Transformation monotherme

Une transformation est monotherme lorsque la température extérieure est constante au cours de la transformation. On a alors $T_{ext} = C^{te} = T_F$. Une transformation monotherme est quelconque, elle peut être irréversible, quasi-statique ou même réversible.

Si la transformation est monotherme et irréversible non quasi-statique, on peut très bien avoir $T_{ext} \neq T_I$. L'état initial étant un état d'équilibre rompu.

Definition : Thermostat

Lors que la température extérieure est constante au cours de la transformation, on dit alors que le système est en contact avec un thermostat. On définit un thermostat comme un système thermodynamique de température constante.

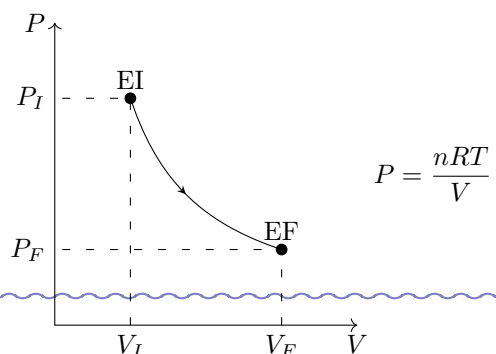
Propriété : Transformation isotherme

Dans le cas d'une transformation monotherme où la température est définie à chaque instant et est en équilibre avec l'extérieur (quasi-statique) on a :

$$T_I = T(t) = T_F = T_{ext} \forall t$$

Dans ce cas on peut représenter la trajectoire de la transformation isotherme d'un gaz parfait dans le diagramme de Clapeyron :

Les transformations isothermes sont des transformations lentes avec une paroi diatherme.



Pour une transformation isotherme et quasi-statique d'un gaz parfait on a en permanence $P = P_{ext}$. On peut alors calculer le travail reçu par le gaz parfait : $W_p = \int_I^F -P_{ext}dV$

$$W_p = \int_{V_I}^{V_F} -PdV = -nRT \int_{V_I}^{V_F} \frac{1}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_F}{V_I} = nRT \ln \frac{P_F}{P_I}$$

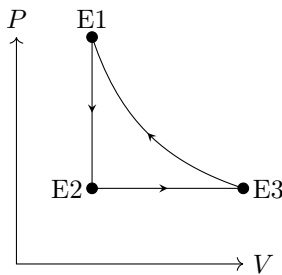
Propriété : Transformation cyclique

Lors d'une succession de différentes transformations, si l'état final de la dernière transformation correspond à l'état initial de la première transformation, on a alors une transformation cyclique.

On a alors pour toutes les variables d'état X du systèmes Σ : $\Delta X_{cycle} = 0$.

On peut avoir une variation des variables d'état au cours du cycle, mais dans l'état final, elles sont égales à leurs valeurs dans l'état initial.

$$\Delta X_{1 \rightarrow 2} + \Delta X_{2 \rightarrow 3} + \Delta X_{3 \rightarrow 1} = (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + (X_1 - X_3) = 0$$



Exemple avec trois transformations : $E1 \rightarrow E2 \rightarrow E3 \rightarrow E1$

Propriété : transformation adiabatique

Lors d'une transformation adiabatique le système n'échange aucun transfert thermique : $Q = 0 \text{ J}$.

Une transformation est adiabatique si :

- les parois du système sont imperméable aux transferts thermiques (parois calorifugées), alors $Q = 0 \text{ J}$.
- la transformation est brutale si le temps de la transformation est petit devant le temps caractéristique des échanges thermiques, alors on peut considérer que $Q = 0 \text{ J}$.

Propriété : Loi de Laplace

On peut appliquer la loi de Laplace si et seulement si :

- Le système est un gaz parfait.
- La transformation est réversible.
- La transformation est adiabatique.

On a alors la conservation de :

$$PV^\gamma = C^{te} \iff TV^{\gamma-1} = C^{te} \iff T^\gamma P^{1-\gamma} = C^{te}$$

avec $\gamma > 1$ un coefficient qu'on suppose indépendant de la température et qui dépend de la nature du gaz.

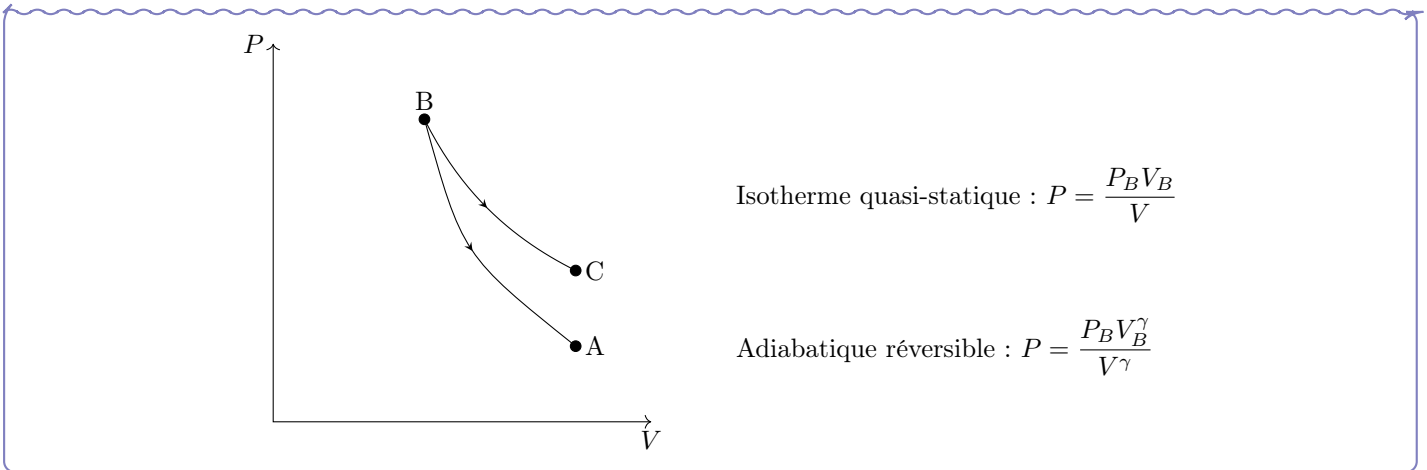
On peut alors calculer la travail des forces de pressions :

$$W = \int_I^F -P_{ext}dV = \int_{V_I}^{V_F} -PdV \quad \text{or } PV^\gamma = P_I V_I^\gamma$$

$$W = - \int_{V_I}^{V_F} \frac{P_I V_I^\gamma}{V^\gamma} dV = -P_I V_I^\gamma \int_{V_I}^{V_F} \frac{1}{V^\gamma} dV = -\frac{P_I V_I^\gamma}{1-\gamma} (V_F^{1-\gamma} - V_I^{1-\gamma})$$

$$W = \frac{1}{\gamma-1} (P_F V_F - P_I V_I) = \frac{nR}{\gamma-1} (T_F - T_I)$$

Si on compare dans le diagramme de Clapeyron une transformation isotherme BC quasi-statique et une transformation BA adiabatique réversible on a :



5 Corps pur diphasé en équilibre thermodynamique

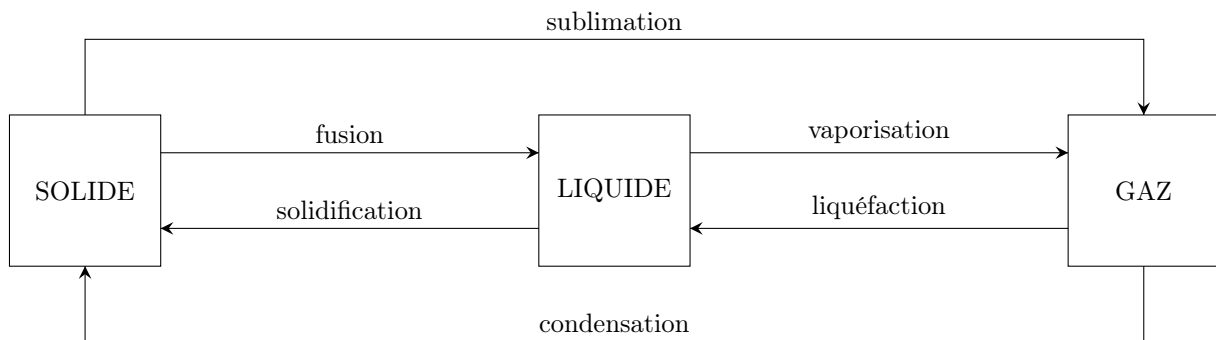
Definition : Corps pur

Un système thermodynamique composé d'un seul type de particule. Ce système est décrit par un nombre limité de paramètre d'état à l'équilibre :

- T , V_m et P sous une phase.
- T , P , ν et x sous deux phases avec x la fraction massique du corps pur sous une phase donnée.

