Exercices 14 – Limites et Continuité – Corrigés

Exercice 1. — Déterminer si les limites des fonctions suivantes existent en a :

1) $x \longmapsto x \ln x \qquad (\text{en } a = 0)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ (croissances comparées) ; pas de limite à gauche de 0.

2) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x} \qquad (\text{en } a = 0)$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (DL1)

3) $x \longmapsto x^2 \sin(1/x^3) \qquad (\text{en } a = 0)$

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(1/x^3\right) = 0$ (gendarmes)

4) $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{-1/x} \qquad (\text{en } a = 0)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{-1/x} = 0$ (croissances comparées) ; $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{-1/x} = +\infty$ (usuel)

5) $x \longmapsto \mathrm{e}^{-1/x} \qquad (\text{en } a = 0)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-1/x} = 0$ (usuel) ; $\lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{-1/x} = +\infty$ (usuel)

6) $t \longmapsto \dfrac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}$ en $(a = 0 \text{ et } a = +\infty)$

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1} = 0$ (DL1) ; $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1} = 0$ (croissances comparées)

7) $t \longmapsto \dfrac{t}{\sin(\alpha t)}$ (en $a = 0$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$)

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\sin(\alpha t)} = \dfrac{1}{\alpha}$ (DL1)

8) $x \longmapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ (en $a = 0$ et $a = +\infty$)

Pour $x > 1$, on a : $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. En particulier : $\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

Pour tout réel x non nul, on a : $\frac{1}{x} \leqslant \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < \frac{1}{x} + 1$.

Il s'ensuit que pour tout réel x non nul, $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ est compris entre 1 et $1+x$, quantités ayant pour limite 0 lorsque x tend vers 0. Le théorème d'encadrement permet donc de conclure :

$$\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

Exercice 2. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}$. Comment choisir $f(0)$ pour que f soit continue en 0 ?

On a : $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1} = 1$ (DL1). On doit donc poser $f(0) = 1$ pour que f soit continue en 0.

Exercice 3. — Même question avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$.

On a : $\lim_{t\to 0} \dfrac{\arctan t}{t} = 1$ (DL1). On doit donc poser $f(0) = 1$ pour que f soit continue en 0.

Exercice 4. — Même question avec la fonction f définie sur $]-\pi/2;\pi/2[\setminus\{0\}$ par $f(t) = \dfrac{\tan t}{\sqrt{|t|}}$.

On a : $\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan t}{\sqrt{|t|}} = 0$ (DL1). On doit donc poser $f(0) = 0$ pour que f soit continue en 0.

Exercice 5. — Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans $[0;+\infty[$.

La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^3 + x^2 + x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et continue sur $\mathbb{R}_+$. En outre, $f(0) = 1$ et f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

On en déduit que la fonction f s'annule en un unique réel positif, càd que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6. — Montrer que l'équation (E) : $x - \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\alpha \in [1/2;1]$.

La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x - \mathrm{e}^{-x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$. En outre, f a pour limites $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement.

On en déduit déjà que la fonction f s'annule en un unique réel, càd que l'équation $x - \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

De plus, puisque $f(1/2)f(1) \leqslant 0$, on peut affirmer que : $\alpha \in [1/2; 1]$.

Exercice 7. — Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note (E_n) l'équation : $\tan x = nx$.

1/ Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n dans $I = \left]0; \pi/2\right[$.

Soit n un entier $\geqslant 2$. La fonction $f : x \longmapsto \tan x - nx$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et :

$$\forall\, x \in I,\ f'(x) = 1 + \tan^2(x) - n \qquad \text{et} \quad f''(x) = 2\tan(x)\left(1 + \tan^2(x)\right)$$

Sur I, f'' est strictement positive, donc f' est strictement croissante. Or f' a pour limite $1 - n$ en 0 (et $1 - n < 0$), et $+\infty$ à gauche de $\pi/2$.

On en déduit que f' est strictement négative puis strictement positive sur I, et qu'elle ne s'annule qu'une seule fois dans I, en un réel que nous noterons β_n.

D'après ce qui précède, f est strictement décroissante sur $]0, \beta_n[$, et strictement croissante sur $]\beta_n, \pi/2[$.

Puisqu'en outre $f(0) = 0$, et $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que f est stictement négative sur $]0, \pi/2[$, et que f s'annule exactement une fois dans $]\beta_n, \pi/2[$.

