Exercices 17 — Arithmétique — Corrigé

Divisibilité - Congruences

Exercice 1. — Montrer que l'équation $25x - 60y = 13$ n'admet pas de couple d'entiers solution.

Pour tout couple d'entiers (x, y), l'entier $25x - 60y$ est multiple de 5. Puisque 5 ne divise pas 13, on peut conclure.
Conclusion. L'équation $25x - 60y = 13$ n'admet pas de couple solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 2. — Prouver que l'équation $12x + 15y^2 + 36xy = 3002$ n'admet pas de couple d'entiers relatifs solution.

Pour tout couple d'entiers (x, y), l'entier $12x + 15y^2 + 36xy$ est multiple de 3. Puisque 3 ne divise pas 3002, on peut conclure.
Conclusion. L'équation $12x + 15y^2 + 36xy = 3002$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 3. — Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'équation diophantienne :

$$(E) \qquad 3x^2 + 2y^2 = 30$$

(c'est-à-dire que l'on cherche les couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation (E)).

1) Démontrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs solution de (E), alors $(x, -y)$ est un autre couple solution.

   Vérification immédiate.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que si (x, y) est solution de (E), alors les couples $(-x, y)$ et $(-x, -y)$ sont également solutions.

2) Soient x et y deux entiers naturels tels que $3x^2 + 2y^2 = 30$.

   a) Démontrer que $0 \leqslant x \leqslant 3$.

   L'énoncé impose : $3x^2 \leqslant 30$, d'où $x^2 \leqslant 10$. Puisque x est entier naturel, on peut conclure.
   Conclusion. $0 \leqslant x \leqslant 3$

   b) En examinant les différents cas, déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels solutions de (E).

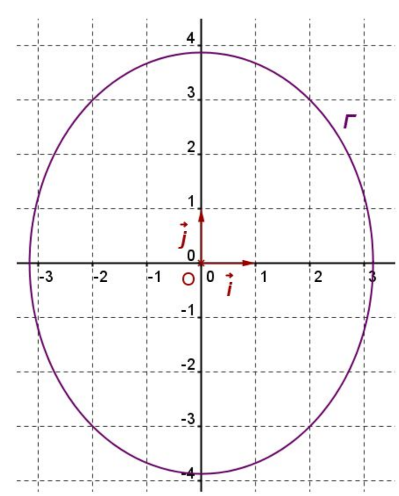
   Si $x = 0$, alors $2y^2 = 30$: impossible.

   Si $x = 1$, alors $2y^2 = 27$: impossible.

   Si $x = 2$, alors $y = 3$: impossible.

   Si $x = 3$, alors $2y^2 = 3$: impossible.

   Conclusion. Il existe un unique couple d'entiers naturels solution : $(2, 3)$.



3) Conclure en donnant la liste des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

   D'après les questions précédentes, l'équation $3x^2 + 2y^2 = 30$ possède exactement quatre couples d'entiers relatifs solutions : $(2, 3)$, $(-2, 3)$, $(2, -3)$ et $(-2, -3)$.

   Conclusion. L'ellipse d'équation cartésienne $3x^2 + 2y^2 = 30$ possède exactement quatre points à coordonnées entières, les points dont les coordonnées sont listées ci-dessus.

Exercice 4. — Déterminer tous les entiers naturels n tels que $(n-1)$ divise $(n+8)$.

Soit n un entier naturel tel que $(n-1)$ divise $(n+8)$. Alors :

$$(n-1)|(n+8)-(n-1) \text{ soit : } (n-1)|9$$

Il s'ensuit que $(n-1) \in \{-9,-3,-1,1,3,9\}$. En étudiant ces différents cas, et en n'oubliant pas que n est positif par hypothèse, on obtient finalement : $n \in \{0,2,4,10\}$.

Réciproquement, on vérifie sans difficulté que tout entier de $\{0,2,4,10\}$ est effectivement solution de l'équation.

Conclusion. Les entiers naturels tels que $(n-1)$ divise $(n+8)$ sont exactement : 0, 2, 4 et 10.

