Colle 20 – Questions de cours

Question de cours 1 — $f = o_a(g) \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 0$

Preuve. $f = o_a(g) \Longleftrightarrow f = g\varepsilon$ avec $\lim_a \varepsilon = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{f}{g} = \varepsilon$ avec $\lim_a \varepsilon = 0 \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 0$

Conclusion. $f = o_a(g) \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 0$

Remarque. *Il n'est pas indispensable d'inclure dans cette démo (ni dans les deux suivantes) des "x", des quantificateurs, et des hypothèses... du moment que l'on sait de quoi il est question !*

Explicitement, on suppose ici que :

- *a est un nombre réel ;*
- *f et g sont 2 fonctions définies sur un même voisinage V de a, et sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ;*
- *g ne s'annule pas sur V, pour que le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ soit défini lorsque $x \in V$;*
- *ε est une fonction définie sur V, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et vérifie : $\lim_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)*

Question de cours 2 — $f \sim_a g \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 1$

Preuve. $f \sim_a g \Longleftrightarrow f = g\varphi$ avec $\lim_a \varphi = 1 \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = \varphi$ avec $\lim_a \varphi = 1 \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 1$

Conclusion. $f \sim_a g \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 1$

Question de cours 3 — $f \sim_a g \Longleftrightarrow f = g + o_a(g)$

Preuve. $f \sim_a g \Longleftrightarrow f = g\varphi$avec $\lim_a \varphi = 1 \Longleftrightarrow f = g\,(1 + \varphi - 1)$ avec $\lim_a \varphi = 1$

$\Longleftrightarrow f = g + (\varphi - 1)\,g$ avec $\lim_a \varphi = 1 \Longleftrightarrow f = g + \varepsilon g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0 \Longleftrightarrow f = g + o_a(g)$

Conclusion. $f \sim_a g \Longleftrightarrow f = g + o_a(g)$

Question de cours 4 — **Application de la formule de Taylor 1**. DL en 0 à l'ordre $2n$ de cos.

Soit n un entier naturel quelconque. La fonction cos étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet en particulier un DL à l'ordre $2n$ en 0, qui est donné par la formule de Taylor :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^{2n}\right)$$

En séparant dans la partie régulière les termes de rangs pairs et ceux de rangs impairs, on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n}\right)$$

Or la fonction cos étant paire, toutes ses dérivées d'ordre impair sont impaires.
Il s'ensuit que : $\forall\, k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$, $\cos^{(2k+1)}(0) = 0$. D'où :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$$

En outre, pour tout $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$, on a : $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. Il s'ensuit que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall\,(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N},\ \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)}$$

Question de cours 5 — Application de la formule de Taylor 2. DL en 0 à un ordre n arbitraire de $f : x \longmapsto 1/(1-x)$. En déduire le DL en 0 à tout ordre de la fonction arctangente.

Preuve. Notons $I = \,]-1,1[$. La fonction $f : x \longmapsto 1/(1-x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I d'après les théorèmes généraux. Le but est de prouver que f admet une dérivée à tout ordre, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

On note $P(n)$ la propriété : "$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$".

L'initialisation est immédiate. Supposons donc $P(n)$ établie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Alors $f^{(n)}$ est dérivable sur I ("HR+TG") et :

$$\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \left(f^n\right)'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right) = \frac{n! \times (n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Ce qui établit l'hérédité et achève cette récurrence. On en déduit en particulier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = n!$.

En conjuguant ce résultat avec la formule de Taylor, on en déduit que f admet en 0 un DL à tout ordre, et explicitement :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1-x} = \left[\sum_{x=0}^{n} x^k\right] + o\left(x^n\right) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)}$$

Par changement de variable $x \mapsto (-x^2)$: $\boxed{\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{1+x^2} = \left[\displaystyle\sum_{x=0}^{n} (-1)^k x^{2k}\right] + o\left(x^{2n}\right)}$

Par intégration (et en notant que $\arctan(0) = 0$) :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \arctan(x) = \left[\sum_{x=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right] + o\left(x^{2n+1}\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)}$$

Question de cours 6 — Théorème (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG) : si $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$, alors f admet un DL à l'ordre n en a, explicitement :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] + o\left((x-a)^n\right)$$

Preuve. Posons tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$: "Si $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, alors $\forall\, x \in I,\ f(x) = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] + o\left((x-a)^n\right)$"

➤ Initialisation (pour $n = 0$) : supposons que $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$, c'est-à-dire que f est continue sur I. Pour tout réel a de I, on peut judicieusement écrire :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = f(a) + \underbrace{(f(x) - f(a))}_{\varepsilon(x)}$$

On pose : $\varepsilon(x) = (f(x) - f(a))$. Comme f est continue en a par hypothèse, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a)$. D'où : $\lim\limits_{x\longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. On a donc obtenu, sous l'hypothèse que $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$:

