# Colle 17 – Questions de cours

Question de cours n$^0$1 — **Propriété**. Soient $A$ et $B$ deux parties d'un même ensemble fini $E$.
Alors : $\text{Card}(E\backslash A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$, et $\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,(A) + \text{Card}\,(B) - \text{Card}(A \cap B)$

Observons que : $E = (E\backslash A) \cup A$. Cette union étant disjointe, on a : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E\backslash A) + \text{Card}(A)$. On en déduit la première égalité.

Dans le même registre : $A \cup B = (A\backslash B) \cup B$.
Cette union étant disjointe, on a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\,(A\backslash B) + \text{Card}(B) \qquad (\spadesuit)$.
Par ailleurs : $A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$.
Cette nouvelle union étant disjointe, on a : $\text{Card}(A) = \text{Card}\,(A\backslash B) + \text{Card}(A \cap B)$.
Par suite : $\text{Card}\,(A\backslash B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) \qquad (\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ : $\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,(A) + \text{Card}\,(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

---

Question de cours n$^0$2 — **Propriété**. Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis, et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose **Card** $(E) =$ **Card** $(F)$. LASSE (les assertions suivantes sont équivalentes) :
1/ $f$ est bijective 2/ $f$ est injective 3/ $f$ est surjective

Montrons 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 1) ; la boucle sera ainsi bouclée !

Supposons $E$ et $F$ finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

• 1) $\Longrightarrow$ 2) : trivial.

• 2) $\Longrightarrow$ 3) : supposons $f$ injective. On peut commencer par noter que $f(E)$ est une partie de $F$. En outre, puisque $f$ est injective, $f(E)$ est un ensemble fini, de cardinal égal à celui de $E$ (cours). Or $\text{Card}\,(E) = \text{Card}\,(F)$ (par hypothèse). Donc l'ensemble $f(E)$ est une partie de $F$, de cardinal égal à celui de $F$ ; il s'ensuit que $f(E) = F$ (cours). Donc $f$ est surjective, ce qui prouve l'implication.

• 3) $\Longrightarrow$ 1) : supposons à présent $f$ surjective. Alors $f(E) = F$, donc $\text{Card}\,(f(E)) = \text{Card}\,(F)$, et par conséquent $\text{Card}\,(f(E)) = \text{Card}\,(E)$ (puisque $\text{Card}\,(E) = \text{Card}\,(F)$ par hypothèse). On en déduit (cours) que $f$ est injective, et donc bijective. Ce qui prouve l'implication, et achève la preuve de la propriété.

---

Question de cours n$^0$3 — **Théorème**. Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, alors $(S_E, \circ)$ est un groupe fini de cardinal $n!$.

Un élément de $S_E$ est une bijection de $E$ dans $E$. En vertu de la question de cours 2, il existe autant de bijections de $E$ dans $E$ que d'injections de $E$ dans $E$ (puisque $E$ est fini). Or le nombre d'injections de $E$ dans $E$ est : $\dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$.*

Par suite, il existe $n!$ bijections de $E$ dans $E$, ce qui assure déjà que : $\boxed{\text{Card}\,(S_E) = n!}$

En outre, la loi de composition ("$o$") est une *loi de composition interne* dans $S_E$ (la composée de deux bijections est une bijection). Cette lci est *associative* car plus généralement la composition des applications l'est. Elle possède un *élément neutre* qui est l'identité de $E$. Enfin, tout élément $f$ de $S_E$ est *inversible* (pour la loi "$o$") dans $S_E$, car si $f$ est bijective de $E$ dans $E$, sa réciproque $f^{-1}$ est elle aussi une bijection de $E$ dans $E$.

Ce qui prouve que $(S_E, \circ)$ est un groupe, de cardinal $n!$.

---

Question de cours n$^0$4 — **Propriété**. Pour tout entier $n \geqslant 3$, le groupe $(S_n, \circ)$ est non-abélien.

Soit $n$ un entier $\geqslant 3$. Les transpositions $(12)$ et $(13)$ appartiennent à $S_n$, puisque $n \geqslant 3$...

Il reste à observer que $(12)(13) = (132)$ tandis que $(13)(12) = (123)$ pour conclure.

**Conclusion**. Pour tout entier $n \geqslant 3$, le groupe $(S_n, \circ)$ est non-abélien.

*Remarque :* de fait, le groupe $(S_n, \circ)$ est abélien SSI $n < 3$, d'après ce qui précède, et car les groupes $S_1$ (groupe trivial) et $S_2 = \{\text{id}, (12)\}$ sont commutatifs.

