MPSI – Colle 18 (3 au 7 mars 2025) : Applications de la dérivation

Chapitre 16 : Applications de la dérivation

1 – Généralités

Rappels : notion de fonction dérivable en a, de nombre dérivé à gauche ou à droite en a. Une fonction f est dérivable en a SSI f admet un DL à l'ordre 1 en a. Conséquence : dérivable implique continue (réciproque fausse).

2 – Dérivation et extremums

Propriété. Soit f une fonction dérivable sur I (intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$), et soit $c \in I$. Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

La réciproque est fausse ($x \longmapsto x^3 \ldots$), et l'énoncé n'est plus valide sur segment.

Théorème de Rolle. Si est dérivable sur $]a;b[$, continue sur $[a,b]$, et $f(a) = f(b)$ alors $\exists\, c \in\,]\,a;b\,[\,,\ f'(c) = 0$.

Remarque : si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule (au moins) n fois sur $\mathbb{R}$, alors f' s'annule (au moins) $n-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

3 – Dérivation et sens de variation

Théorème des accroissements finis (TAF). Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a,b[$, continue sur $[a;b]$, alors $\exists\ c \in\ ]\,a;b\,[\,,\ f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation graphique : il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse c soit parallèle à la droite joignant les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses a et b.

Interprétation cinématique : sous réserve que vous vous déplaciez "gentiment" (= "de façon dérivable") en voiture, il existe au moins un instant où votre vitesse instantanée aura été égale à votre vitesse moyenne sur le parcours.

Interprétation génératrice de torticolis : le TAF est le "théorème de Rolle en pente".

Corollaire. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1) f est croissante sur I SSI $f' \geqslant 0$ sur I
2) f est décroissante sur I SSI $f' \leqslant 0$ sur I
3) f est monotone sur I SSI $f' = 0$ sur I

Corollaire (**Inégalité des accroissements finis**).
Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I, et s'il existe un réel K tel que $|f'| \leqslant K$ sur I, alors : $\forall\ (a,b) \in\ I^2,\ |f(b)-f(a)| \leqslant K\,|b-a|$.

Interprétation cinématique : si vous roulez pendant une heure en ne dépassant jamais la vitesse de 100km/h, vous parcourerez moins de 100 kilomètres !

Remarque : la condition "$|f'| \leqslant K$ sur I" est en particulier vérifiée lorsque I est un segment et que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Application : $\forall\, x \in\ \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|$.

4 – Lipschitzianité

Définition. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. f est **lipschitzienne** sur I s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\ (x,y) \in\ I^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant K\,|y-x|$.

Exemples. 1) cos, sin et arctan sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction $x \longmapsto x^2$ est 2-lipschitzienne sur $[0,1]$.

3) La fonction $x \longmapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$; en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \longrightarrow +\infty$.

En revanche, d'après l'inégalité des accroissements finis :

Propriété. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. La fonction f est lipschitzienne sur I SSI f' est bornée sur I.

Questions de cours

- **Théorème de Rolle**.
- **Théorème des accroissements finis**.
- **Propriété**. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. On a : f croissante sur $I \Longrightarrow f'$ est positive sur I
- **Propriété**. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. On a : f' est positive sur $I \Longrightarrow f$ croissante sur I
- **Propriété**. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors : f' bornée sur $I \Longrightarrow f$ lipschtzienne sur I