Exercices 18 — DL et équivalents — Corrigé

Exercice 1. — Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des expressions suivantes :

1/ $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$).

On commence par écrire le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Puis on effectue le changement de variable $X = -x$ pour obtenir [*] :

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Pour finir : $x\mathrm{e}^{-x} = x - x^2 + \dfrac{x^3}{2!} - \dfrac{x^4}{3!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

2/ $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$ (avec $a = 0$ et $n = 8$).

On commence par écrire le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Puis on effectue le changement de variable $X = x^3$ pour obtenir [†] :

$$\mathrm{e}^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + x^8\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

3/ $f(x) = (1+x)^{3/2}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$).

Il suffit d'écrire le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ (formulaire), avec $\alpha = 3/2$:

$$(1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Soit : $(1+x)^{3/2} = 1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

4/ $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$).

On a : $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - \ln(1+x)$.

Le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$ est donné par le formulaire :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Pour obtenir le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x^2)$, on effectue le changement de variable $X = x^2$ dans le précédent, pour obtenir [‡] :

$$\ln(1+x^2) = x^2 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

On en déduit que : $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right) = -x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

5/ $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$).

On écrit d'abord : $f(x) = \ln(1+x) \times \dfrac{1}{1-x}$.

D'après le formulaire, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

et

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

∗. Légitimement car $\lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$.

†. Légitimement car $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$.

‡. Légitimement car $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Puis on applique la règle permettant d'obtenir le DL d'un produit de fonctions : on effectue le produit des parties régulières, en tronquant à l'ordre 3, càd en ne tenant pas compte des puissances de x supérieures ou égales à 4, ce qui donne la ligne ci-dessous.

$$\ln(1+x)\times\frac{1}{1-x}=\left(1+x+x^2+x^3\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+x^3\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

D'où :

$$\ln(1+x)\times\frac{1}{1-x}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{x^3}{2}+x^3+x^3\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

Soit finalement : $\ln(1+x)\times\dfrac{1}{1-x}=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$

1/ $f(x)=\mathrm{e}^{1-x^2}$ (avec $a=0$ et $n=6$).

Attention : on ne peut pas directement poser $X=1-x^2$ dans le DL de l'exponentielle, puisque $\lim\limits_{x\to 0}1-x^2\neq 0$.

Pour contourner le problème, on observe que : $\mathrm{e}^{1-x^2}=\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-x^2}$.

Puis on écrit le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

On effectue ensuite le changement de variable $X=-x^2$ pour obtenir [§] :

$$\mathrm{e}^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+x^6\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

Finalement : $\mathrm{e}^{1-x^2}=\mathrm{e}-\mathrm{e}x^2+\dfrac{\mathrm{e}x^4}{2!}-\dfrac{\mathrm{e}x^6}{3!}+x^6\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

7/ $f(x)=(1-x)\,\mathrm{e}^{2x}$ (avec $a=0$ et $n=3$).

On écrit le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

On effectue ensuite le changement de variable $X=2x$ pour obtenir [¶] :

$$\mathrm{e}^{2x}=1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

Puis on multiplie la partie régulière de ce DL par $(1-x)$, en ne tenant pas compte des puissances de x supérieures ou égales à 4 :

$$(1-x)\mathrm{e}^{2x}=1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}-x-2x^2-2x^3+x^3\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

Finalement : $(1-x)\mathrm{e}^{2x}=1+x-\dfrac{2x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

8/ $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,x}$ (avec $a=0$ et $n=4$).
D'après le formulaire :

$$\mathrm{sh}\,(x)=x+\frac{x^3}{6}+x^4\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

et

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

Puis, dans le DL de e^x, on remplace tous les "x" par des "$x+\dfrac{x^3}{6}$" (partie régulière du DL de $\mathrm{sh}\,(x)$). Alors :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,(x)}=1+\left(x+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{\left(x+\frac{x^3}{6}\right)^2}{2}+\frac{\left(x+\frac{x^3}{6}\right)^3}{6}+\frac{\left(x+\frac{x^3}{6}\right)^4}{24}+x^4\varepsilon(x)\qquad\text{avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

§. Légitimement cette fois-ci car $\lim\limits_{x\to 0}-x^2=0$.