Exercice 5. — Déterminer tous les entiers naturels n tels que $(n-4)$ divise $(3n+24)$.

Soit n un entier naturel tel que $(n-4)$ divise $(3n+24)$. Alors :

$$(n-4)|(3n+24)-3(n-4) \text{ soit : } (n-4)|36$$

Il s'ensuit que $(n-4) \in \{-36,-18,-12,-9,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$. En étudiant ces différents cas, et en n'oubliant pas que n est positif par hypothèse, on obtient finalement : $n \in \{0,1,2,3,5,6,7,8,10,13,16,22,40\}$.

Réciproquement, on vérifie sans difficulté, quoique laborieusement, que tout entier de $\{0,1,2,3,5,6,7,8,10,13,16,22,40\}$ est effectivement solution de l'équation.

Conclusion. Les entiers naturels tels que $(n-4)$ divise $(3n+24)$ sont exactement : 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 16, 22 et 40.

Exercice 6. — Montrer que le produit de deux entiers naturels consécutifs est pair.

Si deux entiers sont consécutifs, alors au moins l'un des deux est pair...

Conclusion. Le produit de deux entiers naturels consécutifs est pair.

Exercice 7. — Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.

Trois entiers naturels consécutifs s'écrivent : n, $n+1$ et $n+2$ avec $n \in \mathbb{N}$. Leur somme est donc : $3n+3=3(n+1)$.
Conclusion. La somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.

Exercice 8. — Montrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.

Si trois entiers sont consécutifs, alors l'un de ces entiers est multiple de 3....

Conclusion. Le produit de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.

Exercice 9. — Montrer que la somme de cinq entiers naturels consécutifs est un multiple de 5.

Cinq entiers naturels consécutifs s'écrivent : n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ et $n+4$ avec $n \in \mathbb{N}$. Leur somme est donc : $5n+10=5(n+2)$.
Conclusion. La somme de cinq entiers naturels consécutifs est un multiple de 5.

Exercice 10. — Montrer que : $11 \,\big|\, \left(2^{123}+3^{121}\right)$

Il s'agit de prouver que : $\left(2^{123}+3^{121}\right) \equiv 0\ [11]$.

Or : $2^5 \equiv -1\ [11]$. Donc : $2^{10} \equiv 1\ [11]$. Donc : $2^{120} \equiv 1\ [11]$. Donc : $2^{123} \equiv 8\ [11]$.

Par ailleurs : $3^5 \equiv 1\ [11]$. Donc : $3^{10} \equiv 1\ [11]$. Donc : $3^{121} \equiv 3\ [11]$.

On en déduit que : $2^{123}+3^{121} \equiv 8+3\ [11]$ càd : $2^{123}+3^{121} \equiv 0\ [11]$.

Conclusion. L'entier $\left(2^{123}+3^{121}\right)$ est multiple de 11.

Exercice 11. — Montrer que le produit de 62 entiers naturels consécutifs est multiple de 59.

Si 62 entiers sont consécutifs, alors au moins l'un des deux est multiple de 59 (les restes dans la division euclidienne par 59 étant compris entre 0 et 58)...

Conclusion. Le produit de 62 entiers naturels consécutifs est multiple de 59.

Exercice 12. — La propriété : "pour tout entier naturel n, $5^{6n+1}+2^{2n}$ est divisible par 5" est-elle vraie ?

Non, car elle fausse pour $n=0$ (6 n'est pas multiple de 5).

Exercice 13. — Montrer que pour tout entier naturel n, $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 7.

On a : $5^6 \equiv 1$ [7]. Donc pour tout entier n on a : $5^{6n+1} \equiv 5$ [7].

Par ailleurs : $2^3 \equiv 1$ [7]. Donc pour tout entier n on a : $2^{3n+1} \equiv 2$ [7].

Donc pour tout entier n on a : $5^{6n+1}+2^{3n+1} \equiv 0$ [7].

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 7.

Exercice 14. — Montrer que $1+2^{30}+3^{30}+4^{30}$ est multiple de 5.