*. Plus généralement, le nombre d'applications injectives de $E$ dans $F$ est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $\text{Card}(E) = p \leqslant n = \text{Card}(F)$.

Question de cours n$^0$5 — **Propriété**. Deux permutations à supports disjoints commutent.

➤ On commence par prouver que si un entier $k$ appartient au support d'une permutation $\sigma$, alors $\sigma(k)$ appartient également au support de $\sigma$.

Considérons donc un entier $k \in \operatorname{supp}(\sigma)$. Par l'absurde, supposons que $\sigma(k)$ n'appartienne pas au support de $\sigma$. Alors :

$$\sigma(\sigma(k)) = \sigma(k) \text{ d'où } (\sigma \text{ étant injective}) : \sigma(k) = k$$

Ce qui contredit l'hypothèse "$k \in \operatorname{supp}(\sigma)$". Donc $\sigma(k) \in \operatorname{supp}(\sigma)$.

En résumé : $\forall \sigma \in S_n, \forall k \in \mathbb{N}_n, \ [k \in \operatorname{supp}(\sigma)] \Longrightarrow [\sigma(k) \in \operatorname{supp}(\sigma)] \qquad (\spadesuit)$

➤ La preuve du lemme est à présent une formalité. Soient $\varphi$ et $\rho$ deux éléments de $S_n$, à supports disjoints.

Soit $k$ un entier de $\mathbb{N}_n$. Puisque $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(\rho) = \emptyset \quad (\clubsuit)$, on peut distinguer 3 cas :

➢ *Premier cas :* $k \in \operatorname{supp}(\varphi)$. Alors on a : $k \notin \operatorname{supp}(\rho)$ (selon $(\clubsuit)$), et $\varphi(k) \in \operatorname{supp}(\varphi)$ (selon $(\spadesuit)$), donc $\varphi(k) \notin \operatorname{supp}(\rho)$ (re-$(\clubsuit)$).

On en déduit que : $\quad \varphi(\rho(k)) = \varphi(k)$ et $\rho(\varphi(k)) = \varphi(k)$. Donc : $\varphi(\rho(k)) = \rho(\varphi(k))$.

➢ *Second cas :* $k \in \operatorname{supp}(\rho)$. D'après le premier cas : $\varphi(\rho(k)) = \rho(\varphi(k))$.

➢ *Troisième cas :* $k \notin (\operatorname{supp}(\rho) \cup \operatorname{supp}(\varphi))$. Alors : $\varphi(\rho(k)) = \rho(\varphi(k)) = k$.

➢ *Conclusion :* $\forall k \in \mathbb{N}_n, \ \varphi(\rho(k)) = \rho(\varphi(k)) = k$. Ainsi : $\varphi \circ \rho = \rho \circ \varphi$.

**Conclusion**. Deux permutations à supports disjoints commutent.

# Banque d'exercices

**Exercice 1.** — Soit $E$ fini de cardinal $n$. Etablir que $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

**Exercice 2.** — Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels, avec $p \leqslant n$. Combien existe t-il d'applications $f : \mathbb{N}_p \longrightarrow \mathbb{N}_n$ strictement croissantes ?

**Exercice 3.** — Dans $S_5$, combien existe t-il de transpositions ?

**Exercice 4.** — Dans $S_5$, combien existe t-il de 3-cycles ?

**Exercice 5.** — Dans $S_5$, combien existe t-il de produits de 2 transpositions à supports disjoints ?

**Exercice 6.** — Soit $n$ un entier $\geqslant 2$. On considère :

$$H = \{\sigma \in S_n,\ \sigma(1) = 1\}$$

$H$ est donc l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$ laissant 1 invariant.
Montrer que $H$ est un sous-groupe de $S_n$. Quel est son cardinal ?

**Exercice 7.** — Soit $n$ un entier $\geqslant 2$. Combien existe t-il d'éléments de $S_n$ qui échangent 1 et 2 ?

**Exercice 8.** — Dans $S_8$ on considère le 6-cycle $c_1 = (135246)$ et le 3-cycle $c_2 = (154)$.
Existe t-il un élément $\sigma$ de $S_8$ tel que : $c_1 = \sigma^{-1} c_2 \sigma$ ?

# Banque d'exercices - Corrigés

**Exercice 1.** — Soit $E$ fini de cardinal $n$. Etablir que $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Pour tout entier $k \in [\![ 0, n ]\!]$, notons : $\mathscr{P}_k(E) = \{A \subset E,\ \text{Card}(A) = k\}$.