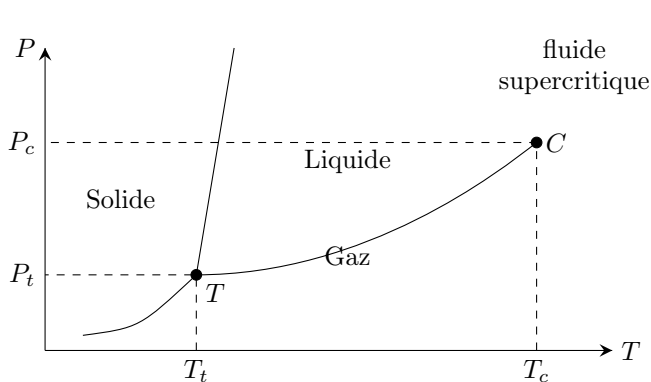
Definition : Changement d'état physique

Lorsque la matière évolue d'un état physique à un autre, elle existe sous deux phases différentes et on parle de corps pur diphasé. On dit qu'il y a changement d'état.

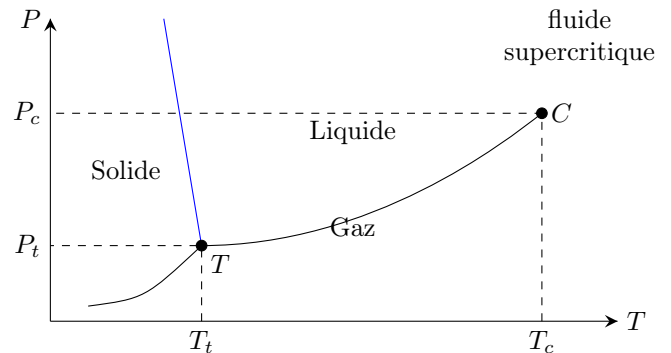


Definition : Diagramme de phases (P,T)

Pour chaque corps pur on établit expérimentalement des diagrammes de phases qui indiquent sous quelle phase physique ce corps se présente suivant les valeurs de certains paramètres d'état. Le diagramme le plus simple est le diagramme (P,T) sur lequel on a la pression en ordonnée et la température en abscisse.



Allure d'un diagramme (P,T).



Allure d'un diagramme (P,T) pour le cas particulier de l'eau.

Sur ce diagramme on peut voir les trois phases.

Propriété : Condition d'équilibre entre deux phases

Dans le diagramme (P, T) deux phases ne coexistent que sur la courbe qui est à la frontière entre les deux phases. On obtient donc la condition d'équilibre suivante :

$$P = P_{I-II}(T)$$

Propriété : Changement d'état quasi-statique et monobare

Lors d'un changement d'état quasi-statique et monobare :

- La pression est constante car l'équilibre mécanique avec la pression extérieure est assuré par la lenteur de la transformation ;
- La température est constante tant que l'équilibre entre les deux phases est maintenu ;

Definition : Point triple

Le point triple est le point du diagramme de phase (P, T) de coordonnées (P_t, T_t) où les phases solide, liquide et gazeuse coexistent à l'équilibre. Soit

$$P_t = P_{S-L}(T_t) = P_{L-G}(T_t) = P_{S-G}(T_t)$$

Definition : Point critique

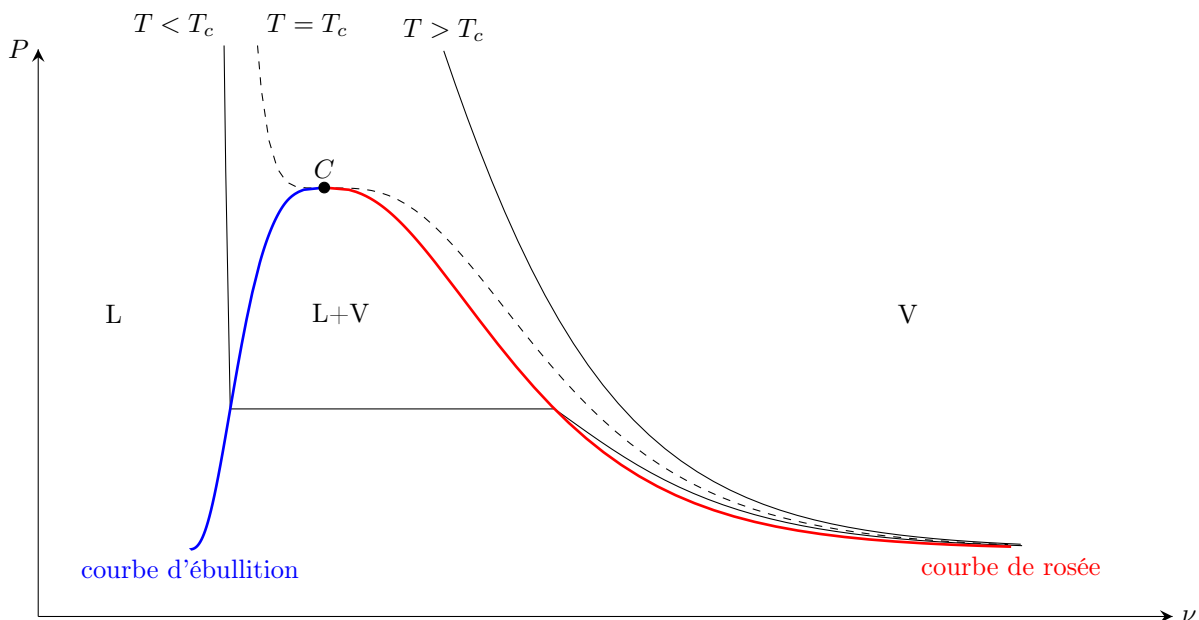
Le point critique C est le point du diagramme de phase au delà duquel le changement d'état liquide-gaz n'est plus observable. On parle alors de fluide hypercritique ou supercritique.

Definition : Pression de vapeur saturante

Pour une température donnée, la pression de vapeur saturante d'un corps pur est la pression d'équilibre entre une phase condensée, liquide ou solide et la phase gazeuse.

Definition : Diagramme de Clapeyron (P, ν)

On choisit de représenter l'équilibre liquide-gaz dans un diagramme de Clapeyron $P = f(\nu)$ avec $\nu = \frac{V}{m}$ le volume massique.

**Definition : Courbes de saturation**

On appelle courbe d'ébullition la frontière qui sépare le domaine du liquide et celui de l'équilibre liquide + vapeur. C'est la courbe où apparaissent les premières bulles.

On appelle courbe de rosée la frontière séparant le domaine de la vapeur et celui de l'équilibre liquide + vapeur. C'est la courbe où apparaissent les premières gouttes.

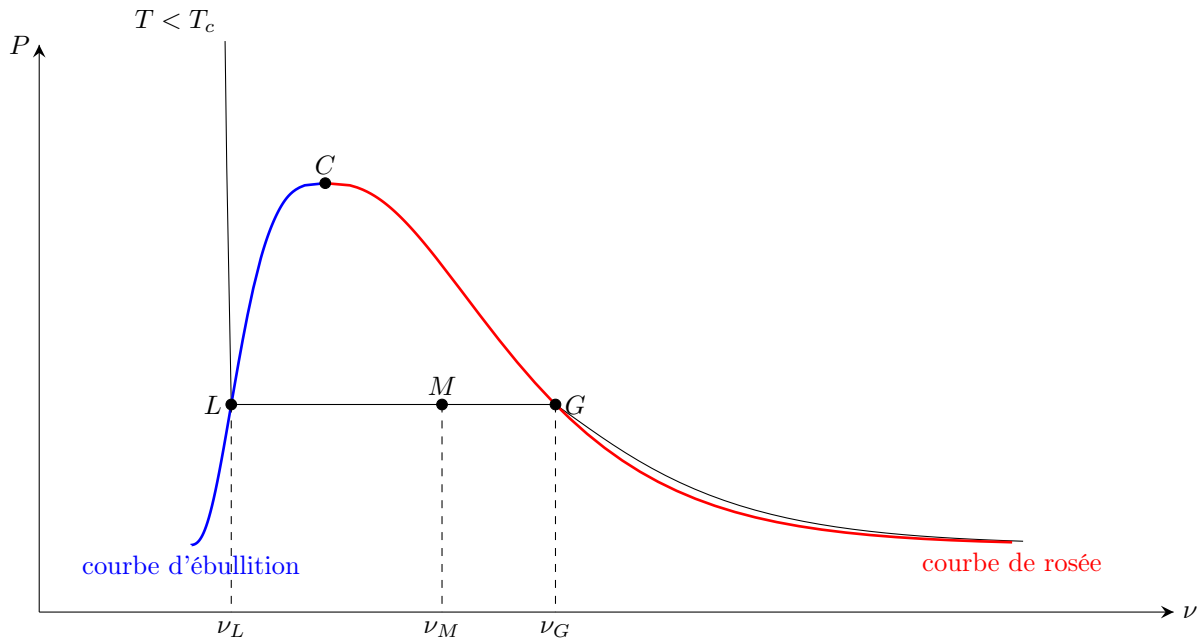
Les deux courbes se rejoignent au point critique.