On a : $2^4 \equiv 1$ [5]. Donc : $2^{28} \equiv 1$ [5]. Donc : $2^{30} \equiv 4$ [5].

Par ailleurs : $3^4 \equiv 1$ [5]. Donc : $3^{28} \equiv 1$ [5]. Donc : $3^{30} \equiv 4$ [5].

Enfin : $4^2 \equiv 1$ [5]. Donc : $4^{30} \equiv 1$ [5].

Finalement : $1+2^{30}+3^{30}+4^{30} \equiv 10$ [5], soit : $1+2^{30}+3^{30}+4^{30} \equiv 0$ [5].

Conclusion. $1+2^{30}+3^{30}+4^{30}$ est multiple de 5.

Exercice 15. — Montrer que $1^{1001}+2^{1001}+3^{1001}+4^{1001}+5^{1001}$ est divisible par 5.

On a : $2^4 \equiv 1$ [5]. Donc : $2^{1000} \equiv 1$ [5]. Donc : $2^{1001} \equiv 2$ [5].

Par ailleurs : $3^4 \equiv 1$ [5]. Donc : $3^{1000} \equiv 1$ [5]. Donc : $3^{1001} \equiv 3$ [5].

Enfin : $4^2 \equiv 1$ [5]. Donc : $4^{1000} \equiv 1$ [5]. Donc : $4^{1001} \equiv 4$ [5].

Finalement : $1+2^{1001}+3^{1001}+4^{1001}+5^{1001} \equiv 10$ [5], soit : $1+2^{1001}+3^{1001}+4^{1001}+5^{1001} \equiv 0$ [5].

Conclusion. $1+2^{1001}+3^{1001}+4^{1001}+5^{1001}$ est divisible par 5.

Exercice 16. — Montrer que pour tout entier relatif n le nombre $A_n = n(n+3)(n+6)(n+13)$ est divisible par 4.

On distingue 4 cas suivant la valeur de n modulo 4 (càd suivant le reste dans la division euclidienne de n par 4).

➤ **Premier cas :** $n \equiv 0$ [4]. Alors : $A_n = n(n+3)(n+6)(n+13) \equiv 0$ [4].

➤ **Second cas :** $n \equiv 1$ [4]. Alors : $n+3 \equiv 0$ [4]. Donc : $A_n \equiv 0$ [4].

➤ **Troisième cas :** $n \equiv 2$ [4]. Alors : $n+6 \equiv 0$ [4]. Donc : $A_n \equiv 0$ [4].

➤ **Quatrième cas :** $n \equiv 3$ [4]. Alors : $n+13 \equiv 0$ [4]. Donc : $A_n \equiv 0$ [4].

Conclusion. Pour tout entier relatif n le nombre $A_n = n(n+3)(n+6)(n+13)$ est divisible par 4.

Exercice 17. — Montrer que l'équation (E) : $5x^2+2y^4 = 135789$ n'admet aucun couple d'entiers relatifs solution.

S'il existait un couple d'entiers (x,y) solution, alors on aurait : $5x^2+2y^4 = 135789$ (égalité dans $\mathbb{Z}$).

En particulier, on aurait :

$$5x^2+2y^4 \equiv 135789 \ [5] \qquad \text{d'où} \qquad 2y^4 \equiv 4 \ [5]$$

Or y^4 ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 modulo 5. Donc $2y^4$ est toujours distinct de 4 modulo 5. La congruence ci-dessus n'est donc jamais vérifiée. On en déduit que l'équation originale ne possède aucun couple solution.

Conclusion. L'équation (E) : $5x^2+2y^4 = 135789$ n'admet aucun couple d'entiers relatifs solution.

Exercice 18. — On considère un polynôme P de degré $n > 1$ à coefficients entiers relatifs. Explicitement, on suppose que P s'écrit : $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des entiers relatifs, et $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.

1) Montrer que toute racine entière de P divise a_0.

Supposons que α soit une racine entière de P : $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $P(\alpha) = 0$.