¶. Légitimement car $\lim\limits_{x\to 0}2x=0$.

Donc :
$$e^{\text{sh}\,(x)} = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Finalement : $e^{\text{sh}\,(x)} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

9/ $f\,(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$).

D'après le formulaire : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$

D'où : $e^{\sqrt{1+x}} = \exp\left(1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) = e \times \exp\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right)$

Or :
$$\exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

D'où :
$$\exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$$

Finalement : $e^{\sqrt{1+x}} = 1 + \dfrac{x}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

10**/ $f\,(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$).

On a (formulaire) : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$

Ainsi : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)} \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

D'où : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{16} + x^2\varepsilon(x)} \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Arrivé à cet endroit, on effectue un nouveau changement de variable, en posant $X = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{16}$.

Puisque : $\sqrt{1+X} = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8} + X^2\varepsilon(X)$ et que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 0$, on en déduit :
$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}}{2} - \frac{\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right)^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Donc : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left[1 + \dfrac{x}{8} - \dfrac{x^2}{32} - \dfrac{x^2}{128}\right] + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Finalement : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left[1 + \dfrac{x}{8} - \dfrac{5x^2}{128}\right] + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Exercice 2. — (DL, équivalents et limites). On peut lever des indéterminations en effectuant un DL en 0 à un ordre judicieusement choisi.

Exemples : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ (DL à l'ordre 1 en 0 de sin) ; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$ (DL à l'ordre 3 en 0 de sin)

1/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan\,(x)}{3x}$

On a : $\arctan\,(x) \sim_0 x$. D'où : $\dfrac{\arctan\,(x)}{3x} \sim_0 \dfrac{1}{3}$. Par suite : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan\,(x)}{3x} = \dfrac{1}{3}$.

2/ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln((1+x)(1+2x))}{x}$

Pour tout réel $x > 0$, on a : $\ln((1+x)(1+2x)) = \ln(1+x) + \ln(1+2x)$.

D'où : $\ln((1+x)(1+2x)) = x + o(x) + 2x + o(x)$ soit $\ln((1+x)(1+2x)) = 3x + o(x)$

En particulier : $\ln((1+x)(1+2x)) \sim_0 3x$. D'où : $\dfrac{\ln((1+x)(1+2x))}{x} \sim_0 3$.

Par suite : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln((1+x)(1+2x))}{x} = 3$.

3/ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2 + 2x}$

D'une part : $\sin(x) \sim_0 x$, et d'autre part : $x^2 + 2x \sim_0 2x$. D'où : $\dfrac{\sin(x)}{x^2+2x} \sim_0 \dfrac{1}{2}$. Par suite : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2+2x} = \dfrac{1}{2}$.

4/ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2(x)}$

Ecrivons un DL à l'ordre 4 en 0 de $\tan^2(x)$.

D'après le formulaire : $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$. Par suite : $\tan^2(x) = x^2 + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2(x)} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2 + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)} = \dfrac{1}{x^2}\left[1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{2x^2}{3} + o(x^2)}\right]$ $(\spadesuit)$

Par ailleurs, d'après le formulaire encore : $\dfrac{1}{1+X} = 1 - X + o(X)$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{1 + \dfrac{2x^2}{3} + o(x^2)} = 1 - \dfrac{2x^2}{3} + o(x^2)$. D'où : $1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{2x^2}{3} + o(x^2)} = \dfrac{2x^2}{3} + o(x^2)$ $(\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2(x)}\right] \sim_0 \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{2x^2}{3}$. Donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2(x)} = \dfrac{2}{3}$

5/ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(2x^2 - x + 1\right) \sin\left(\dfrac{1}{\pi\, x^2}\right)$

D'une part, puisque $\sin(X) \sim_0 X$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\pi\, x^2} = 0$, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{\pi\, x^2}\right) \sim_{x \to +\infty} \frac{1}{\pi\, x^2}$$

D'autre part : $2x^2 - x + 1 \sim_{+\infty} 2x^2$.