Definition : Pression de vapeur saturante

Pour une température donnée, la pression de vapeur saturante d'un corps pur est la pression d'équilibre entre une phase condensée, liquide ou solide et la phase gazeuse.

Propriété : Déterminer la composition d'un système diphasé

Soit M un point du diagramme de Clapeyron appartenant au domaine des équilibres diphasés d'abscisse ν_M .



On définit le titre massique en gaz du mélange liquide-gaz : $x = \frac{m_G}{m}$ et $1 - x = \frac{m_L}{m}$

Par conservation du volume on a : $V = V_G + V_L$

Par définition du volume massique aux points M , L et G :

$$\nu_M = \frac{V}{m} \quad \nu_L = \frac{V_L}{m_L} \quad \nu_G = \frac{V_G}{m_G}$$

On obtient alors l'équation :

$$\nu_M = \frac{V}{m} = \frac{V_G + V_L}{m} = \frac{m_G \nu_G + m_L \nu_L}{m} = x \nu_G + (1 - x) \nu_L$$

On en déduit alors :

$$x = \frac{\nu_M - \nu_L}{\nu_G - \nu_L} = \frac{LM}{LG}$$

Qu'on appelle théorème des moments.

Thermodynamique 3 : Le premier principe

1 Premier principe :

Definition : Énergie d'un système thermodynamique

Soit un système thermodynamique Σ , son énergie totale se décompose en :

- l'énergie interne U ,
- l'énergie cinétique macroscopique E_C ,
- l'énergie potentielle d'interaction avec l'extérieur $E_{P,ext}$ (Par exemple le champ de pesanteur).

On a alors l'énergie totale E du système : $E = U + E_C + E_{P,ext}$.

Remarque :

L'énergie cinétique correspond à l'énergie cinétique du solide, elle peut être sous forme de translation et/ou de rotation (voir Mécanique 7).

Premier principe de la thermodynamique

Au cours d'une transformation thermodynamique quelconque d'un système fermé Σ , la variation de l'énergie E entre deux états d'équilibre de Σ au cours d'une transformation est égale à l'énergie qu'il reçoit, somme du travail mécanique W et du transfert thermique Q , soit :

$$\Delta E = W + Q$$

Ici W et Q sont les transferts algébriques, positifs par convention si l'énergie est reçue par Σ .

Remarque : Système thermodynamique au repos macroscopiquement

Si le système est au repos dans le référentiel d'étude on a alors : $\Delta E_{P,ext} = \Delta E_C = 0 \text{ J} \implies \Delta U = W + Q$.

Propriété : Premier principe lors d'une transformation quasi-statique

Lors d'une transformation quasi-statique ou réversible d'un système thermodynamique fermé Σ . On peut considérer deux états d'équilibres voisins tel que :

$$EI(T, V, P) \rightarrow EI(T + dT, V + dV, P + dP)$$

On peut alors appliquer le premier principe tel que :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

avec δW le travail élémentaire reçu lors de la transformation infinitésimale et δQ le transfert thermique élémentaire reçu lors de la transformation infinitésimale.

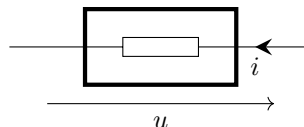
Definition : Travail utile

On a vu comment calculer le travail des forces de pression W_p . On définit W_u le travail utile tel que :

$$W = W_u + W_p$$

Exemple :

- Travail électrique : $\delta W_u = u \delta q$ avec $\delta q = i \delta t$, u la tension aux bornes du dipôle, i le courant qui traverse le dipôle.



- Travail mécanique d'un moteur. On vous précisera dans l'énoncé la valeur du travail, ou elle sera à calculer grâce au premier principe (il n'existe pas de formule).

Propriété : Extensivité de l'énergie interne

Dans le cas d'un système thermodynamique Σ composé de deux sous-systèmes Σ_1 et Σ_2 , on peut utiliser l'extensivité

de l'énergie interne lors d'une transformation :

$$\Delta U_{\Sigma} = \Delta U = \Delta U_{\Sigma_1} + \Delta U_{\Sigma_2}$$

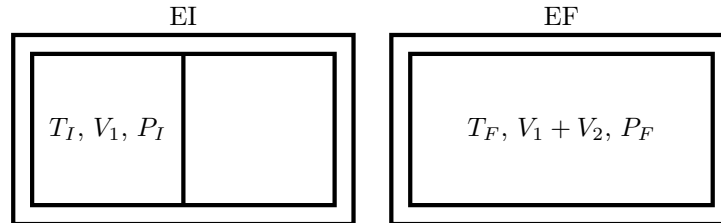
Cette décomposition est particulièrement utile si on applique le premier principe à Σ lors de la transformation :

$$\Delta U_{\Sigma} = W + Q$$

On utilise souvent cette méthode dans le cas où Σ constitue un système isolé de sorte que : $W = 0$ et $Q = 0$.

Definition : Détente de Joule-Gay Lussac

Soit un gaz contenu dans un volume V_1 séparé par une paroi d'un volume V_2 vide. Le volume $V_1 + V_2$ est adiabatique et indéformable. À $t = 0$ s on retire la paroi et on attend l'équilibre :



Soit $\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \text{Gaz parfait} \\ + \text{vide} \end{array} \right\}$ contenu dans $V_1 + V_2 = C^{te}$:

On applique le premier principe à Σ : $\Delta U_{\Sigma} = \Delta U_{GP} + \underbrace{\Delta U_{vide}}_{\substack{W \\ \text{indéformable}}} = \underbrace{Q}_{\text{adiabatique}} = 0 \text{ J.}$

La transformation conserve l'énergie interne du gaz.

Propriété : Détente de Joule-Gay Lussac d'un gaz parfait

Pour un gaz parfait d'après la première loi de Joule on a $U_m = U_m(T)$ donc si $U_F = U_I$ on a alors $U(T_F) = U(T_I)$.

On a alors : $T_F = T_I$ la transformation se fait à température constante $T = C^{te}$.

Méthode : Calcul du transfert thermique pour un gaz parfait au repos

On considère un système thermodynamique Σ composé d'un gaz parfait et de son enceinte. On suppose que les seules forces qui travaillent sont les forces de pressions de manière à avoir $W = W_p$. On considère alors une transformation entre un état initial I et un état final F . On cherche alors à calculer le transfert thermique Q lors de la transformation :

- On désigne le système thermodynamique $\Sigma = \left\{ \text{Gaz parfait} \right\}$;
- On calcule le travail des forces de pressions $W_p = \int_I^F -P_{ext}dV$ au cours de la transformation ;
- On applique le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{\Sigma} = \Delta U_{GP} = W_p + Q$$

- On calcule la variation d'énergie interne du gaz parfait en utilisant la première loi de Joule

$$\Delta U_{GP} = C_V \Delta T \quad \text{ou} \quad \Delta U_{GP} = \int_{T_I}^{T_F} C_V(T) dT$$

- Calculer $Q = \Delta U_{GP} - W_p$

Propriété : Transformation isochore

Pour une transformation isochore l'état initial i est décrit à l'aide des variables d'état (T_I, V_0, P_I) et l'état final f est décrit à l'aide des variables d'état (T_F, V_0, P_F) , on a :

$$W = \int_i^f -P_{ext}dV = 0 \text{ J} \quad \text{car} \quad V = C^{te} \implies dV = 0$$

D'après le premier principe on a alors : $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q + \mathcal{W}$, d'après la première loi de Joule pour une capacité thermique

à volume constant indépendante de la température on a $\Delta U_{i \rightarrow f} = nC_{V_m}(T_F - T_I) = nC_{V_m}\Delta T$. D'où :

$$Q = nC_{V_m}\Delta T$$

Propriété : Transformation isobare

Pour une transformation isobare on a $P = P_0 = P_{ext} = C^{te}$, Σ passe de l'état initial i décrit par les variables d'état (T_I, V_I, P_0) à l'état final f décrit par les variables d'état (T_F, V_F, P_0) , donc le travail des forces de pressions $W = \int_i^f -P_{ext}dV$ s'exprime comme :

$$W = -P_0(V_F - V_I) = -P_0\Delta V \quad \text{et} \quad \Delta U_{i \rightarrow f} = Q + W \implies Q = \Delta U_{i \rightarrow f} - W = \Delta U_{i \rightarrow f} + P_0\Delta V$$

D'après la première loi de joule pour une capacité thermique à volume constant indépendante de la température on a :

$$dU = nC_{V_m}dT$$

En intégrant on obtient :

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = nC_{V_m}(T_F - T_I) = nC_{V_m}\Delta T$$

donc :

$$Q = nC_{V_m}\Delta T + P_0\Delta V \quad \text{avec} \quad P_0\Delta V = nR\Delta T$$

Finalement on a :

$$Q = n(C_{V_m} + R)\Delta T$$

Propriété : Transformation isotherme

Pour une transformation isotherme on a $T = T_0 = T_{ext} = C^{te}$, Σ passe de l'état initial i décrit par les variables d'état (T_0, V_I, P_I) à l'état final f décrit par les variables d'état (T_0, V_F, P_F) .