Alors : $a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \Longleftrightarrow \alpha \left(a_n \alpha^{n-1} + \cdots + a_2 \alpha + a_1\right) = -a_0$.

Il s'ensuit que α divise a_0 (puisque α divise $(-a_0)$).

Conclusion. Si α est une racine entière de P, alors α divise a_0.

2) En déduire que le polynôme $x^3 + 2x^2 + 6x - 4$ n'a pas de racine entière.

D'après la question précédente, si le polynôme $P = X^3 + 2X^2 + 6X - 4$ admettait une racine entière, alors celle-ci diviserait 4. Or les diviseurs de 4 sont connus : ± 4, ± 2 et ± 1. On vérifie aisément qu'aucun de ces entiers n'est racine de P.

Conclusion. Le polynôme $x^3 + 2x^2 + 6x - 4$ n'a pas de racine entière.

Exercice 19. — Soient x et y deux entiers relatifs. Montrer que : $7 \,|x \quad \text{et} \quad 7\,|y \Longleftrightarrow 7 \left| x^2 + y^2 \right.$

Soient x et y deux entiers relatifs.

Supposons que $7|x^2 + y^2$. La table ci-dessous donne les valeurs modulo 7 des carrés des entiers :

N	0	1	2	3	4	5	6
N^2	0	1	4	2	2	4	1

On déduit de cette table que la seule possibilité pour que $x^2 + y^2 \equiv 0$ [7] est que $x \equiv 0$ [7] et $y \equiv 0$ [7] (càd x et y multiples de 7). En effet, si x ou y n'est pas multiple de 7, alors la valeur de $x^2 + y^2$ modulo 7 appartient à $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On en déduit que : $\left(7 \left| x^2 + y^2 \right.\right) \Longrightarrow (7\,|x \quad \text{et} \quad 7\,|y)$

La réciproque est triviale.

Conclusion. $7\,|x \quad \text{et} \quad 7\,|y \Longleftrightarrow 7 \left| x^2 + y^2 \right.$

Exercice 20. — **Critère de divisibilité par 3**

Pour n un entier naturel, on peut noter : $\overline{a_p \cdots a_1 a_0}$ son écriture décimale, les a_i désignant des entiers compris entre 0 et 9. Cette écriture signifie que : $n = a_p \times 10^p + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$.

Etablir que n est multiple de 3 si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i$ est multiple de 3.

Soit n un entier naturel, d'écriture décimale : $\overline{a_p \cdots a_1 a_0}$. Alors : $n = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i 10^i$.

Il suffit alors d'observer que : $10 \equiv 1$ [3]. Par suite : $\forall\, i \in \mathbb{N},\ 10^i \equiv 1$ [3].

On en déduit que : $n \equiv \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i$ [3].

Conclusion. $(n \equiv 0\ [3]) \Longleftrightarrow \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i = 0\ [3]\right)$.

Exercice 21. — **Critère de divisibilité par** 11

Mêmes notations que précédemment. Etablir que n est multiple de 11 si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{p}(-1)^i a_i$ est multiple de 11.

Soit n un entier naturel, d'écriture décimale : $\overline{a_p \cdots a_1 a_0}$. Alors : $n = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i 10^i$.

Il suffit alors d'observer que : $10 \equiv -1\ [11]$. Par suite : $\forall\, i \in \mathbb{N},\ 10^i \equiv (-1)^i\ [11]$.

On en déduit que : $n \equiv \displaystyle\sum_{i=0}^{p}(-1)^i a_i\ [11]$.

Conclusion. $(n \equiv 0\ [11]) \Longleftrightarrow \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{p}(-1)^i a_i = 0\ [11]\right)$.

Exercice 22. — **Système chinois**

1) Déterminer tous les entiers x congrus à 2 modulo 10.

D'après le cours : $(x \equiv 2\ [10]) \Longleftrightarrow (x \in \{2 + 10k,\ k \in \mathbb{Z}\})$

2) Déterminer tous les entiers x congrus à 5 modulo 13.