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = f(a) + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0, \text{ càd : } \forall\, x \in I,\ f(x) = f(a) + o_a(1)$$

D'où $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

➤ Hérédité : supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Soit que $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. On observe que sous cette hypothèse on a : $f' \in \mathscr{C}^{n}(I,\mathbb{R})$. On peut alors légitimement appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction f' pour affirmer que pour tout réel $a \in I$ on a :

$$\forall\, t \in\ I,\ f'(t) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f'^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] + o_a\left((t-a)^n\right)$$

Puis, pour un x fixé dans I, on intègre cette relation entre a et x pour obtenir (par linéarité de l'intégrale) :

$$\forall\, x \in\ I,\ \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\int_a^x (t-a)^k\,\mathrm{d}t\right] + \int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t$$

Soit :

$$\forall\, x \in\ I,\ f(x)-f(a) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\,\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}\right] + \int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t$$

D'où : $\forall\, x \in\ I,\ f(x) = f(a) + \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}\ (x-a)^{k+1}\right] + \int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t$

Et finalement :

$$\forall\, x \in\ I,\ f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (x-a)^k\right] + \underbrace{\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t}_{=o_a\left((x-a)^{n+1}\right)}$$

Récurrence établie.

— Fin de la question de cours * —

Pour information, preuve de la partie admise*. Pour achever la preuve, il "suffit" donc de montrer que le terme* $\displaystyle\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t$ *est négligeable devant* $(x-a)^{n+1}$ *au voisinage de* a*, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire comme* $(x-a)^{n+1}\varphi(x)$ *avec* $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}\varphi(x)=0$.

On commence par noter que : $o_a\left((t-a)^n\right) = (t-a)^n\,\varepsilon(t)$ *avec* $\displaystyle\lim_{t\to a}\varepsilon(t)=0$ *(définition de négligeabilité).*

Puis on observe que pour tout réel $x \neq a$ *:* $\displaystyle\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t = (x-a)^{n+1}\times\frac{\int_a^x (t-a)^n\,\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^{n+1}}$.

Posons alors : $\varphi(x) = \dfrac{\int_a^x (t-a)^n\,\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^{n+1}}$*, et montrons que* $\varphi(x)$ *tend vers* 0 *quand* x *tend vers* a*, ce que l'on fait en revenant à la définition de limite.*

Fixons $\beta>0$*. Puisque* $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow a}\varepsilon(t)=0$*, il existe un réel* α *tel que* $|t-a|<\alpha \Longrightarrow |\varepsilon(t)|<\beta$*. Ainsi :*

$$|x-a|<\alpha \Longrightarrow |\varphi(x)| < \frac{1}{|x-a|^{n+1}}\times\beta\int_a^x |t-a|^n\,\mathrm{d}t \quad \textit{d'où} \quad |x-a|<\alpha \Longrightarrow |\varphi(x)| < \frac{\beta}{n+1}.$$

En particulier : $|x-a|<\alpha \Longrightarrow |\varphi(x)|<\beta$*, et on a donc établi que :* $\forall\,\beta>0,\ \exists\,\alpha>0,\ |x-a|<\alpha \Longrightarrow |\varphi(x)|<\beta$.

Ce qui signifie que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}\varphi(x)=0$*, et donc :* $\displaystyle\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t = o_a\left((x-a)^{n+1}\right)$.

Finalement, on a : $\forall\ x \in\ I,\ f(x) = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (x-a)^k\right] + o_a\left((x-a)^{n+1}\right)$*, ce qui prouve que la propriété* $\mathscr{P}(n+1)$ *est vraie, montre l'hérédité de la propriété, et conclut cette preuve.*

*. On admet donc que : $\displaystyle\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t = o_a\left((x-a)^{n+1}\right)$

Banque d'exercices

Exercice 1 — Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \longmapsto \left(x^2 - 1\right) \mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2 — Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g : x \longmapsto \ln(\cos(x))$.

Exercice 3 — Calcul de $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$.

Exercice 4 — Calculs de $\ell_1 = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\ell_2 = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ et $\ell_3 = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

Exercice 5 — Equation de l'asymptote D à la courbe représentative de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$, et position relative de $\mathscr{C}_f$ et D.

Exercice 6 — Calcul de $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x - a)}$ avec $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 7 — On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à 2. Explicitement :

$$\mathbb{R}_2[X] = \left\{aX^2 + bX + c,\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C}^2(]-1, 1[, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ f &\longmapsto P_f \end{aligned}$$

où P_f désigne la partie régulière du DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction f.

Par exemple : $\varphi(\exp) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2}$; $\varphi(\sin) = X$; $\varphi(\cos) = 1 - \dfrac{X^2}{2}$

Montrer que l'application φ est surjective et non-injective.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1 — Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \longmapsto \left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Selon le cours, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

Par conséquent, pour tout réel x on a :

$$\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(x^2-1\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = -1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x} = -1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{6} + o(x^3)$

Exercice 2 — Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g : x \longmapsto \ln\left(\cos(x)\right)$.