D'après la première loi de joule $U_m = U_m(T)$, donc on a alors : $\Delta U_{i \rightarrow f} = W + Q = 0$ J car $T_F = T_I = T_0$.

En calculant le travail des forces de pressions $W = \int_i^f -P_{ext}dV$, la transformation étant quasi-statique on a $P_{ext} = P = \frac{nRT_0}{V}$.

On a alors $W = \int_{V_I}^{V_F} -\frac{nRT_0}{V}dV = -nRT_0 \ln \frac{V_F}{V_I}$ donc $Q = nRT_0 \ln \frac{V_F}{V_I}$.

On remarque alors l'équivalence dans le premier principe du travail W et du transfert thermique Q . Toute énergie reçue mécaniquement peut être perdue thermiquement, on a alors l'énergie interne qui est constante.

Definition : Thermostat

Un thermostat est un système thermodynamique dont la température T_0 ne varie pas, même s'il échange de l'énergie (sous forme de transfert thermique ou de travail).

On retient qu'un système thermodynamique fermé peut être considéré comme un thermostat si sa capacité thermique à volume constant est grande devant celle des autres système en interaction avec lui.

2 La fonction d'état enthalpie :

Definition : Enthalpie

On appelle enthalpie d'un système thermodynamique la fonction d'état : $H = U + PV$

où U est l'énergie interne, P la pression et V le volume. L'enthalpie s'exprime en Joules noté J.

H est une grandeur extensive. On a $H_{\Sigma_1 + \Sigma_2} = H_{\Sigma_1} + H_{\Sigma_2}$.

Definition : Capacité thermique à pression constante

On appelle capacité thermique à pression constante d'un système fermé Σ la grandeur C_P telle :

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \quad \text{avec } C_P \text{ en } \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$$

On a alors au cours d'une transformation à pression constante lorsque la température varie de dT :

$$dH = C_P dT \implies \Delta H = \int_{T_I}^{T_F} C_P(T) dT$$

On définit également $C_{Pm} = \frac{C_P}{n}$ la capacité thermique molaire à pression constante.

$c_P = \frac{C_P}{m}$ la capacité thermique massique à pression constante.

Premier principe pour une transformation monobare avec $P_I = P_{ext}$

On a $P_{ext} = P_0$ constante. On a alors $W_P = \int_i^f -P_{ext} dV = \int_{V_I}^{V_F} -P_0 dV = -P_0(V_F - V_I)$.

On considère un système Σ dans l'état initial (P_I, V_I, T_I) qui subit une transformation monobare vers l'état final (P_F, V_F, T_F) . On a alors $P_I = P_F = P_0$.

Le travail des forces de pression $W_P = -P_0(V_F - V_I) = -P_F V_F + P_I V_I = -\Delta(PV)$

On a $W = W_P + W_u$ donc en appliquant le premier principe à Σ entre l'état initial et l'état final on a :

$$\Delta U + \Delta E_C + \Delta E_{P,ext} = W + Q = W_P + W_u + Q = W_u + Q - \Delta(PV)$$

Donc $\Delta U + \Delta(PV) + \Delta E_C + \Delta E_{P,ext} = W_u + Q$ on a alors $\Delta H + \Delta E_C + \Delta E_{P,ext} = W_u + Q$

Pour un système subissant une transformation monobare, le premier principe peut s'écrire :

$$\Delta H + \Delta E_C + \Delta E_{P,ext} = W_u + Q$$

avec W_u le travail utile des forces autres que les forces de pression.

Seconde loi de Joule : Enthalpie d'un gaz parfait

L'enthalpie molaire d'un gaz parfait est : $H_m = U_m + PV_m$ or d'après la loi des gaz parfait on a $PV_m = RT$ donc on a alors :

$$H_m = U_m + RT$$

D'après la première loi de Joule on a $U_m = U_m(T)$.

On obtient alors la seconde loi de Joule qui dit que l'enthalpie molaire d'un gaz parfait ne dépend que de la température T :

$$H_m = U_m(T) + RT = H_m(T)$$

On a alors $C_{Pm} = \frac{dH_m}{dT}$.

Relation de Mayer

Si on dérive l'enthalpie molaire d'un gaz parfait rapport à T on obtient :

$$\frac{dH_m}{dT} = \frac{dU_m}{dT} + R \quad \text{avec } C_{Pm} = \frac{dH_m}{dT} \text{ et } C_{Vm} = \frac{dU_m}{dT}$$

On obtient donc la relation de Mayer :

$$C_{Pm} = C_{Vm} + R$$

On définit le coefficient $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$

On a alors :

$$C_{Pm} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \quad C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

Exemple : Gaz parfait d'un gaz monoatomique

On a vu que pour un gaz parfait monoatomique on a :

$$U = \frac{3}{2}nRT \implies H = \frac{3}{2}nRT + nRT = \frac{5}{2}nRT$$

On obtient alors $\gamma_{\text{mono}} = \frac{5}{3}$ et $C_{P,\text{mono}} = \frac{5}{2}nR$

Propriété : Enthalpie d'une phase condensée idéale

Pour les solides et liquides incompressibles on sait que l'énergie interne molaire $U_m = U_m(T)$ ne dépend que de T .

On a $H_m = U_m(T) + PV_m$ et $dH_m = dU_m + P dV_m + V_m dP$

Or pour les phases condensées idéales on a généralement $V_m dP \ll dU_m$.

Car $V_m = \frac{V}{n}$ est très petit (les phases condensées sont 1000 fois plus dense que les gaz)

Donc $dU_m \approx dH_m \Rightarrow C_P(T) \approx C_V(T) = C(T)$

On appelle $C(T)$ la capacité thermique d'une phase condensée idéal.

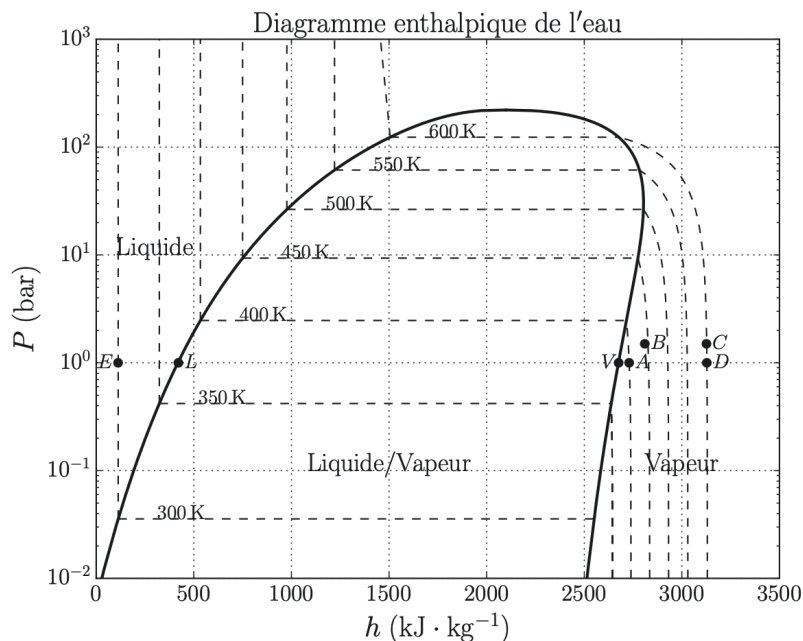
Remarque : Ordre de grandeur

À connaître, la capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_{eau} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

3 Enthalpie de changement d'état

Definition : Diagramme enthalpique et enthalpie de changement d'état

Pour étudier énergétiquement les changements d'état, on trace à partir de valeurs tabulées expérimentales dans un diagramme enthalpique la pression en fonction de l'enthalpie massique pour différentes isothermes :



On retrouve une courbe d'ébullition et une courbe de rosée comme dans le diagramme de Clapeyron. On observe également des paliers de changement d'état lors de transformations isothermes et isobares dans une zone d'équilibre Liquide-Vapeur.

On définit l'enthalpie massique :

- d'un liquide saturante à la température T comme l'abscisse du point L : $h_L(T)$
- de la vapeur saturante à la température T comme l'abscisse du point V : $h_V(T)$
- l'enthalpie massique de vaporisation (ou chaleur latente de vaporisation) :

$$\Delta h_{\text{vap}}(T) = h_V(T) - h_L(T)$$

De la même manière on définit :

- $\Delta h_{\text{fus}}(T) = h_L(T) - h_S(T)$ l'enthalpie massique de fusion avec $h_S(T)$ l'enthalpie massique de solide saturant.
- $\Delta h_{\text{sub}}(T) = h_V(T) - h_S(T)$ l'enthalpie massique de sublimation.