D'après le cours : $(x \equiv 5\ [13]) \Longleftrightarrow (x \in \{5 + 13k,\ k \in \mathbb{Z}\})$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 2\ \ [10] \\ x \equiv 5\ \ [13] \end{cases}$

Soit x un entier solution du système. D'après les questions précédentes, il existe deux entiers k et k' tels que :

$$x = 2 + 10k = 5 + 13k'$$

Déterminons les couples (k, k') d'entiers tels que : $2 + 10k = 5 + 13k'$.

Ceci revient à résoudre l'équation diophantienne : $13k' - 10k = -3$.

Le couple $(-1, -1)$ est solution évidente de cette équation. En outre, puisque $13 \wedge 10 = 1$, la solution générale de l'équation homogène associée est : $(13p, 10p)$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que la solution générale de $2 + 10k = 5 + 13k'$ est :

$$\{(-1 + 13p, -1 + 10p)\,,\ p \in \mathbb{Z}\}$$

En résumé, si x est un entier solution du système, alors : $x = 2 + 10(-1 + 13p) = -8 + 130p$ avec p entier relatif.

Réciproquement, tout entier de cette forme est solution du système.

Conclusion. L'ensemble des entiers x solutions du système $\begin{cases} x \equiv 2\ \ [10] \\ x \equiv 5\ \ [13] \end{cases}$ est :

$$\{-8 + 130p,\ p \in \mathbb{Z}\}$$

Division euclidienne

Exercice 23. — Déterminer tous les entiers naturels qui, divisés par 6, donnent un quotient égal au reste.

Soit N un entier naturel. L'hypothèse de l'énoncé équivaut à : $N = 6r + r$, avec $r \in [\![\, 0, 5\,]\!]$.
Conclusion. Les entiers naturels qui, divisés par 6, donnent un quotient égal au reste sont exactement : 0, 7, 14, 21, 28 et 35.

Exercice 24. — Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $a = 3^{1000} + 28$ par 9.

On a : $3^{1000} + 28 = 9(3^{998} + 3) + 1$.
Conclusion. Le quotient q et le reste r dans la division euclidienne de $a = 3^{1000} + 28$ par 9 sont respectivement $q = (3^{998} + 3)$ et $r = 1$.

Exercice 25. — Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A = 5^{2019} + 51$ par 25.

On a : $5^{2019} + 51 = 25(5^{2017} + 2) + 1$.
Conclusion. Le quotient q et le reste r dans la division euclidienne de $a = 5^{2019} + 51$ par 25 sont respectivement $q = (5^{2017} + 1)$ et $r = 1$.

Exercice 26. — On divise un entier naturel n par 243 et 248. Les quotients sont égaux, et les restes respectifs sont 130 et 10. Quel est cet entier naturel n ?

D'après l'énoncé, il existe un entier q tel que : $n = 243q + 130 = 248q + 10$. D'où : $5q = 120$, donc $q = 24$.
Conclusion. $n = 5962$

Exercice 27. — Déterminer le reste dans la division euclidienne de 1234^{2019} par 7 (on pourra noter que $1234 \equiv 2\ [7]$, et que $2019 = 3 \times 673$).

On a : $1234 = 7 \times 176 + 2$. D'où : $1234 \equiv 2\ [7]$. D'où : $1234^3 \equiv 1\ [7]$.

On observe alors que : $2019 = 3 \times 673$. Donc : $1234^{2019} = \left(1234^3\right)^{673}$.

On déduit de ce qui précède que : $1234^{2019} \equiv 1\ [7]$.

Conclusion. Le reste dans la division euclidienne de 1234^{2019} par 7 est 1.

PGCD, PPCM, relation de Bezout

Exercice 28. — Déterminer le PGCD et les “coefficients de Bezout” des entiers a et b suivants :

1) $a = 33$ et $b = 24$ 2) $a = 37$ et $b = 27$ 3) $a = 270$ et $b = 105$

Cf feuille “Spécial équations diophantiennes”.

Exercice 29. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le PGCD de $2n + 4$ et $3n + 3$ ne peut être que 1, 2, 3 ou 6.

