MPSI – Colle 17 (24 au 28 février 2025) : Ensembles finis & Groupe symétrique

Chapitre 16 : Ensembles finis, groupes symétriques

1 – Ensembles finis

Notation. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{N}_n = [\![1, n]\!]$. Convention : $\mathbb{N}_0 = \emptyset$.

Définition. Un ensemble E est **fini** s'il existe un entier naturel n tel que E et $\mathbb{N}_n$ soient équipotents.

Lemme (fondamental). Soient n et m deux entiers naturels.

1) S'il existe une injection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$, alors $n \leqslant m$.
2) S'il existe une surjection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$, alors $n \geqslant m$.
3) S'il existe une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$, alors $n = m$.

Définition. Soit E un ensemble fini. On appelle **cardinal de** E l'unique entier naturel n tel que E et $\mathbb{N}_n$ sont équipotents.

Notation. On note $\text{card}\,(E)$ ou $\sharp E$ le cardinal de E.

Lemme. Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in E$. Alors $E \backslash \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $n-1$.

Propriété. Soient E un ensemble fini, et $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors A est un ensemble fini, et $\text{card}\,(A) \leqslant \text{card}\,(E)$ (avec égalité SSI $A = E$).

2 – Opérations sur les ensembles finis

Propriété. Soient A et B deux parties disjointes d'un même ensemble fini E. Alors $A \cup B$ est fini, et $\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B)$

Corollaire. Soit A une partie d'un ensemble fini E. L'ensemble $E \backslash A$ est fini, et : $\text{card}\,(E \backslash A) = \text{card}\,(E) - \text{card}\,(A)$

Corollaire. Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. Alors $\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A \cap B)$

Propriété. Soient E et F deux ensembles finis, et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors $f(E)$ est un ensemble fini, et $\text{card}\,(f(E)) \leqslant \min(\text{card}\,(E), \text{card}\,(F))$. En outre, f est injective SSI $\text{card}\,(f(E)) = \text{card}\,(E)$.

Propriété. Soient E et F deux ensembles finis, et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose $\textbf{card}\,(E) = \textbf{card}\,(F)$. LASSE :

1) f est bijective 2) f est injective 3) f est surjective

3 – Injections et permutations

Lemme. Soient E et F deux ensembles finis, de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d'injections de E dans F est : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \in [\![0, n]\!]$, et 0 si $p > n$.

Définition de permutation d'un ensemble. On note S_E l'ensemble des permutations d'un ensemble E.

Théorème. Si E est fini de cardinal n, alors $(S_E, \circ)$ est un groupe fini de cardinal $n!$

4 – Groupe symétrique

Notation : S_n est l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$. S_n est un groupe, de cardinal $n!$

Convention. *On note* ***multiplicativement*** *la lci de S_n. Explicitement, si σ et τ désignent deux permutations, on parlera du* <u>*produit*</u> *$\sigma\tau$ pour désigner la* <u>*composée*</u> *$\sigma \circ \tau$.*

5 – Transpositions et p-cycles

Définition de transposition. Une transposition est une involution, donc une permutation. Si i, j et k sont trois entiers distincts dans $\mathbb{N}_n$ (avec $n \geqslant 3$), alors : $(ij)(jk) \neq (jk)(ij)$. Corollaire : S_n est non abélien dès que $n \geqslant 3$.

Définition de p-cycle. Un p-cycle est une permutation, et : $(a_1 a_2 \cdots a_p)^{-1} = (a_p a_{p-1} \cdots a_1)$.

Propriété. $(a_1 a_2 \cdots a_p) = \displaystyle\prod_{i=1}^{p-1} (a_i a_{i+1})$

Théorème. Les transpositions engendrent le groupe symétrique.

Lemme. Deux permutations à supports disjoints commutent.

Théorème. Toute permutation peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints.

6 – Signature et groupe alterné

Définition d'inversion. Notation : $\mathrm{I}(\sigma)$ est le nombre de couples (i, j) avec $i < j$ sur lesquels σ réalise une inversion. Définition : pour $\sigma \in S_n$, on définit la **signature de** σ comme le réel $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{I}(\sigma)}$.

Conséquence : la signature de σ vaut 1 ou (-1).

L'application ε est donc définie sur S_n, et à valeurs dans $\mathbb{U}_2 = \{\pm 1\}$.

Théorème. $\forall\, (\sigma, \tau) \in S_n^2,\ \varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau)$

Reformulation. $\varepsilon : (S_n, \circ) \longrightarrow (\mathbb{U}_2, \times)$ est un morphisme de groupes.

Propriétés. La signature d'une transposition vaut -1, celle d'un p-cycle vaut $(-1)^{p-1}$. Et : $\forall\, \sigma \in S_n$, on a : $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Questions de cours

- **Propriété**. Soient A et B deux parties d'un même ensemble fini E. Alors $\mathrm{card}(E \backslash A) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A)$, et $\mathrm{card}\,(A \cup B) = \mathrm{card}\,(A) + \mathrm{card}\,(B) - \mathrm{card}\,(A \cap B)$

- **Propriété**. Soient E et F deux ensembles finis, et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose **card** $(E) =$ **card** (F). LASSE :
  1) f est bijective 2) f est injective 3) f est surjective

- **Théorème**. Si E est fini de cardinal n, alors $(S_E, \circ)$ est un groupe fini de cardinal $n!$

- **Propriété**. Pour tout entier $n \geqslant 3$, le groupe $(S_n, \circ)$ est non-abélien.

- **Propriété**. Deux permutations à supports disjoints commutent.