Propriété : Théorème des moments

Si on considère $x = \frac{m_V}{m_L}$ la fraction massique de vapeur dans le cas d'un équilibre liquide-vapeur. On applique le théorème des moments :

$$x = \frac{h_M - h_L}{h_V - h_L}$$

Remarque : Ordre de grandeur

Les enthalpies de transition de phase mettent en jeu des énergies très importantes, pour l'eau on a les valeurs tabulées :

- $\Delta h_{\text{fus}}h(T_0 = 273 \text{ K}) = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} = -\Delta h_{\text{sol}}(T_0)$;
- $\Delta h_{\text{vap}}h(T_1 = 373 \text{ K}) = 526 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} = -\Delta h_{\text{liq}}h(T_1)$

Exemple :

Une poche à glace contient une masse totale $m = 500 \text{ g}$ d'un mélange d'eau liquide et de glace avec une fraction $x_L = 0,200$ de liquide. Quelle est la valeur maximale du transfert thermique qu'elle peut recevoir tout en restant à la température $T_0 = 273 \text{ K}$, température d'équilibre eau-glace sous la pression ambiante $P_0 = 1,00 \text{ bar}$?

La poche de glace reste à la température T_0 tant qu'on est dans l'équilibre Liquide-Solide de l'eau. Le transfert thermique est égal à la variation d'enthalpie puisque la transformation est isobare, on a alors :

$$\begin{aligned} Q &= \Delta H = H_F - H_I \\ &= mh_L - m_L h_L - (m - m_L)h_S \\ &= m(h_L - x_L h_L - (1 - x_L)h_S) \\ &= m(1 - x_L)(h_L - h_S) \\ &= m(1 - x_L)\Delta h_{\text{fus}} = 134 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Exemple : Mesure calorimétrique d'une capacité thermique massique

On verse dans le calorimètre $m_{\text{eau}} = 400 \text{ g}$ d'eau très froide et on mesure la température qui se stabilise après quelques instants. On trouve $\theta_0 = 2,0^\circ\text{C}$. On introduit dans le calorimètre l'échantillon de fer, que l'on a préalablement pesé (sa masse est $m_{\text{Fe}} = 200 \text{ g}$) et qui est initialement à la température d'une étuve thermostatée, $\theta_1 = 85,0^\circ\text{C}$. On vérifie que l'échantillon est bien entièrement couvert d'eau. On attend que la température se stabilise et on mesure la température finale $\theta_F = 6,4^\circ\text{C}$.

Données : $c_{\text{Fe}} = 452 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ dans les tables.

Exemple : Détermination d'une enthalpie de changement d'état

On verse dans le calorimètre $m_{\text{eau}} = 50 \text{ g}$ d'eau chaude et on mesure la température qui se stabilise après quelques instants. On trouve $\theta_0 = 74^\circ\text{C}$. On introduit dans le calorimètre un glaçon sortant du congélateur, à la température $\theta_1 = -18^\circ\text{C}$, après en avoir déterminé la masse $m_{\text{glace}} = 19 \text{ g}$). On attend que la température se stabilise et on mesure la température finale $\theta_F = 38^\circ\text{C}$.

Données : $c_S = 2,06 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ capacité thermique de la glace.

Exemple : Mesure de la valeur en eau du calorimètre

On remplit le calorimètre avec une masse $m_{\text{eau}} = 50 \text{ g}$ d'eau. On place la résistance dans le calorimètre sans la connecter. On laisse l'équilibre s'établir et on mesure la température : $\theta_0 = 21^\circ\text{C}$.

On branche la résistance $R = 10 \Omega$ sur l'alimentation réglée sur $U = 12 \text{ V}$ et pendant une durée $\tau = 2 \text{ min}$.

On attend que l'équilibre soit établi et on lit la température finale $\theta_F = 27^\circ\text{C}$.

Méthode : Mesure d'une capacité thermique massique

- Calculer la température idéale d'équilibre thermique (Question 2).
- Calculer la capacité thermique du calorimètre à partir de la mesure de l'équilibre thermique (Question 3).
- Calculer la valeur en eau d'un calorimètre (Question 3 m_0).
- Calculer une capacité thermique inconnue à partir d'une expérience de calorimétrie (Question 4).

Thermodynamique 4 : Le second principe

1 Irréversibilité et entropie :

Definition : Entropie statistique

L'entropie d'un système thermodynamiquement isolé est donnée par la formule de Boltzmann :

$$S = k_B \ln \Omega$$

où Ω représente le nombre d'état microscopique possibles ou nombre de configurations (positions et vitesses de chaque particules) compatible avec l'état macroscopique observé (P, V, T, U).

L'entropie mesure le manque d'information sur le système à l'échelle microscopique, on dit que l'entropie mesure le désordre moléculaire.

Propriété : Extensivité de l'entropie

Soit un système fermé Σ composé de deux sous-système Σ_1 et Σ_2 . Le nombre de configuration de Σ est Ω , le nombre de configuration de Σ_1 est Ω_1 et le nombre de configuration de Σ_2 est Ω_2 . On a la relation :

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \implies S_\Sigma = S_{\Sigma_1} + S_{\Sigma_2}$$

Remarque : Insuffisance du premier principe

Soit une transformation thermodynamique faisant passer le système d'un état A à un état B . Le premier principe nous donne :

$$\underbrace{U(B)}_{\text{état final}} - \underbrace{U(A)}_{\text{état initial}} = W + Q$$

Si maintenant on multiplie la relation par (-1) , on envisage la transformation inverse permise par la premier principe.

$$\underbrace{U(A)}_{\text{état final}} - \underbrace{U(B)}_{\text{état initial}} = (-W) + (-Q)$$

Or on sait que pour beaucoup de transformations l'irréversibilité est interdite. Les causes de cette irréversibilité sont :

- frottements mécaniques
- Transfert thermique
- diffusion des particules

On va donc introduire le second principe de la thermodynamique et l'entropie, ce principe aura pour but de définir un sens d'évolution du système.

Definition : Transformation irréversible

Une transformation est irréversible si elle ne peut pas revenir de son état final vers son état initial sans changer fortement les conditions extérieures. Les causes d'irréversibilités sont :

- Pas d'équilibre mécanique initial ;
- Pas d'équilibre thermique initial ;
- Pas d'équilibre de diffusion initial.

Definition : Entropie

Pour tout système thermodynamique, le deuxième principe postule l'existence d'une fonction d'état extensive, l'entropie notée S et s'exprime en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$. On a par ailleurs :

$$S_{\Sigma_1 + \Sigma_2} = S_{\Sigma_1} + S_{\Sigma_2} \quad \text{avec } \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2 \text{ deux systèmes thermodynamiques}$$

Énoncé du second principe :

Lorsqu'un système Σ subit une transformation d'un état initial I à un état final F , la variation $\Delta S = S_F - S_I$ de son entropie est :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}}$$

On définit S_{ech} comme l'entropie échangée avec l'extérieur lors de la transformation dont l'expression est :

$$S_{\text{ech}} = \int_I^F \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$$

avec δQ le transfert thermique élémentaire reçu par le système lors de la transformation.

On définit S_{cr} comme l'entropie créée dans le système lors de la transformation. On a :

$$S_{\text{cr}} \begin{cases} > 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} & \text{pour une transformation irréversible.} \\ = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} & \text{pour une transformation réversible} \end{cases}$$

Propriété : Second principe entre deux états voisins

Lorsqu'un système fermé Σ passe d'un état initial (V, P, T) à un état voisin $(V + dV, P + dP, T + dT)$, la variation d'entropie est :

$$dS = \delta S_{\text{ech}} + \delta S_{\text{cr}}$$

avec δS_{ech} l'entropie élémentaire échangée au cours de la transformation.

$$\delta S_{\text{ech}} = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$$

et $\delta S_{\text{cr}} \geq 0$ l'entropie élémentaire créée au cours de la transformation.

Propriété : Cas d'un système isolé thermiquement (adiabatique)

Dans le cas d'un système isolé, le transfert thermique Q est nul et on a donc : $S_{\text{ech}} = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

On a alors $\Delta S = S_{\text{cr}} \geq 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Lors d'une évolution spontanée d'un système isolé, évolution nécessairement irréversible, son entropie croît. L'évolution s'arrête lorsque le système isolé a atteint un état dans lequel son entropie est maximale.

Définition : Transformation isentropique

On définit une transformation isentropique, une transformation où l'entropie du système ne varie pas comme une transformation :

- adiabatique
- réversible.