Notons d le PGCD de $2n + 4$ et $3n + 3$. On a : $d | 3 \times (2n + 4) - 2(3n + 3)$ donc $d | 6$.
Conclusion. Le PGCD de $2n + 4$ et $3n + 3$ ne peut être que 1, 2, 3 ou 6.

Exercice 30. — Déterminer tous les couples d'entiers relatifs tels que : $\begin{cases} x \wedge y = 15 \\ xy = 900 \end{cases}$

Soit (x, y) un couple d'entiers naturels solution du système. Puisque : $x \wedge y = 15$, il existe deux entiers x' et y' tels que :

$$x = 15x', \qquad y = 15y' \qquad \text{et} \quad x' \wedge y' = 1$$

Alors : $xy = 900 \Longleftrightarrow 225x'y' = 900 \Longleftrightarrow x'y' = 4$.

On en déduit que : $(x', y') = (1, 4)$ ou $(x', y') = (4, 1)$.

Par suite : $(x, y) = (15, 60)$ ou $(x, y) = (60, 15)$.

Conclusion. Il existe exactement deux couples d'entiers naturels solutions du système : $(15, 60)$ et $(60, 15)$.

Il existe exactement huit couples d'entiers relatifs solutions du système : $(\pm 15, \pm 60)$ et $(\pm 60, \pm 15)$.

Exercice 31. — Déterminer tous les couples d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} x \wedge y = 8 \\ x^2 - y^2 = 5440 \end{cases}$

Soit (x, y) un couple d'entiers naturels solution du système. Puisque : $x \wedge y = 8$, il existe deux entiers x' et y' tels que :

$$x = 8x', \qquad y = 8y' \qquad \text{et} \quad x' \wedge y' = 1$$

Alors : $xy = 5440 \Longleftrightarrow 64x'y' = 5440 \Longleftrightarrow x'y' = 85$.

On en déduit que : $(x', y') = (1, 85)$, $(x', y') = (5, 17)$, $(x', y') = (85, 1)$ ou $(x', y') = (17, 5)$.

Par suite : $(x, y) = (8, 680)$ ou $(x, y) = (40, 136)$ ou $(x, y) = (680, 8)$ ou $(x, y) = (136, 40)$.

Conclusion. Il existe exactement quatre couples d'entiers naturels solutions du système : $(8, 680)$, $(40, 136)$, $(680, 8)$ ou $(136, 40)$.

Exercice 32. — Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} x \vee y = 18 \\ x + y = 15 \end{cases}$

Soit (x, y) un couple d'entiers naturels solution du système. Puisque : $x \vee y = 18$, x et y sont des diviseurs de 18. On cherche donc les couples de diviseurs (x, y) de 18 tels que : $x + y = 15$. Après mûre réflexion, on obtient les couples $(6, 9)$ et $(9, 6)$.

Conclusion. Il existe exactement deux couples d'entiers naturels solutions du système : $(6, 9)$ et $(9, 6)$.

Exercice 33. — Déterminer tous les couples d'entiers relatifs tels que : $\begin{cases} x \wedge y & = & 5 \\ x \vee y & = & 60 \end{cases}$

Soit (x, y) un couple d'entiers naturels solution du système. Puisque : $x \wedge y = 5$, il existe deux entiers x' et y' tels que :

$$x = 5x', \qquad y = 5y' \qquad \text{et} \quad x' \wedge y' = 1$$

De plus, puisque : $x \vee y = 60$, on a : $xy = 300$.

On en déduit que : $25x'y' = 300$. Donc : $x'y' = 12$.

Par suite : $(x', y') \in \{(1, 12), (3, 4), (12, 1), (4, 3)\}$
Conclusion. Il existe exactement quatre couples d'entiers naturels solutions du système : $(5, 60)$, $(15, 20)$, $(20, 15)$ ou $(60, 5)$.
Il existe exactement 16 couples d'entiers relatifs solutions du système : $(\pm 5, \pm 60)$, $(\pm 15, \pm 20)$, $(\pm 20, \pm 15)$ ou $(\pm 60, \pm 5)$.