On en déduit que : $\left(2x^2 - x + 1\right) \sin\left(\dfrac{1}{\pi\, x^2}\right) \sim_{+\infty} 2x^2 \times \dfrac{1}{\pi\, x^2}$.

D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(2x^2 - x + 1\right) \sin\left(\dfrac{1}{\pi\, x^2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.

6/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}+\ln(n+1)+\mathrm{e}^{-n}}$

Puisque $\sqrt{n} = o_{+\infty}(n)$, on a : $\sqrt[3]{n+\sqrt{n}} \sim_{+\infty} \sqrt[3]{n}$.

Et comme : $\sqrt[3]{n} = o_{+\infty}\left(\sqrt{n}\right)$, on a : $3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+\sqrt{n}} \sim_{+\infty} 3\sqrt{n} \qquad (\spadesuit)$.

Par ailleurs, puisque : $\ln(n+1)+\mathrm{e}^{-n} = o_{+\infty}\left(\sqrt{n}\right)$, on a : $2\sqrt{n}+\ln(n+1)+\mathrm{e}^{-n} \sim_{+\infty} 2\sqrt{n} \qquad (\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\dfrac{3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}+\ln(n+1)+\mathrm{e}^{-n}} \sim_{+\infty} \dfrac{3\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$.

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}+\ln(n+1)+\mathrm{e}^{-n}} = \frac{3}{2}$.

7/ $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin(x)-\sin(a)}{\sin(x-a)}$ avec $0<a<\dfrac{\pi}{2}$.

Le premier réflexe ici est de faire un **retour à l'origine**, càd un changement de variable permettant de se ramener à un calcul de limite en 0. On pose donc :

$$X = x-a \qquad (\text{donc } x = X+a)$$

Moyennant ce changement de variable, l'énoncé de l'exo se réécrit :

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin(x)-\sin(a)}{\sin(x-a)} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X+a)-\sin(a)}{\sin(X)}$$

On a déjà : $\sin(X) \sim_0 X \qquad (\spadesuit)$

Par ailleurs :

$$\sin(X+a)-\sin(a) = \sin(X)\cos(a)+\sin(a)\cos(X)-\sin(a) = \sin(X)\cos(a)+\sin(a)\left(\cos(X)-1\right)$$

On en déduit que : $\sin(X+a)-\sin(a) \sim_0 \sin(X)\cos(a)$.

D'où : $\sin(X+a)-\sin(a) \sim_0 X\cos(a) \qquad (\clubsuit)$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\dfrac{\sin(X+a)-\sin(a)}{\sin(X)} \sim_0 \cos(a)$. Par suite : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin(x)-\sin(a)}{\sin(x-a)} = \cos(a)$

8/ $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{\sin(x-a)}$ où a est un réel >0 arbitraire

Comme dans la question précédente, on effectue un **retour à l'origine**, en posant :

$$X = x-a \qquad (\text{donc } x = X+a)$$

Moyennant ce changement de variable, l'énoncé de l'exo se réécrit :

$$\lim_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{\sin(x-a)} = \lim_{X\to 0} \frac{(X+a)^a-a^{X+a}}{\sin(X)}$$

On a déjà : $\sin(X) \sim_0 X \qquad (\spadesuit)$

Par ailleurs, en prévoyant quelques aspirines pour la route :