On a : $\mathscr{P}(E) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)$.

Puisque le cardinal d'une partie de $E$ est unique, l'union ci-dessus est disjointe et :

$$\text{Card}\left(\mathscr{P}(E)\right) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\left(\mathscr{P}_k(E)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

**Exercice 2.** — Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels, avec $p \leqslant n$. Combien existe t-il d'applications $f : \mathbb{N}_p \longrightarrow \mathbb{N}_n$ strictement croissantes ?

Une application strictement croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est entièrement déterminée par son image, càd par une partie à $p$ éléments de $\mathbb{N}_n$.

**Conclusion.** Il existe $\displaystyle\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$.

**Exercice 3.** — Dans $S_5$, combien existe t-il de transpositions ?

Dans $S_5$, une transposition est uniquement déterminée par son support (les transpositions $(ij)$ et $(ji)$ étant égales), qui est une combinaison de 2 éléments parmi 5.

**Conclusion.** Il existe $\displaystyle\binom{5}{2} = 10$ transpositions dans $S_5$.

**Exercice 4.** — Dans $S_5$, combien existe t-il de 3-cycles ?

Dans $S_5$, un 3-cycle est uniquement déterminé par son support, disons $\{a_1, a_2, a_3\}$ ; et par l'image de $a_1$ (deux choix possibles).

**Conclusion.** Il existe $2 \times \displaystyle\binom{5}{3} = 20$ 3-cycles dans $S_5$.

**Exercice 5.** — Dans $S_5$, combien existe t-il de produits de 2 transpositions à supports disjoints ?

Dans $S_5$, une permutation qui est le produit de 2 transpositions à supports disjoints est uniquement déterminée par son support, disons $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ; et par l'image de $a_1$ (trois choix possibles).

**Conclusion.** Il existe $3 \times \displaystyle\binom{5}{4} = 15$ produits de 2 transpositions à supports disjoints dans $S_5$.

**Exercice 6.** — Soit $n$ un entier $\geqslant 2$. On considère :

$$H = \{\sigma \in S_n,\ \sigma(1) = 1\}$$

$H$ est donc l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$ laissant 1 invariant.

Montrer que $H$ est un sous-groupe de $S_n$. Quel est son cardinal ?

$H$ est inclus dans $S_n$ par définition (SG1) ; $\text{id}_{\mathbb{N}_n}$ appartient à $H$ ; on vérifie aisément que si $\sigma$ et $\rho$ sont deux éléments de $H$, alors $\sigma\rho$ et $\sigma^{-1}$ appartiennent à $H$ (SG3 et SG4).

On en déduit que $H$ est un sous-groupe de $S_n$.

Par ailleurs, $H$ est équipotent à l'ensemble des permutations de $[\![ 2, n ]\!]$, qui est de cardinal $(n-1)!$ selon le cours.

**Conclusion.** $H$ est un sous-groupe de $S_n$, et $\text{Card}(H) = (n-1)!$.

**Exercice 7.** — Soit $n$ un entier $\geqslant 2$. Combien existe t-il d'éléments de $S_n$ qui échangent 1 et 2 ?

Autant que de permutations de $[\![ 3, n ]\!]$.

**Conclusion.** Il existe $(n-2)!$ éléments de $S_n$ qui échangent 1 et 2.

**Exercice 8.** — Dans $S_8$ on considère le 6-cycle $c_1 = (135246)$ et le 3-cycle $c_2 = (154)$.

Existe t-il un élément $\sigma$ de $S_8$ tel que : $c_1 = \sigma^{-1} c_2 \sigma$ ?

Supposons qu'il existe une permutation $\sigma$ telle que : $c_1 = \sigma^{-1} c_2 \sigma$.

Alors on aurait : $\varepsilon(c_1) = \varepsilon(\sigma^{-1} c_2 \sigma)$.

Or, selon les propriétés de la signature :

$$\varepsilon(\sigma^{-1} c_2 \sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(c_2)\varepsilon(\sigma) = \underbrace{\varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma)}_{=1}\varepsilon(c_2) = \varepsilon(c_2)$$

D'où : $\varepsilon(c_1) = \varepsilon(c_2)$. Or, selon le cours : $\varepsilon(c_1) = (-1)^{6-1} = -1$ et $\varepsilon(c_2) = (-1)^{3-1} = 1$. Contradiction.

**Conclusion.** Il n'existe aucune permutation $\sigma \in S_8$ telle que : $c_1 = \sigma^{-1} c_2 \sigma$.