Colle 18 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Théorème de Rolle**. Si est dérivable sur $]a;b[$, continue sur $[a,b]$, et $f(a)=f(b)$, alors : $\exists\, c \in \,]\,a;b\,[\;,\; f'(c)=0$.

La fonction f étant continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$ (théorème des bornes atteintes). Notons m son minimum et M son maximum.

➤ Si $m=M$: alors f est constante sur $[a,b]$. Par suite : $\forall\, c\in\,]a,b[,\; f'(c)=0$.

➤ Si $m<M$: distinguons alors deux sous-cas : soit $f(a)=m$, soit $f(a)\neq m$.

➢ Si $f(a)=m$: alors on a aussi $f(b)=m$ (par hypothèse), donc le maximum M de f est atteint en un réel c de $]a,b[$ (puisque $m\neq M$), et on a donc $f'(c)=0$.

➢ Si $f(a)\neq m$: alors on a aussi $f(b)\neq m$ (par hypothèse), donc le minimum m de f est atteint en un réel c de $]a,b[$, et on a donc $f'(c)=0$.

Conclusion. Dans tous les cas : $\exists\, c \in \,]\,a;b\,[\;,\; f'(c)=0$.

Question de cours 2. — **Théorème des accroissements finis.** Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est dérivable sur $]a,b[$, continue sur $[a;b]$, alors : $\exists\, c \in \,]\,a;b\,[\;,\; f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

On définit une fonction g sur $[a,b]$ en posant :

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$$

D'après les théorèmes généraux sur la continuité et la dérivabilité respectivement, la fonction g [*] est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

En outre $g(a)=f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(a-a)$ d'où $g(a)=f(a)$; et $g(b)=f(b)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(b-a)$ d'où : $g(b)=f(a)$.

La fonction g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, dont l'application donne : $\exists\, c\in]a,b[,\; g'(c)=0$.

Or : $\forall\, x\in]a,b[,\; g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

On en déduit : $\exists\, c\in]a,b[,\; f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$. D'où finalement : $\boxed{\exists\, c\in]a,b[,\; f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$.

Question de cours 3. — **Propriété.** Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si f' est bornée sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

Supposons f' bornée sur I. Il existe un réel M tel que : $|f'|\leqslant M$ sur I.

Soient x et y deux réels distincts dans I. La fonction f étant dérivable sur I, elle est continue sur le segment $[x,y]$ (ou sur le segment $[y,x]$), et dérivable sur l'intervalle $]\,x,y\,[$ (ou sur l'intervalle $]\,y,x\,[$). On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f entre x et y :

il existe un réel c compris entre x et y tel que : $f(y)-f(x)=f'(c)\times(y-x)$

$\Longrightarrow$ il existe un réel c compris entre x et y tel que : $|f(y)-f(x)|=|f'(c)|\times|y-x|$

$\Longrightarrow$ il existe un réel c compris entre x et y tel que : $|f(y)-f(x)|\leqslant M\times|y-x|$

L'inégalité obtenue ci-dessus restant évidemment valide dans le cas particulier où $x=y$, on peut conclure que :

$$\forall\,(x,y)\in I^2,\; |f(y)-f(x)|\leqslant M\,|y-x|$$

Ce qui signifie que f est M-lipschitzienne sur I.

➤ **Conclusion**. $[f'$ bornée sur $I] \Longrightarrow [f$ lipschitzienne sur $I]$

---

[*] Informellement, cette fonction g est destinée à "redresser la situation", en ôtant à f ce qui l'empêche de prendre les mêmes valeurs en a et en b ; la motivation étant de se ramener à la situation du théorème de Rolle.

QUESTION DE COURS 4. — **Propriété.** Soit $f \in \mathbb{R}^I$, une fonction dérivable sur I :

$$f \text{ est croissante sur } I \Longrightarrow f' \text{ est positive sur } I$$

Supposons f croissante sur I.
Soit a un réel de l'intervalle I. Puisque f est dérivable sur I, elle l'est en particulier en a, et : $f'(a) = f'_d(a)$. En d'autres termes : $f'(a) = \lim\limits_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
Or, pour tout réel $h > 0$: $f(a+h) - f(a) \geqslant 0$ (puisque f est supposée croissante).
Donc : $\forall\, h > 0,\ \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0$.