$$\begin{aligned}
(X+a)^a-a^{X+a} &= \mathrm{e}^{a\ln(X+a)}-\mathrm{e}^{(X+a)\ln(a)} \\
&= \mathrm{e}^{a\ln\left(a\left(1+\frac{X}{a}\right)\right)}-\mathrm{e}^{X\ln(a)}\mathrm{e}^{a\ln(a)} \\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)+a\ln\left(1+\frac{X}{a}\right)}-\mathrm{e}^{X\ln(a)}\mathrm{e}^{a\ln(a)} \\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)}\mathrm{e}^{a\ln\left(1+\frac{X}{a}\right)}-\mathrm{e}^{X\ln(a)}\mathrm{e}^{a\ln(a)} \\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)}\left[\mathrm{e}^{a\ln\left(1+\frac{X}{a}\right)}-\mathrm{e}^{X\ln(a)}\right] \\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)}\left[\mathrm{e}^{a\frac{X}{a}+o_0(X)}-\mathrm{e}^{X\ln(a)}\right] \\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)}\left[1+X+o_0(X)-1-X\ln(a)-o_0(x)\right] \\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)}\left[X(1-\ln(a))+o_0(x)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi : $(X+a)^a - a^{X+a} \sim_0 a^a X(1-\ln(a))$ $\quad(\clubsuit)$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $\dfrac{(X+a)^a - a^{X+a}}{\sin(X)} \sim_0 a^a(1-\ln(a))$.

Par suite : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\sin(x-a)} = a^a(1-\ln(a))$

Exercice 3. — **(Tangentes et positions relatives)** Soit f une fonction définie au voisinage de 0, ayant comme DL : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$. Alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente T au point d'abscisse 0 d'équation $y = a_0 + a_1 x$. La position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T est donnée **au voisinage de** 0 par le signe du premier terme non nul de degré $\geqslant 2$
A vous de jouer : dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abcisse 0, et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T au voisinage de 0 :

1/ $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$

Soit x un réel. On a : $f(x) = (2x+1)\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$.

D'où : $f(x) = 2x + 1 + 2x^2 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + 3x + \dfrac{5x^2}{2} + o(x^2)$.

On en déduit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = 1 + 3x$; au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette tangente (signe de $5x^2/2$).

2/ $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+x}$

Soit x un réel tel que $|x| < 1$. On a : $f(x) = \sin(x) \times \dfrac{1}{1+x}$.

Ainsi : $f(x) = \big(x + o(x^2)\big) \times \big(1 - x + x^2 + o(x^2)\big)$. $\qquad$ Donc : $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$.

On en déduit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = x$; au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous de cette tangente (signe de $-x^2$).

3/ $f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right)\sqrt{1+2x}$

Soit x un réel tel que $|x| < 1/2$.

D'une part : $\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{1/2} = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

D'autre part : $\ln\left(1 + x + x^2\right) = (x + x^2) - \dfrac{\left(x+x^2\right)^2}{2} + o(x^2) = x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

Donc : $f(x) = \left(1 + x - \dfrac{x^2}{2}\right)\left(x + \dfrac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = x + \dfrac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2)$

Soit : $f(x) = x + \dfrac{3x^2}{2} + o(x^2)$
On en déduit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = x$; au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette tangente (signe de $3x^2/2$).

Exercice 4. — **(DL et asymptotes)** Par le biais du changement de variable "$X = 1/x$" dans les DL usuels, on peut obtenir des "DL en $+\infty$", appelés développements asymptotiques, permettant d'obtenir entre autres des équations d'asymptotes et des positions relatives au voisinage de $+\infty$.

Par exemple : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{x^2+x+1} = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit que la courbe représentant $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + 1/2$, et que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de celle-ci **au voisinage de** $+\infty$.

A vous de jouer ; dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de l'asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$, et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote :

1/ $f(x) = x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Soit x un réel strictement positif.

On a : $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

D'où : $x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3x} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

On en déduit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$; au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette asymptote (signe de $\dfrac{1}{3x}$).

2/ $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$

Soit x un réel strictement positif.

On a : $\sqrt{x^2+2x+2} = x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}$.

Or : $\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = 1 + \dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{2} - \dfrac{\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)^2}{8} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$\Longrightarrow \sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$\Longrightarrow \sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

On en déduit que :

$$\sqrt{x^2+2x+2} = x + 1 + \frac{1}{2x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)$$

Subséquemment, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x+1$; au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette asymptote (signe de $\dfrac{1}{2x}$).

Exercice 5. — 1/ Soit a un réel > 0. Justifier que : $a^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n}\ln(a) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $a^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a)}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln(a)$, on en déduit que : $a^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n}\ln(a) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2/ $(*)$ Etablir que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \dfrac{8}{9}$

Soit n un entier naturel non nul.