Soit x un réel "proche de zéro", par exemple dans $I = \left]-1,1\right[$.[†]

On a : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$.

D'où : $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \qquad (\spadesuit)$.

Par ailleurs : $\ln(1-X) = -X - \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)$.

En posant $X = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}$ dans la relation $(\spadesuit)$, on obtient :

$$\ln(\cos(x)) = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2}{2} + o\left(x^4\right)$$

Ainsi :

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)$$

Conclusion. $\forall x \in I, \quad \ln(\cos(x)) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$

Exercice 3 — Calcul de $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$.

Ecrivons un DL à l'ordre 4 en 0 de $\sin^2(x)$.

D'après le cours : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$. Par suite : $\sin^2(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2 - \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)} = \dfrac{1}{x^2}\left[1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)}\right] \qquad (\spadesuit)$

Par ailleurs, d'après le cours encore : $\dfrac{1}{1-X} = 1 + X + o(X)$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$. D'où : $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)} = -\dfrac{x^2}{3} + o(x^2) \qquad (\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2(x)}\right] \sim_0 \dfrac{1}{x^2} \times \left(-\dfrac{x^2}{3}\right)$. **Conclusion.** $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{3}$

†. Pour s'assurer que le réel $\ln(\cos(x))$ est bien défini.

EXERCICE 4 — Calculs de $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ et $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,;\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \mathrm{e}^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\quad\text{et}\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Or : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$. On en déduit que :

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1\,;\quad n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} n\quad\text{et}\quad \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1\,;\quad \lim_{n\to+\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty\quad\text{et}\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

Conclusion. $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\,;\quad \ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty\quad$ et $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = 1$

EXERCICE 5 — Equation de l'asymptote D à la courbe représentative de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$ au voisinage de $+\infty$, et position relative de $\mathscr{C}_f$ et D.

Soit x un réel strictement positif. On a : $\sqrt{x^2+x+1} = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$.

Par ailleurs, pour tout réel $X > -1$, on a : $\sqrt{1+X} = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8} + o(X^2)$.

On pose : $X = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ (et on peut observer que X tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$).

On obtient alors :

$$\sqrt{x^2+x+1} = x\left[1+\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2} - \frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2}{8} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = x\left[1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= x\left[1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Conclusion. La courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x+\dfrac{1}{2}$; et que la courbe est située au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ (signe de $\dfrac{3}{8x}$).

EXERCICE 6 — Calcul de $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{\sin(x-a)}$ avec $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$

On effectue un **retour à l'origine**, càd un changement de variable permettant de se ramener à un calcul de limite en 0, en posant :

$$X = x-a \qquad (\text{donc } x = X+a)$$

Moyennant ce changement de variable, l'énoncé devient :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{\sin(x-a)} = \lim_{X\to 0}\frac{\sin(X+a)-\sin(a)}{\sin(X)}$$

Déterminons un équivalent de cette fraction. On a déjà : $\sin(X) \sim_0 X \qquad (\spadesuit)$

Par ailleurs :

$$\sin(X+a)-\sin(a) = \sin(X)\cos(a)+\sin(a)\cos(X)-\sin(a) = \sin(X)\cos(a)+\sin(a)\left(\cos(X)-1\right)$$

Donc : $\sin(X+a)-\sin(a) = \cos(a)X + o(X)\quad$ d'où : $\sin(X+a)-\sin(a) \sim_0 \cos(a)X \quad (\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\dfrac{\sin(X+a)-\sin(a)}{\sin(X)} \sim_0 \cos(a)$. **Conclusion.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{\sin(x-a)} = \cos(a)$

Exercice 7 — On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à 2. Explicitement :

$$\mathbb{R}_2[X] = \left\{aX^2 + bX + c,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C}^2\left(]-1,1[,\mathbb{R}\right) &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ f &\longmapsto P_f \end{aligned}$$

où P_f désigne la partie régulière du DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction f.

Par exemple : $\varphi(\exp) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2}$; $\varphi(\sin) = X$; $\varphi(\cos) = 1 - \dfrac{X^2}{2}$

Montrer que l'application φ est surjective et non-injective.

➤ **Surjectivité**. Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$. On définit une fonction f en posant : $\forall\, x \in]-1,1[,\ f(x) = ax^2+bx+c$.

On a : $\forall\, x \in]-1,1[,\ f(x) = c + bx + ax^2 + o(x^2)$. D'où : $\varphi(f) = P$.
On en déduit que tout élément P de $\mathbb{R}_2[X]$ admet un antécédent par φ : l'application φ est surjective.

➤ **(Non-)injectivité**. Selon le cours : $\varphi(\sin) = \varphi(\tan) = X$. D'où φ n'est pas injective.

Conclusion. L'application φ est surjective et non-injective.