Propriété : Transformation monotherme

Dans le cas d'un système en contact avec un thermostat de température T_0 , on a $T_{\text{ext}} = T_0 = C^{te}$ tout au long de la transformation.

On peut alors calculer l'entropie échangée : $S_{\text{ech}} = \int_I^F \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} = \frac{Q}{T_0}$

On obtient le même résultat pour une transformation isotherme, car une transformation isotherme est forcément monotherme.

Propriété : Transformation réversible

Dans le cas d'une transformation réversible, on a pour chaque instant l'équilibre thermique $T = T_{\text{ext}}$.

On peut alors calculer l'entropie échangée : $S_{\text{ech}} = \int_I^F \frac{\delta Q}{T}$

D'après le second principe on obtient alors : $\Delta S = \int_I^F \frac{\delta Q}{T}$

2 Entropie d'un corps pur

Propriété : Entropie molaire d'un gaz parfait

Par extensivité on calcule l'entropie d'un gaz parfait :

$$S = n \times S_m(T, P) = m \times s(T, P)$$

Pour un gaz parfait de coefficient $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ indépendant de la température on a l'entropie molaire d'un gaz parfait est donnée en fonction des variables (T, P) :

$$S_m = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + S_{m0}$$

avec S_{m0} l'entropie molaire à la température T_0 et la pression P_0 .

On peut mettre également l'expression de l'entropie molaire sous la forme :

$$S_m = \frac{R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{V_m}{V_{m0}}\right) + S_{m0}$$

avec $V_m = \frac{RT}{P}$ et $V_{m0} = \frac{RT_0}{P_0}$ le volume molaire à (T, P) et à (T_0, P_0) .

On peut mettre également l'expression de l'entropie molaire sous la forme :

$$S_m = \frac{R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{V_m}{V_{m0}}\right) + S_{m0}$$

avec $V_m = \frac{RT}{P}$ et $V_{m0} = \frac{RT_0}{P_0}$ le volume molaire à (T, P) et à (T_0, P_0) .

Propriété : Transformation isentropique d'un gaz parfait

Pour une transformation isentropique d'un gaz parfait où $S_m = S_{m0}$ on obtient la loi de Laplace :

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$$

Propriété : Entropie massique d'une phase condensée indilatable et incompressible

Par extensivité on a :

$$S = n \times S_m(T) = m \times s(T)$$

avec $s(T) = c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0$ et s_0 l'entropie massique à la température T_0 .

Propriété : Entropie d'un système diphasé

Par extensivité d'un système fermé Σ sous deux phases 1 et 2 de masse m_1 et m_2 :

$$S = m_1 s_1 + m_2 s_2 = m \times (x_1 s_1 + (1 - x_1) s_2)$$

Définition : Entropie de changement d'état

L'entropie massique de changement d'état $\Delta s_{1 \rightarrow 2}$ à la température T est la différence entre les entropies massiques des phases saturantes 1 et 2 à cette température :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} S = m \Delta_{1 \rightarrow 2} s = m(s_2(T) - s_1(T))$$

Propriété : Changement d'état réversible, isobare et isotherme

Lors d'un changement d'état isobare et isotherme de température T_0 et pression d'équilibre $P_{1 \rightarrow 2}(T_0)$. Puisqu'il y a équilibre thermique, mécanique et de diffusion on a :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + \cancel{S_{\text{cr}}} = \frac{Q}{T_0}$$

or comme la transformation est isobare sans travail utile, le premier principe nous donne :

$$\Delta H = \cancel{W_u} + Q \implies \Delta S = \frac{\Delta H}{T_0}$$

On retiendra que l'enthalpie de changement d'état et l'entropie de changement d'état massiques ou molaires à la température T sont liées par la relation :

$$\Delta h_{1 \rightarrow 2}(T) = T \Delta s_{1 \rightarrow 2}(T)$$

3 Application :

Méthode : Méthode de calcul de l'entropie créée

Lorsqu'on étudie la transformation d'un système thermodynamique entre un état initial i dont les variables d'état sont connues (T_I, P_I, V_I) et un état final f dont les variables d'états sont elles aussi connues (T_F, P_F, V_F). On peut alors :

- utiliser les formules fournies pour calculer $\Delta S_{i \rightarrow f}$;
- appliquer le premier principe de la thermodynamique pour calculer $S_{\text{éch}} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$;
- appliquer le second principe de la thermodynamique pour calculer $S_{\text{cr}} = \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{\text{éch}}$;

On peut alors savoir si la transformation est une transformation réversible si $S_{\text{cr}} = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ou si la transformation est irréversible si $S_{\text{cr}} > 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Propriété : Transformation isotherme QS d'un gaz parfait

On considère un gaz parfait passant d'un état initial i ($T_I = T_0, P_I, V_I$) à un état final f ($T_F = T_0, P_F, V_F$) de manière quasi statique au contact d'un thermostat de température $T_{\text{ext}} = T_0$. La transformation est alors isotherme et on a l'expression de l'entropie molaire qui nous donne :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = n \times \Delta S_m = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_F}{T_I} \right) + nR \ln \left(\frac{V_F}{V_I} \right) = nR \ln \left(\frac{V_F}{V_I} \right)$$

On applique le premier principe :

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = Q + W$$

On considère alors la première loi de Joule qui donne $dU = nC_{V_m}dT = 0$ car la transformation est isotherme, donc :

$$Q = -W = \int_{V_I}^{V_F} P_{\text{ext}} dV \quad \Leftrightarrow \quad Q = \int_{V_I}^{V_F} P dV = nRT_0 \ln \left(\frac{V_F}{V_I} \right)$$

On peut alors calculer $S_{\text{éch}} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} = \frac{1}{T_F} \int_i^f \delta Q = \frac{Q}{T_F}$ avec $T_{\text{ext}} = T_0$ la température du thermostat :

$$S_{\text{éch}} = nR \ln \left(\frac{V_F}{V_I} \right)$$

On applique maintenant le second principe :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}} \quad \Leftrightarrow \quad S_{\text{cr}} = \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{\text{éch}} = 0$$

Propriété : Transformation isochore et monotherme d'un gaz parfait

On considère un gaz parfait passant d'un état initial i ($T_I, P_I, V_I = V_0$) à un état final f ($T_F, P_F, V_F = V_0$) en le mettant en contact avec un thermostat de température $T_{\text{ext}} = T_F$. On a l'expression de l'entropie molaire qui nous donne :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \frac{nR}{\gamma - 1} \int_{T_I}^{T_F} \frac{dT}{T} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_F}{T_I}$$

On applique le premier principe :

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = Q + \mathcal{W} \text{ car } W = \int_i^f -P_{\text{ext}} d\mathcal{V}$$

On considère alors la première loi de Joule qui donne $dU = nC_{V_m}dT$ avec $C_{V_m} = \frac{R}{\gamma - 1} = C^{te}$, donc :

$$Q = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_F - T_I)$$

On peut alors calculer $S_{\text{éch}} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} = \frac{1}{T_F} \int_i^f \delta Q = \frac{Q}{T_F}$ avec $T_{\text{ext}} = T_F$ la température du thermostat :

$$S_{\text{éch}} = \frac{nR}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_I}{T_F} \right)$$

On applique maintenant le second principe :

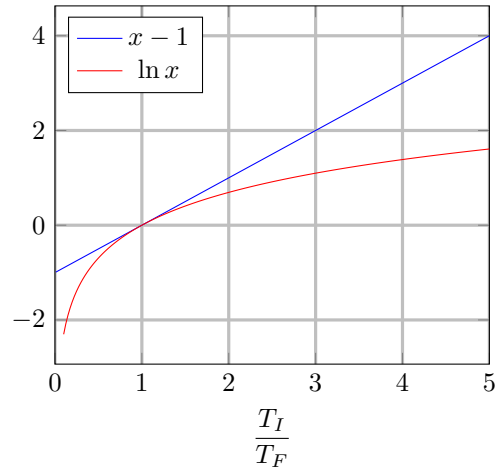
$$\begin{aligned} \Delta S_{i \rightarrow f} &= S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}} \\ S_{\text{cr}} &= \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{\text{éch}} \\ &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_F}{T_I} - \frac{nR}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_I}{T_F} \right) \end{aligned}$$

On a alors :

$$S_{\text{cr}} = \frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{T_I}{T_F} - 1 - \ln \frac{T_I}{T_F} \right) = C_V (x - 1 - \ln x)$$

avec $x = \frac{T_I}{T_F}$

L'entropie créée est positive pour $T_F \neq T_I$, on a donc affaire à une transformation irréversible.