Exercice 34. — Déterminer tous les couples d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} x \wedge y & = & 10 \\ x + y & = & 100 \end{cases}$

Soit (x, y) un couple d'entiers naturels solution du système. Puisque : $x \wedge y = 10$, il existe deux entiers x' et y' tels que :

$$x = 10x', \qquad y = 10y' \qquad \text{et} \quad x' \wedge y' = 1$$

De plus, puisque : $x + y = 100$, on a$x' + y' = 10$.

Il reste donc à déterminer les couples d'entiers naturels (x', y') premiers entre eux, et de somme 10. Ce sont explicitement les couples :

$$(1, 9),\ (3, 7),\ (7, 3) \text{ et } (9, 1)$$

Conclusion. Il existe exactement 4 couples d'entiers naturels solutions : $(10, 90)$, $(30, 70)$, $(70, 30)$ et $(90, 10)$

Exercice 35. — Quel est le plus petit entier naturel congru à 5 modulo 27 et modulo 42 ?

5, lol.

Exercice 36. — Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de (E) : $7x - 6y = 1$.

$(1, 1)$ est solution particulière ; $(6k, 7k)$ est la solution générale de l'équation homogène associée.

Conclusion. L'ensemble des couples solutions de l'équation est : $\{(1 + 6k, 1 + 7k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 37. — Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de (E) : $16x - 3y = 4$.

$(1, 4)$ est solution particulière ; $(3k, 16k)$ est la solution générale de l'équation homogène associée.

Conclusion. L'ensemble des couples solutions de l'équation est : $\{(1 + 3k, 4 + 16k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 38. — Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de (E) : $3x + 7y = 10^n$ (où $n \in \mathbb{N}$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(10^{n-1}, 10^{n-1})$ est solution particulière ; $(7k, -3k)$ est la solution générale de l'équation homogène associée.

Conclusion. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des couples solutions de l'équation est : $\left\{(10^{n-1} + 7k, 10^{n-1} - 3k),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Pour $n = 0$: $(-2, 1)$ est solution particulière ; $(7k, -3k)$ est la solution générale de l'équation homogène associée.

Conclusion. Pour $n = 0$, l'ensemble des couples solutions de l'équation est : $\{(-2 + 7k, 1 - 3k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 39. — Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de (E) : $18x + 7y = 12$.

$(3, -6)$ est solution particulière ; $(7k, -18k)$ est la solution générale de l'équation homogène associée.

Conclusion. L'ensemble des couples solutions de l'équation est : $\{(3 + 7k, -6 - 18k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 40. — On se propose de déterminer tous les entiers relatifs N tels que : $\left\{\begin{array}{lll} N & \equiv & 5 \quad [13] \\ N & \equiv & 1 \quad [17] \end{array}\right.$

1) Vérifier que 239 est solution de ce système.

$239 = 13\times 18+5$ donc $239 \equiv 5$ [13] ; $239 = 14\times 17+1$ donc $239\equiv 1$ [17].
Conclusion. 239 est solution du système.

2) Soit N un entier relatif solution de ce système. Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1+17x = 5+13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

Si N est solution du système, alors il existe deux entiers x et y tels que $N = 1+17x = 5+13y$, par définition de congruence. L'égalité $1+17x = 5+13y$ fournit la relation $17x-13y = 4$.

3) Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

$(1, 1)$ est solution particulière ; $(13k, 17k)$ est la solution générale de l'équation homogène associée.

Conclusion. L'ensemble des couples solutions de l'équation est : $\{(1+13k, 1+17k),\ k\in\mathbb{Z}\}$.

4) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

D'après les questions 2 et 3, si N est solution, alors il existe un entier relatif k tel que :

$$N = 1+17\,(1+13k) \qquad \text{càd :} \qquad N = 18+221k$$

Conclusion. Si N est solution, alors il existe un entier relatif k tel que $N = 18+221k$.

5) Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18$ [221] et $\left\{\begin{array}{lll} N & \equiv & 5 \quad [13] \\ N & \equiv & 1 \quad [17] \end{array}\right.$.