Par stabilité des inégalités larges par passage à la limite, on en déduit que : $\lim\limits_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0$, d'où $f'_d(a) \geqslant 0$ d'où $f'(a) \geqslant 0$.

Le réel a de I étant arbitraire dans le raisonnement ci-dessus, on peut conclure que : $\forall\, a \in I,\ f'(a) \geqslant 0$. En d'autres termes, f' est positive sur I. On a donc : $\boxed{[f \text{ croissante sur } I] \Longrightarrow [f' \text{ positive sur } I]}$

QUESTION DE COURS 5. — **Propriété.** Soit $f \in \mathbb{R}^I$, une fonction dérivable sur I :

$$f' \text{ est positive sur } I \Longrightarrow f \text{ est croissante sur } I$$

➤ Réciproquement, supposons f' positive sur I.
Soient a et b deux réels dans I, avec $a < b$. Puisque f est dérivable sur I, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis † sur $[a;b]$ et affirmer que :

$$\exists\, c \in\,]\,a;b\,[\,,\quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{d'où :} \quad \exists\, c \in\,]\,a;b\,[\,,\quad f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$$

Comme $f'(c)$ est positif par hypothèse, et que par ailleurs $b \geqslant a$ toujours par hypothèse, on en déduit que $f(b) - f(a) \geqslant 0$.
En résumé, on a établi l'implication : $[b > a] \Longrightarrow [f(b) \geqslant f(a)]$. Donc f est croissante sur I.
On a donc : $\boxed{[f' \text{ positive sur } I] \Longrightarrow [f \text{ croissante sur } I]}$

†. Puisqu'en particulier f est dérivable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Etablir que la fonction cube est lipschitzienne sur $[0, A]$ pour tout réel $A > 0$.

Exercice 2. — Etablir que la fonction cube n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3. — Etablir que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan(x) \leqslant x$.
Questions de révision concernant arctan : *ensemble de définition ? Parité ? Dérivabilité et dérivée ? Sens de variation ? Limites en* $\pm\infty$ *? DL à l'ordre 1 en* 0 *? Tangente à l'origine ?* $\arctan(1)$ *?* $\tan \circ \arctan = \ldots$ *?* $\arctan \circ \tan = \ldots$ *?*

Exercice 4. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas périodique.

Exercice 5. — Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que :

1/ $\exists\, \ell \in [0, 1],\ f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f)

2/ (u_n) définie par : $u_0 \in [0, 1]$, $u_0 \neq \ell$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

3/ $\forall\, x \in]0, 1[,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$

Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{3}\,|u_n - \ell|$. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 6. — Soient a et b deux réels. Montrer que le polynôme $X^5 + aX + b$ possède au plus 3 racines réelles.

Banque d'exercices - Corrigés

Remarques à l'attention des colleurs.

- Dans l'exercice 3, il n'est pas nécessaire de poser toutes les questions de révision concernant arctan ; deux ou trois parmi celles indiquées vous suffiront sans doute à tester la solidité des connaissances.
- Dans l'exercice 5, le détail de la récurrence permettant de conclure est exigible, mais pas nécessairement exigé (c'est une récurrence *a priori* sans aucune difficulté).

Exercice 1. — Etablir que la fonction cube est lipschitzienne sur $[0, A]$ pour tout réel $A > 0$.

Soit A un réel strictement positif. Notons f la fonction cube ; f est dérivable sur $[0, A]$ et :

$$\forall x \in [0, A], \ |f'(x)| \leqslant 3A^2$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [0, A]^2, \ |f(x) - f(y)| \leqslant 3A^2 |x - y|$$

Conclusion. La fonction cube est $3A^2$-lipschitzienne sur $[0, A]$.

Exercice 2. — Etablir que la fonction cube n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Notons f la fonction cube sur $\mathbb{R}_+$. Par l'absurde, supposons que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$:

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \ |f(x) - f(y)| \leqslant K |x - y| \qquad (\spadesuit)$$

Notons que pour tout entier naturel n, on a : $|f(n+1) - f(n)| = 3n^2 + 3n + 1 \qquad (\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \ |f(n+1) - f(n)| \leqslant K$. Et d'après $(\clubsuit)$: $\lim\limits_{n \to +\infty} |f(n+1) - f(n)| = +\infty$. Contradiction !