Conclusion. La fonction f s'annule exactement une fois dans I ; càd que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n dans $I = \left]0; \pi/2\right[$.

2/ Que peut-on dire de la suite (x_n) ?

Soit n un entier naturel. Par définition du réel x_n, on a $x_n > 0$ et $\tan(x_n) = nx_n$. La suite (x_n) est croissante et majorée par $\pi/2$; d'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente, vers une limite ℓ strictement positive. On en déduit que nx_n tend vers $+\infty$, donc $\tan(x_n)$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 8. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) \times f(y)$.

1) Etablir que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Puis établir que si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Par hypothèse : $f(0+0) = f(0) \times f(0)$. D'où : $f(0)\left(f(0) - 1\right) = 0$. Il s'ensuit que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Si $f(0) = 0$, alors pour tout réel x, on a : $f(x) = f(x + 0) = f(x) \times f(0) = 0$.

Conclusion. On a : $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Dans le cas où $f(0) = 0$, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

2) **A partir de maintenant, on suppose** $f(0) = 1$.

a) Etablir que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a : $f(x) = f(x/2) \times f(x/2) \geqslant 0$.

Etablissons l'inégalité stricte. S'il existait un réel x tel que $f(x) = 0$, alors on aurait : $f(0) = f(x) \times f(-x) = 0$; ce qui contredirait l'hypothèse suivant laquelle $f(0) = 1$.

Conclusion. f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

b) Etablir que pour tout entier naturel n non nul, on a : $f(n) = [f(1)]^n$, et $f(-n) = \dfrac{1}{f(n)}$.

Une récurrence évidente donne : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) = [f(1)]^n$.

Pour la seconde assertion, on utilise le fait que : $f(0) = f(n-n) = f(n) \times f(-n)$. Puisque $f(n) \neq 0$ selon la question précédente, on peut conclure.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) = [f(1)]^n$ et $f(-n) = \dfrac{1}{f(n)}$

c) Etablir que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{x \ln(f(1))}$.

Soit $x = p/q$ un rationnel quelconque (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$). On a :

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f(p) = f(1)^p$$

Par suite : $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = f(1)^{p/q}$, càd : $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \mathrm{e}^{\frac{p}{q}\ln(f(1))}$.

En d'autres termes :

$$\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) = \mathrm{e}^{x \ln(f(1))}$$

On "transforme $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$" en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la propriété de continuité séquentielle.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{x \ln(f(1))}$.

Exercice 9. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f admet une limite finie en 0, et que pour tout réel x on a : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Prouver que f est constante.

Par hypothèse, f admet une limite finie en 0. Notons : $\ell = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Pour tout réel x : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Par récurrence, pour tout réel x et pour tout entier naturel n : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

Soit x un réel quelconque. On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2^n} = 0$. D'après la propriété de limite séquentielle : $\lim\limits_{x \to 0} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \ell$.

Puisque par ailleurs la suite de terme général $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ est constante égale à $f(x)$, on a : $f(x) = \ell$.

Le raisonnement précédent étant valide pour un réel x arbitraire, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ell$.

Conclusion. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

La fonction f n'est autre que la fonction indicatrice des rationnels (on pourrait la noter $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$).

Montrer que f n'admet de limite en aucun réel.

On utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et la propriété de limite séquentielle pour conclure que f n'admet de limite en aucun irrationnel.

On utilise la densité de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et la propriété de limite séquentielle pour conclure que f n'admet de limite en aucun rationnel.

Exercice 11. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si la fonction f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f^2(x) = f(x)$$

alors f est identiquement nulle ou bien f est constante égale à 1.

D'après l'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = 1$.

Si f n'est pas constante, alors le TVI assure qu'elle prendra au moins une fois la valeur $1/2$: contradiction.

Il s'ensuit que f est constante égale à 0 ou 1.

Conclusion. La fonction f est identiquement nulle, ou constante égale à 1.

Exercice 12. — Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Même argument que dans l'exercice précédent.

Exercice 13. — Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ une fonction continue. On suppose que f est k-lipschitzienne * avec $k \in \,]\,0;1\,[$. Montrer que f admet un unique point fixe.

On introduit la fonction g en posant : $\forall\, x \in\; [0,1],\;\; g(x) = f(x) - x$.

Alors : $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$ (puisque f est à valeurs dans $[0,1]$ par hypothèse).