La question précédente fournit l'implication : (N solution du système) $\Longrightarrow$ ($N\equiv 18$ [221]).

Réciproquement, si N est congru à 18 modulo 221, alors il existe un entier relatif k tel que : $N = 18+221k$.

En particulier : $N\equiv 5$ [13] puisque 221 est multiple de 13 ; et $N\equiv 1$ [17] puisque 221 est aussi multiple de 17.
Conclusion. (N solution du système) $\Longleftrightarrow$ ($N\equiv 18$ [221]).

Exercice 41. — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1}+u_n$.

0) Révision : quelle est l'expression du terme général u_n en fonction de n ?

La suite u est évidemment la suite de Fibonacci, que l'on ne présente plus.

Conclusion. $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n 5}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]$

1) Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.

Pour tout entier naturel n non nul, notons :

$$P(n) : \text{“}u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n\text{”}$$

On a : $u_2u_0 - u_1^2 = -1$. D'où $P(1)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. Alors :

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}u_n + u_n^2 - u_{n+1}^2 = u_{n+1}u_n + u_{n+1}u_{n-1} + (-1)^{n+1} - u_{n+1}^2 = u_{n+1}\underbrace{(u_n + u_{n-1} - u_{n+1})}_{=0} + (-1)^{n+1}$$

Finalement : $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. D'où $P(n+1)$.

Conclusion. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$

2) En déduire que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}\wedge u_n = 1$.

Si d est un diviseur commun à u_n et u_{n+1}, alors : d divise $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$, donc d divise $(-1)^n$.

Conclusion. Deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.

Exercice 42. — Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que a et $a+b$ sont premiers entre eux.

Puisque a et b sont premiers entre eux, il existe un couple $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $au+bv=1$.

D'où : $a(u-v)+(a+b)v=1$. Donc $a \wedge (a+b)=1$.
Conclusion. Si a et b sont premiers entre eux, alors a et $a+b$ sont premiers entre eux.

Exercice 43. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n^2+n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

Soit d un diviseur commun à n^2+n et $2n+1$. Alors :

$$d|2\left(n^2+n\right)-n(2n+1) \qquad \text{donc :} \qquad d|n$$

Puisque d divise n et $2n+1$, on en déduit que d divise 1.

Par suite, les seuls diviseurs communs à n^2+n et $2n+1$ sont ± 1.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n^2+n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

Nombres premiers

Exercice 44. — Montrer que l'entier naturel $N=2^{2022}-49$ n'est pas premier.

$N=\left(2^{1011}-7\right)\left(2^{1011}+7\right)$. D'où la conclusion.

Exercice 45. — 1) Pour vérifier que 977 est premier, on peut essayer de le diviser par les nombres premiers 2, 3, 5 et ainsi de suite jusqu'à un certain nombre premier p_1. Précisément, quelle est la valeur de p_1 ?

Si 977 est composé, alors il admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{977}$. Puisque : $\left\lfloor\sqrt{971}\right\rfloor=31$ est un nombre premier, on a $p_1=31$.
Conclusion. Pour vérifier que 977 est premier, il suffit d'effectuer la division euclidienne de 977 par chacun des nombres premiers jusqu'à 31 (pour vérifier qu'il n'est divisible par aucun d'entre eux).

2) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x,y) tels que : $x^2-y^2=977$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $x^2-y^2=977$. Alors : $(x-y)(x+y)=977$.

D'après la question précédente, on a donc :

$$(x-y=1 \text{ et } x+y=977) \text{ OU } (x-y=-1 \text{ et } x+y=-977) \text{ OU } (x-y=977 \text{ et } x+y=1) \text{ OU } (x-y=-977 \text{ et } x+y=-1)$$

En résolvant chacun de ces systèmes, et en tenant compte du fait que x et y sont des entiers naturels, il subsiste un unique couple solution : $(489,488)$.
Conclusion. $(489,488)$ est l'unique couple (x,y) d'entiers naturels tel que : $x^2-y^2=977$.