Conclusion. la fonction cube n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3. — Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\arctan(x) \leqslant x$.

Pour $x = 0$, l'inégalité est triviale.

Soit x un réel strictement positif.

D'après le cours, la fonction arctan est continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$. On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$$\exists c \in]0, x[, \ \frac{1}{1+c^2} = \frac{\arctan(x)}{x} \iff \exists c \in]0, x[, \ (1+c^2)\arctan(x) = x$$

Or : $1 + c^2 \geqslant 1$. On en déduit que : $x \geqslant \arctan(x)$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\arctan(x) \leqslant x$.

Remarque : on peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis, et observer que sur $\mathbb{R}$ (donc a fortiori sur $\mathbb{R}_+$), $|\arctan'|$ est majorée par 1 ; arctan est donc 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}_+$).

Plus tard dans l'année, on pourra encore justifier cette inégalité en observant que arctan est concave sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas périodique.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Prouvons la contraposée : f périodique $\Longrightarrow$ f' s'annule sur $\mathbb{R}$

Supposons que f est périodique sur $\mathbb{R}$: $\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x+T) = f(x)$.

En particulier $f(0) = f(T)$. Comme en outre f est continue sur $[0, T]$ et dérivable sur $]0, T[$ (par hypothèse, f est dérivable sur $\mathbb{R}$), le théorème de Rolle permet d'affirmer que :

$$\exists c \in]0, T[, \ f'(c) = 0$$

Donc f' s'annule sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. $[f'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}] \Longrightarrow [f$ n'est pas périodique sur $\mathbb{R}]$

Exercice 5. — Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. On suppose que :

1/ $\exists\, \ell \in [0,1],\ f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f)

2/ (u_n) définie par : $u_0 \in [0,1]$, $u_0 \neq \ell$, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

3/ $\forall\, x \in]0,1[,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$

Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{3}\,|u_n - \ell|$. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

Soit n un entier naturel. Entre u_n et ℓ (ces deux réels appartiennent à $[0,1]$), la fonction f vérifie les hypothèses du TAF (par hypothèse, f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$). Par suite, il existe un réel c entre u_n et ℓ tel que :

$$(f(u_n) - f(\ell)) = f'(c)\,(u_n - \ell) \Longrightarrow |f(u_n) - f(\ell)| = |f'(c)|\,|u_n - \ell| \Longrightarrow |u_{n+1} - \ell| = |f'(c)|\,|u_n - \ell|$$

Comme par hypothèse $|f'| \leqslant 3^{-1}$, on en déduit que : $\Longrightarrow |u_{n+1} - \ell| \leqslant 3^{-1}\,|u_n - \ell|$.

L'entier naturel n étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on a établi que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \Longrightarrow |u_{n+1} - \ell| \leqslant 3^{-1}\,|u_n - \ell|$$

Par une récurrence immédiate : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant 3^{-n}\,|u_0 - \ell|$

Puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 3^{-n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$.

Conclusion. (u_n) converge, et a pour limite ℓ.

Exercice 6. — Soient a et b deux réels. Montrer que le polynôme $X^5 + aX + b$ possède au plus 3 racines réelles.

Soient a et b deux réels. Notons f la fonction associée au polynôme P, définie en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^5 + ax + b$$

Observons que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Par l'absurde, supposons que f possède au moins 4 racines réelles : $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Sur chacun des intervalles $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ et $[x_3, x_4]$, la fonction f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.

Explicitement, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$:

— f est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$;
— f est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$;
— $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$

Par une triple application du théorème de Rolle, il existe trois réels y_1, y_2 et y_3 tels que :

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < x_4 \quad \text{et} \quad f'(y_1) = f'(y_2) = f'(y_3) = 0$$

En réitérant le procédé pour la fonction f', on peut affirmer qu'il existe deux réels z_1 et z_2 tels que :

$$y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < y_3 \quad \text{et} \quad f''(z_1) = f''(z_2) = 0$$

En particulier, f'' s'annule en deux réels distincts ($\spadesuit$).

Or pour tout réel x, on a : $f''(x) = 20x^3$.

Il est donc clair que f'' ne s'annule qu'en zéro ($\clubsuit$).

($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : contradiction.

Conclusion. Le polynôme $X^5 + aX + b$ possède au plus 3 racines réelles.