On a : $\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(u_n)}$ en ayant posé : $u_n = 3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}$.

D'après la question précédente :

$$u_n = 3\left(1+\frac{1}{n}\ln(2) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\left(1+\frac{1}{n}\ln(3)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

soit : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}\left(3\ln(2) - 2\ln(3)\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{8}{9}\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

On en déduit que : $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{8}{9}\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

Par suite : $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{8}{9}\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc : $\ln(u_n) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$.

Donc : $n\ln(u_n) \sim_{+\infty} \ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$. En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\ln(u_n)} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{8}{9}\right)}$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \dfrac{8}{9}$

Exercice 6. — $^{(}*)$ Soit n un entier naturel quelconque, et f la fonction définie sur $]-1;1[$ par :

$$f : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ en 0 de f.

Soit n un entier naturel quelconque, et x un réel de $]-1;1[$.

On a : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$.

D'après le formulaire : $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o\left(x^{2n+2}\right)$ et $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{x^k}{k} + o\left(x^{2n+2}\right)$.

On en déduit que : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{x^k}{k}\right) + o\left(x^{2n+2}\right)$

D'où : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2}\left((-1)^{k+1}+1\right)\frac{x^k}{k} + o\left(x^{2n+2}\right)$

Donc : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$

Exercice 7. —

1) $f(x) = x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)$

2) $f(x) = 4x - \dfrac{32}{3}\,x^3 + o\left(x^4\right)$

3) $f(x) = x - \dfrac{2}{3}\,x^3 + o\left(x^3\right)$

4) $f(x) = 3x - 9x^3 + o\left(x^4\right)$

5) $f(x) = x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)$

6) $f(x) = 1 + x^3 + \dfrac{x^6}{2} + o\left(x^8\right)$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{9}\,x - \dfrac{\sqrt{3}}{18}\,x^2 + o\left(x^2\right)$

8) $f(x) = 1 + \dfrac{3}{2}\,x + \dfrac{3}{8}\,x^2 + o\left(x^2\right)$

9) $f(x) = x + \dfrac{1}{3}\,x^3 + \dfrac{2}{15}\,x^5 + \dfrac{17}{315}\,x^7 + o\left(x^7\right)$

10) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{12}\,x - \dfrac{1}{288}\,x^2 + o\left(x^2\right)$

11) $f(x) = -x + \dfrac{3}{2}\,x^2 - \dfrac{1}{3}\,x^3 + o\left(x^3\right)$

12) $f(x) = x + \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{5}{6}\,x^3 + o\left(x^3\right)$

13) $f(x) = \mathrm{e} - \mathrm{e}\,x^2 + \dfrac{\mathrm{e}}{2}\,x^4 - \dfrac{\mathrm{e}}{6}\,x^6 + o\left(x^6\right)$

14) $f(x) = 1 + x - \dfrac{2}{3}\,x^3 + o\left(x^3\right)$

15) $f(x) = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 x - \dfrac{\mathrm{e}^2}{3}\,x^3 - \dfrac{\mathrm{e}^2}{6}\,x^4 + o\left(x^4\right)$

16) $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{1}{3}\,x^3 + \dfrac{5}{24}\,x^4 + o\left(x^4\right)$

17) $f(x) = \mathrm{e} + \dfrac{\mathrm{e}}{2}\,x + o\left(x^2\right)$

18) $f(x) = \ln 2 + \dfrac{\alpha+\beta}{2}\,x + \dfrac{(\alpha-\beta)^2}{8}\,x^2 + o\left(x^2\right)$

19) $f(x) = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\,x - \dfrac{5\sqrt{2}}{128}\,x^2 + o\left(x^2\right)$

20) $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{36}\,x^2 + o\left(x^2\right)$

21) $f(x) = -2x^2 - 7x^3 + o\left(x^3\right)$

22) $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{1}{6}\,x^3 + o\left(x^3\right)$

23) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{5}{24}\,x^2 + o\left(x^3\right)$