Et : $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ (puisque f est à valeurs dans $[0,1]$ de nouveau).

De plus, g est continue sur $[0,1]$.

Le TVI permet d'affirmer qu'il existe un réel $c \in\; [0,1]$ tel que $g(c) = 0$, càd tel que : $f(c) = c$.

La fonction f admet donc un point fixe c dans $[0,1]$. Montrons son unicité : on suppose qu'il existe un réel $c' \in\; [0,1]$ tel que $f(c') = c'$.

Alors : $|f(c') - f(c)| \leqslant k\,|c' - c|$ (avec $k \in]0,1[$, par hypothèse).

D'où, c et c' étant points fixes de f : $|c' - c| \leqslant k\,|c' - c|$ (avec $k \in]0,1[$, par hypothèse).

Si $c' \neq c$, cette inégalité implique : $|c' - c| < |c' - c|$. Absurde !

Conclusion. La fonction f admet un unique point fixe dans l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 14. — Soient p et q deux réels strictement positifs, et $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0;1]$ tel que : $pf(0) + qf(1) = (p+q)\,f(x_0)$.

On introduit la fonction g en posant : $\forall\, x \in\; [0,1],\;\; g(x) = (p+q)f(x) - pf(0) - qf(1)$.

Alors : $g(0) = q(f(0) - f(1))$ et $g(1) = p(f(1) - f(0))$.
Ainsi, g est continue sur $[0,1]$, et $g(0)g(1) \leqslant 0$.

Le TVI permet donc d'affirmer qu'il existe un réel $x_0 \in\; [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$, càd tel que : $pf(0) + qf(1) = (p+q)\,f(x_0)$.

---

*. C'est-à-dire : $\forall\; (x,y) \in [0;1] \times [0;1]\,,\; |f(x) - f(y)| \leqslant k \times |x - y|$.

Exercice 15. — Soient f et g deux fonctions continues définies sur $[a;b]$ (avec $a,\, b \in \mathbb{R}$). On suppose que : $\forall\, x \in [a;b]\,,\ f\,(x) < g\,(x)$.
Montrer qu'il existe un réel c strictement positif tel que : $\forall\, x \in\ \mathbb{R},\ f\,(x) + c < g\,(x)$.

La fonction $h = g - f$ est continue et strictement positive sur le segment $[a,b]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle admet en particulier un minimum m (qui est strictement positif) sur $[a,b]$.

Donc : $\forall\, x \in\ [a,b], g(x) - f(x) \geqslant m$.

En posant judicieusement $c = m/2$, on a :

$$c > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in\ [a,b], g(x) - f(x) > c$$

Conclusion. $\exists\, c > 0,\ \forall\, x \in\ [a,b], f(x) + c < g(x)$

Complément : ce résultat reste t-il vrai si l'on remplace $[a;b]$ par $[0;+\infty\,[$?

Non, puisque le théorème des bornes atteintes s'applique sur un segment et pas sur $\mathbb{R}_+$.

Plus explicitement, la fonction $g : x \in\ \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et : $\forall\, x \in\ \mathbb{R}_+,\ g(x) > 0$.

Mais il n'existe aucun réel $c > 0$ tel que : $\forall\, x \in\ \mathbb{R}_+,\ g(x) > c\ldots$

Exercice 16. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall\ (x,y) \in\ \mathbb{R}^2,\ f\,(x+y) = f\,(x) + f\,(y)$$

1) Calculer $f\,(0)$.

2) Montrer que pour tout réel x on a : $f\,(-x) = -f\,(x)$.

3) Justifier que pour tout $n \in\ \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in\ \mathbb{R}$ on a : $f\,(nx) = nf\,(x)$.

4) Montrer que pour tout $r \in\ \mathbb{Q}$ on a : $f\,(r) = rf\,(1)$.

5) Conclure que pour tout réel x on a : $f\,(x) = xf\,(1)$.

   A voir en classe.

Exercice 17. — Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

En notant T la période de f, il suffit de prouver que $f(\mathbb{R}) = f[0,T]$, puis d'appliquer le théorème des bornes atteintes.

EXERCICE 18. — Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement continue et bornée. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Il est immédiat que $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour $f \circ g$, on exploite le fait que l'image de $\mathbb{R}$ par g est contenue dans un segment (g étant bornée sur $\mathbb{R}$), puis on applique le théorème des bornes atteintes à la fonction continue f.