Propriété : Transformation isobare et monotherme d'un gaz parfait

On considère un gaz parfait passant d'un état initial i ($T_I, P_I = P_0, V_I$) à un état final f ($T_F, P_F = P_0, V_F$) en le mettant en contact avec un thermostat de température $T_{\text{ext}} = T_F$. On a alors la deuxième identité thermodynamique qui devient :

$$dH = TdS + VdP \implies dS = \frac{dH}{T} \text{ avec } dH = nC_{Pm}dT \text{ et } C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

On obtient alors

$$dS = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} \implies \Delta S_{i \rightarrow f} = \int_{S(T_I)}^{S(T_F)} dS = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \int_{T_I}^{T_F} \frac{dT}{T} = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_F}{T_I}$$

On applique le premier principe :

$$\Delta H_{i \rightarrow f} = Q + \cancel{W_u} \text{ car } W_u = 0 \text{ J}$$

On considère alors la deuxième loi de Joule qui donne $dH = nC_{Pm}dT$ avec $C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = C^{te}$, donc :

$$Q = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} (T_F - T_I)$$

On peut alors calculer $S_{\text{éch}} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} = \frac{Q}{T_{\text{ext}}}$ avec $T_{\text{ext}} = T_F$ la température du thermostat :

$$S_{\text{éch}} = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_I}{T_F} \right)$$

On applique maintenant le second principe :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}} \implies S_{\text{cr}} = \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{\text{éch}} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_F}{T_I} - \frac{nR}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_I}{T_F} \right)$$

On a alors :

$$S_{\text{creee}} = \frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{T_I}{T_F} - 1 - \ln \frac{T_I}{T_F} \right)$$

L'entropie créée est positive pour $T_F \neq T_I$, on a donc affaire à une transformation irréversible.

Thermodynamique 5 : Machines thermiques

1 Introduction aux machines thermiques

Definition : Machine thermique

Dispositif dans lequel un système fluide subit une succession de transformations qui forment un cycle permettant une conversion continue d'énergie.

Au cours d'un cycle, le système fluide échange de l'énergie sous forme de travail avec la milieu extérieur et de transferts thermiques avec des thermostats.

Propriété : Machine motrice/réceptrice

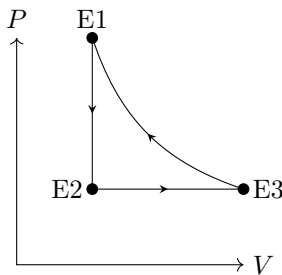
Le système fluide échange reçoit un travail W mécanique de l'extérieur au cours du cycle :

- $W < 0$: Le fluide fournit un travail à l'extérieur au cours du cycle, la machine est alors motrice ;
- $W > 0$: Le fluide reçoit un travail de l'extérieur au cours du cycle, la machine est alors réceptrice (machines frigorifiques, pompes à chaleur).

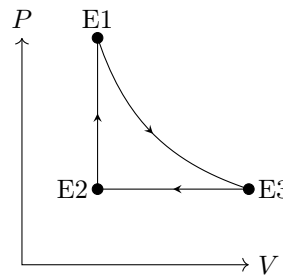
Propriété : Interprétation graphique du diagramme de Clapeyron

On peut connaître le signe du travail à partir du sens de parcourt du cycle dans le diagramme de Clapeyron :

Sens récepteur : Trigonométrique

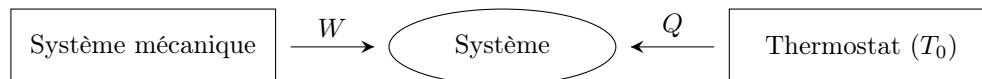


Sens moteur : Horaire



Definition : Machine monotherme

Une machine thermique monotherme est composée d'un fluide en contact avec un unique thermostat de température T_0 , au cours du cycle on représente :



On cherche à connaître les propriétés d'une telle machine ($W > 0$ ou $W < 0$).

Propriété : Les principes appliqué à une machine monotherme

On applique le premier principe sur le cycle de cette machine :

$$\Delta U_{cycle} = W + Q = 0 \implies W = -Q$$

On applique le second principe sur le cycle de cette machine :

$$\Delta S_{cycle} = S_{ech} + S_{cr} = \frac{Q}{T_0} + S_{cr} \implies Q = -T_0 S_{cr} < 0$$

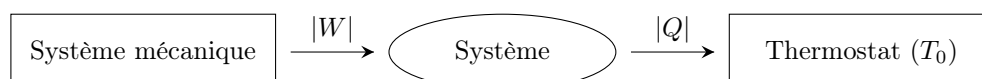
On a alors un transfert thermique du système vers le thermostat, ainsi que $W > 0$.

Une machine monotherme est donc forcément réceptrice, et fournit un transfert thermique vers l'extérieur, c'est uniquement le cas pour un chauffage...

Si on souhaite obtenir un autre type de machine thermique on a forcément besoin d'au moins deux thermostats.

Propriété : Sens des échanges d'une machine monotherme

En utilisant les deux principes de la thermodynamique on peut alors déduire les signes des termes d'échanges et tracer le diagramme :



2 Les moteurs dithermes

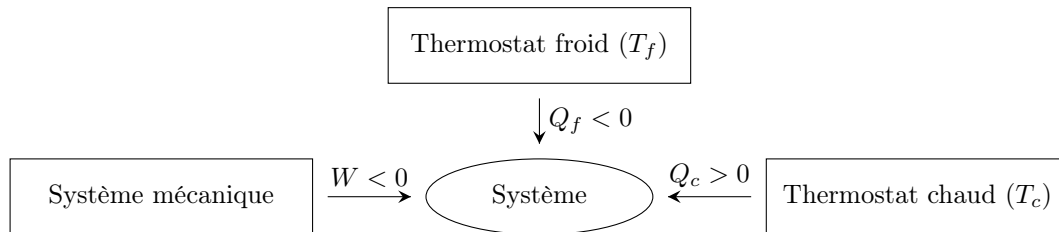
Definition : Moteur thermique ditherme

On considère un fluide qui reçoit un transfert thermique de la part de 2 thermostats :

- Un thermostat chaud de température T_c ;
- Un thermostat froid de température $T_f < T_c$;

Par définition :

- Le moteur consomme un transfert thermique de la part de la source chaude $Q_c > 0$ (combustion du carburant).
- Le moteur fournit un travail mécanique vers l'extérieur $W < 0$.



Propriété : application du premier principe

On applique le premier principe au fluide dans la machine thermique durant un cycle :

$$\Delta U_{cycle} = W + Q = W + Q_c + Q_f = 0 \implies W = -(Q_f + Q_c) < 0$$

Propriété : application du second principe

On applique le second principe au fluide dans la machine thermique durant un cycle :

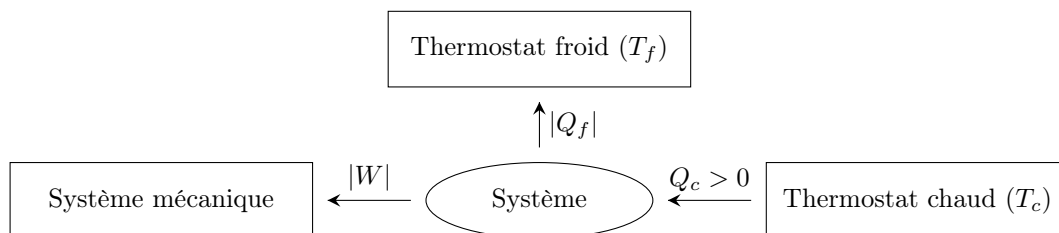
$$\Delta S_{cycle} = S_{ech} + S_{cr} = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{cr} = 0 \implies \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Clausius. Elle devient une égalité si le cycle est parfaitement réversible, on a alors $S_{cr} = 0$.

Propriété : Sens des échanges d'un moteur ditherme

Comme la machine doit être motrice on impose que $W < 0$. Le transfert thermique Q sur le cycle est séparé en deux étapes (les deux thermostats) et on a :

$$Q = Q_c + Q_f \text{ avec } Q_c > 0 \text{ et } Q_f < 0$$



Definition : Rendement moteur

On définit le rendement d'un moteur ditherme par :

$$\eta = \left| \frac{\text{Énergie utile}}{\text{Énergie couteuse}} \right| = \frac{|W|}{Q_c} = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c}$$

On obtient alors : $\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$

En utilisant le second principe on obtient : $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f S_{cr}}{Q_c}$

Théorème de Carnot

Si on considère un cycle totalement réversible on a :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \implies \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$$

On obtient alors pour le rendement :

$$\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c} < 1$$

Dans le cas d'un cycle totalement réversible, le rendement est maximum et vaut le rendement de Carnot $\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$

Propriété : Cycle moteur de Carnot

On construit un cycle moteur ditherme réversible à l'aide de :

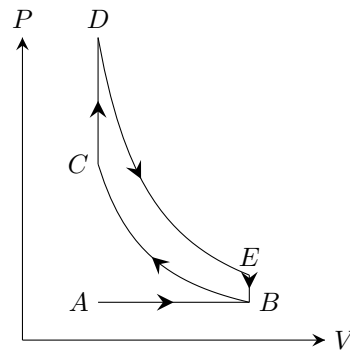
- 2 transformations isothermes QS de températures T_f et T_c ;
- 2 transformations adiabatiques réversibles pour passer de T_f à T_c puis de T_c à T_f .