24) $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15}\,x^2 + o\left(x^3\right)$

25) $f(x) = -\dfrac{1}{6}\,x^2 + o\left(x^3\right)$

26) $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{4}\,x^2 + \dfrac{1}{12}\,x^3 + o\left(x^3\right)$

27) $f(x) = 2x + \dfrac{2}{3}\,x^3 + o\left(x^4\right)$

28) $f(x) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{8}\,x^2 + o\left(x^3\right)$

29) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{12}\,x^3 + o\left(x^4\right)$

30) $f(x) = x + \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{1}{3}\,x^3 + o\left(x^4\right)$

31) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,x^2 - \dfrac{1}{12}\,x^3 + o\left(x^3\right)$

32) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \dfrac{1}{2}\,x^2 - \dfrac{1}{6}\,x^3 + \dfrac{1}{24}\,x^4\right) + o\left(x^4\right)$

33) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\,x^4 + o\left(x^7\right)$

34) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{5}{24}\,x^4 + o\left(x^5\right)$

35) $f(x) = 1 + \dfrac{4}{3}\,x + \dfrac{11}{9}\,x^2 + \dfrac{104}{81}\,x^3 + o\left(x^3\right)$

36) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{6}\,x^2 + \dfrac{7}{360}\,x^4 + o\left(x^5\right)$

37) $f(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o\left(x^7\right)$

38) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}}\left(1 - \dfrac{1}{12}\,x^2\right) + o\left(x^3\right)$

39) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{2}\,x^2 + \dfrac{7}{8}\,x^4 - \dfrac{61}{240}\,x^6 + o\left(x^7\right)$

40) $f(x) = x^2 - \dfrac{5}{6}\,x^4 + \dfrac{32}{45}\,x^6 - \dfrac{173}{252}\,x^8 + o\left(x^9\right)$

41) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{8}\,x^4 + o\left(x^5\right)$

42) $f(x) = \mathrm{e}\left(1 - \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{11}{24}\,x^2\right) + o\left(x^2\right)$

43) $f(x) = \mathrm{e}\left(1 + (x-1) + \dfrac{1}{2}\,(x-1)^2\right) + o\left((x-1)^2\right)$

44) $f(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2}\,(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}\,(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)$

45) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\,(x-1) - \dfrac{1}{8}\,(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$

46) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{4}\,(x-4) - \dfrac{1}{64}\,(x-4)^2 + o\left((x-4)^2\right)$

47) $f(x) = -(x-\pi) + \dfrac{1}{6}\,(x-\pi)^3 + o\left((x-\pi)^4\right)$

48) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\,(x-\pi/2)^2 + o\left((x-\pi/2)^3\right)$

49) $f(x) = -(x-\pi/2) - \dfrac{1}{6}\,(x-\pi/2)^3 + o\left((x-\pi/2)^4\right)$

50) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,(x-\pi/3) - \dfrac{1}{4}\,(x-\pi/3)^2 + o\left((x-\pi/3)^2\right)$

51) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{120}\dfrac{1}{x^5} + o\left(\dfrac{1}{x^6}\right)$

52) $f(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{7}{90}\dfrac{1}{x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^5}\right)$

53) $f(x) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{4}\,(x-\pi/3) - \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\,(x-\pi/3)^2 + \dfrac{3}{16}\,(x-\pi/3)^3 + o\left((x-\pi/3)^3\right)$

54) $f(x) = 1 + 2\,(x-\pi/4) + 2\,(x-\pi/4)^2 + \dfrac{8}{3}\,(x-\pi/4)^3 + o\left((x-\pi/4)^3\right)$

55) $f(x) = 1 + (x-\pi/4) + \dfrac{1}{2}\,(x-\pi/4)^2 + o\left((x-\pi/4)^2\right)$

56) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\,(x-2) + \dfrac{1}{8}\,(x-2)^2 - \dfrac{1}{16}\,(x-2)^3 + \dfrac{1}{32}\,(x-2)^4 + o\left((x-2)^4\right)$

57) $f(x) = x - x^3 + x^5 + o\left(x^6\right)$