SUITES RÉCURRENTES (“$u_{n+1} = f(u_n)$”)

EXERCICE 19. — Etudier la suite (en particulier, on déterminera l'éventuelle limite) u définie en posant :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$$

On peut commencer par observer que la suite u est **bien définie**, puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ (par une récurrence immédiate).

➤ Pour tout réel x, on a : $f(f(x)) - x = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+x}} - x = \dfrac{2x+2}{x+3} - x = \dfrac{-x^2-x+2}{x+3} = -\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+3}$.

On en déduit que sur $[0,1]$: $[f(f(x)) - x \geqslant 0] \Longleftrightarrow [x \leqslant 1]$ $\quad$ ($\spadesuit$).

➤ On peut également noter que la fonction $x \longmapsto \dfrac{2}{1+u_n}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.

➤ Si $u_0 \in [0,1]$, alors pour tout entier naturel n, $u_{2n} \in [0,1]$ (récurrence).

En outre : $u_2 = f(f(u_0)) \geqslant u_0$ (d'après ($\spadesuit$)). On en déduit que (u_{2n}) est croissante, et (u_{2n+1}) est décroissante.

Il reste à observer que (u_{2n}) est majorée par 1, et (u_{2n+1}) est minorée par 1 pour conclure que ces deux suites convergent, nécessairement vers 1 (qui est l'unique solution de l'équation $f(f(x)) = x$ dans $[0,1]$).

Puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une limite commune (qui est 1), on peut affirmer que (u_n) converge vers 1.

➤ Si $u_0 > 1$, alors le raisonnement précédent reste valide, en permutant les rôles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}), ce qui ne modifie pas la conclusion : (u_n) converge vers 1.

Conclusion. Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}_+$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

EXERCICE 20. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \geqslant -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Réponse non détaillée : la suite (u_n) est monotone (croissante si $u_0 \leqslant 2$, décroissante sinon) puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{2+x}$ est croissante sur $[-2+\infty[$.

Pour toute valeur de u_0, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

EXERCICE 21. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.

Réponse non détaillée : Si $u_0 = 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$;

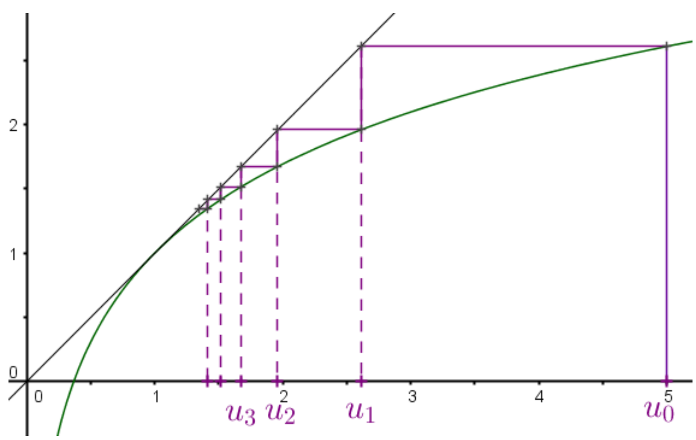
Si $u_0 > 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;

Si $u_0 < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;

EXERCICE 22. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Pour toute valeur de u_0, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 23. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.



➤ On peut commencer par observer que la suite u est **bien définie**, puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$ (par une récurrence immédiate).

➤ On peut également noter que la fonction $x \longmapsto 1 + \ln(x)$ est croissante sur $[1, +\infty[$. La suite u est donc **monotone**.

➤ Enfin, il est bien connu† que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x - 1$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 + \ln(x) \leqslant x$, d'où en particulier : $1 + \ln(u_0) \leqslant u_0$, c'est-à-dire que $u_1 \leqslant u_0$. On en déduit que u est **décroissante**.

†. C'est un résultat de référence, traduisant le fait que la courbe représentative de la fonction ln est située en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1, qui a précisément pour équation $y = x - 1$.

➤ Puisque u est décroissante et minorée (par 1), elle converge (théorème de la limite monotone). Reste à résoudre l'équation $f(x) = x$, qui n'a qu'une seule solution ($x = 1$) puisque la courbe représentative de la fonction ln et sa tangente au point d'abscisse 1 ont un unique point d'intersection.

Conclusion. u converge vers 1.