On trace dans le diagramme (P, V) :

**Exemple : Modélisation du moteur à explosion**

On considère un gaz parfait au cours d'un cycle de moteur à explosion. On modélise le cycle de la manière suivante :

- AB admission isobare ;
- BC compression adiabatique supposée réversible ;
- CD explosion isochore ;
- DE détente adiabatique supposée réversible ;
- EB échappement isochore ;
- BA échappement isobare ;



Soit le rendement $\eta = \frac{-W}{Q_{ch}} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}}$ d'après le premier principe.

On calcule $Q_{ch} = \Delta U_{CD} = C_V(T_D - T_C)$ et $Q_{fr} = \Delta U_{EB} = C_V(T_B - T_E)$

On applique la loi de Laplace aux transformations BC et DE et on obtient :

$$T_C = T_B \left(\frac{V_{max}}{V_{min}} \right)^{\gamma-1} \text{ et } T_D = T_E \left(\frac{V_{max}}{V_{min}} \right)^{\gamma-1} \implies \eta = 1 - \left(\frac{V_{max}}{V_{min}} \right)^{\gamma-1}$$

Remarque : Ordres de grandeur

- Moteur à essence : 35% ;
- Moteur Diesel : 45% ;
- Centrale électrique nucléaire : 30% à 40%, environ 10% de la production mondiale d'électricité ;
- Centrale à gaz : 60%, environ 20% de la production mondiale d'électricité.
- Centrale à charbon : 40%, environ 40% de la production mondiale d'électricité.

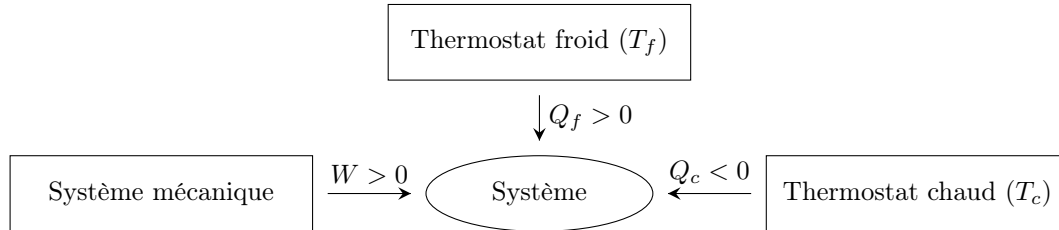
Definition : Cogénération

Dans une centrale électrique, on peut se servir du transfert thermique vers la source froide pour un autre usage, comme par exemple un système de chauffage, la production d'eau chaude, ou un procédé industriel nécessitant un transfert thermique.

3 Les machines frigorifiques dithermes**Definition : Machine frigorifique ditherme**

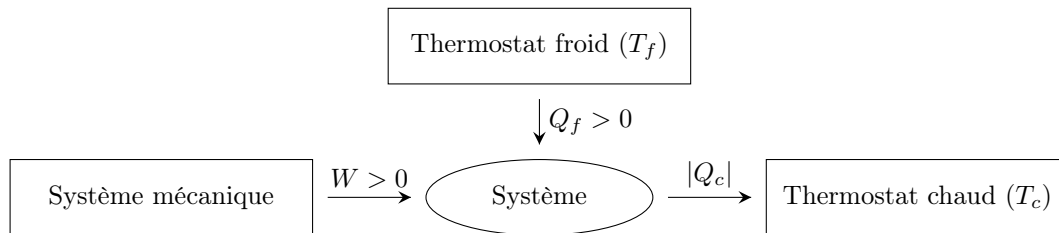
On considère un dispositif dont le fluide parcourt un cycle au cours duquel :

- il reçoit un travail mécanique $W > 0$ (récepteur) ;
- il reçoit un transfert thermique $Q_f > 0$ de la part de la source froide qu'on cherche à refroidir.

**Propriété : Sens des échanges d'une machine frigorifique ditherme**

Comme la machine doit être réceptrice on impose que $W > 0$. Le transfert thermique Q sur le cycle est séparé en deux étapes (les deux thermostats). Le but est de refroidir la source froide donc $Q_f > 0$:

$$Q = Q_c + Q_f \text{ avec } Q_c < 0 \text{ et } Q_f > 0$$

**Definition : Efficacité d'une machine frigorifique**

Le but d'une machine frigorifique est de produire du froid. On définit alors l'efficacité de la machine par :

$$e_{frigo} = \left| \frac{\text{Énergie utile}}{\text{Énergie couteuse}} \right| = \frac{Q_f}{W} = -\frac{Q_f}{Q_f + Q_c}$$

On obtient alors : $e_{frigo} = -\frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}}$

En utilisant le second principe on obtient : $e_{frigo} = \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1 + \frac{T_c S_{cr}}{Q_f}}$

Théorème de Carnot

Si on considère un cycle totalement réversible on a : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \implies \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$

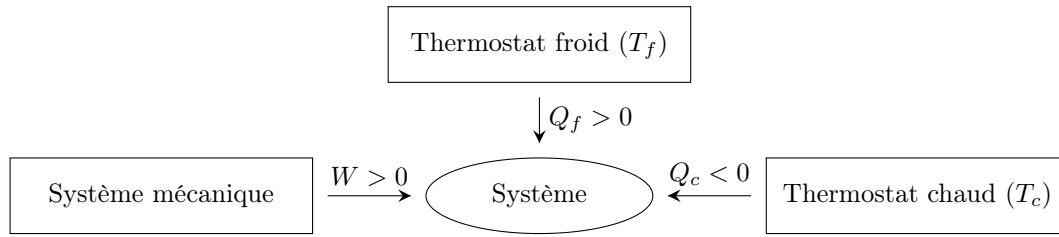
On obtient alors pour le rendement : $e_{frigo} = -\frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \leq \frac{T_f}{T_c - T_f}$ Dans le cas d'un cycle totalement réversible,

l'efficacité est maximale et vaut l'efficacité de Carnot $e_{frigo,c} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$

4 Les pompes à chaleur dithermes**Definition : Pompe à chaleur ditherme**

On considère une machine parcourut par un fluide qui subit un cycle thermodynamique au cours duquel :

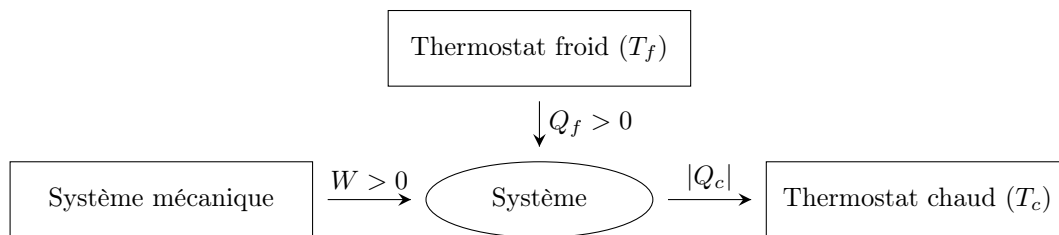
- le fluide reçoit un travail $W > 0$ (récepteur);
- le fluide fournit un transfert thermique vers la source chaude $Q_c < 0$ pour réchauffer la source chaude.



Propriété : Sens des échanges d'une pompe à chaleur ditherme

Comme la machine doit être réceptrice on impose que $W > 0$. Le transfert thermique Q sur le cycle est séparé en deux étapes (les deux thermostats). On souhaite réchauffer la source chaude donc $Q_c < 0$:

$$Q = Q_c + Q_f \text{ avec } Q_c < 0 \text{ et } Q_f > 0$$



Definition : Efficacité d'une pompe à chaleur

Le but d'une pompe à chaleur est de produire du chaud. On définit alors l'efficacité de la machine par :

$$e_{pac} = \left| \frac{\text{Énergie utile}}{\text{Énergie couteuse}} \right| = \frac{|Q_c|}{W} = -\frac{Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_f + Q_c}$$

On obtient alors : $e_{pac} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}}$

En utilisant le second principe on obtient : $e_{pac} = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f S_{cr}}{Q_c}}$

Théorème de Carnot

Si on considère un cycle totalement réversible on a :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \implies \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$$

On obtient alors pour le rendement :

$$e_{pac} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} \leq \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

Dans le cas d'un cycle totalement réversible, l'efficacité est maximale et vaut l'efficacité de Carnot $e_{pac,c} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

Remarque : Ordres de grandeur

- Congélateur domestique : $e = 2$;
- Réfrigérateur domestique : $e = 8$;
- Pompe à chaleur : $e = 3$ à 5 ;
- Norme pompe à chaleur classe A : $e > 3,65$