Exercices 18 — DL et équivalents

Exercice 1. — Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des expressions suivantes :

1/ $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
2/ $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$ (avec $a = 0$ et $n = 8$)
3/ $f(x) = (1+x)^{3/2}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
4/ $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
5/ $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
6/ $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$ (avec $a = 0$ et $n = 6$)
7/ $f(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{2x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
8/ $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
9/ $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
10/ $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)

Exercice 2. — **(DL, équivalents et limites)**. On peut lever des indéterminations en effectuant un DL en 0 à un ordre judicieusement choisi, et/ou à l'aide d'un équivalent.

Exemples : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ (DL à l'ordre 1 en 0 de sin) ; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$ (DL à l'ordre 3 en 0 de sin)

A vous de jouer :

1/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)}{3x}$
2/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln((1+x)(1+2x))}{x}$
3/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2+2x}$
4/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2(x)}$
5/ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2x^2 - x + 1\right)\sin\left(\dfrac{1}{\pi\, x^2}\right)$
6/ $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{3\sqrt{n} + \sqrt[3]{n+\sqrt{n}}}{2\sqrt{n} + \ln(n+1) + \mathrm{e}^{-n}}$
7/ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)}$ avec $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$
8/ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{\sin(x-a)}$ où a est un réel > 0 arbitraire

Exercice 3. — **(Tangentes et positions relatives)** Soit f une fonction définie au voisinage de 0, ayant comme DL : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$. Alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente T au point d'abscisse 0 d'équation $y = a_0 + a_1 x$. La position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T est donnée **au voisinage de** 0 par le signe du premier terme non nul de degré $\geqslant 2$

Exemples : la courbe représentative C_1 de la fonction exponentielle admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = 1 + x$; au voisinage de 0, C_1 est située au-dessus de cette tangente (signe de $x^2/2!$).

La courbe représentative C_2 de la fonction sinus admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = x$; au voisinage de 0, C_2 est située au-dessus à gauche de 0, et en dessous à droite de 0 (signe de $-x^3/3!$).

A vous de jouer : dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abcisse 0, et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T au voisinage de 0 :

1/ $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$
2/ $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+x}$
3/ $f(x) = \ln\left(1+x+x^2\right)\sqrt{1+2x}$

Exercice 4. — **(DL et asymptotes)** Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de l'asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$, et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote :

1/ $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
2/ $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$

Exercice 5. — 1/ Soit a un réel > 0. Justifier que : $a^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n}\ln(a) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

2/ $(*)$ Etablir que : $\lim\limits_{n\to +\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \dfrac{8}{9}$

Exercice 6. — $(*)$ Soit n un entier naturel quelconque, et f la fonction définie sur $]-1;1[$ par :

$$f : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ en 0 de f.

Exercice 7. — Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des expressions suivantes :

1) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ (avec $a=0$ et $n=4$)
2) $f(x) = \sin(4x)$ (avec $a=0$ et $n=4$)
3) $f(x) = \sin x \cos x$ (avec $a=0$ et $n=3$)
4) $f(x) = \arctan(3x)$ (avec $a=0$ et $n=4$)
5) $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$ (avec $a=0$ et $n=4$)
6) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$ (avec $a=0$ et $n=8$)
7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}$ (avec $a=0$ et $n=2$)
8) $f(x) = (1+x)^{3/2}$ (avec $a=0$ et $n=2$)
9) $f(x) = \tan x$ (avec $a=0$ et $n=7$)
10) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$ (avec $a=0$ et $n=2$)
11) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ (avec $a=0$ et $n=3$)
12) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ (avec $a=0$ et $n=3$)
13) $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$ (avec $a=0$ et $n=6$)
14) $f(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{2x}$ (avec $a=0$ et $n=3$)
15) $f(x) = \mathrm{e}^{2+x}\cos x$ (avec $a=0$ et $n=4$)
16) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{sh}\, x}$ (avec $a=0$ et $n=4$)
17) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$ (avec $a=0$ et $n=2$)
18) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\alpha x}+\mathrm{e}^{\beta x}\right)$ (avec $a=0$ et $n=2$, α et β réels non-nuls)
19) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ (avec $a=0$ et $n=2$)
20) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ (avec $a=0$ et $n=3$)
21) $f(x) = \sin\left(2x-4x^2\right) - 2\sin\left(x-x^2\right)$ (avec $a=0$ et $n=3$)
22) $f(x) = \ln(1+\sin x)$ (avec $a=0$ et $n=3$)
23) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$ (avec $a=0$ et $n=2$)
24) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\arcsin^2 x}$ (avec $a=0$ et $n=3$)
25) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ (avec $a=0$ et $n=3$)
26) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ (avec $a=0$ et $n=3$)
27) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (avec $a=0$ et $n=4$)
28) $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$ (avec $a=0$ et $n=3$)
29) $f(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ (avec $a=0$ et $n=4$)
30) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ (avec $a=0$ et $n=4$)
31) $f(x) = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (avec $a=0$ et $n=3$)
32) $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ (avec $a=0$ et $n=4$)
33) $f(x) = \mathrm{ch}\left(x^2\right)$ (avec $a=0$ et $n=6$)
34) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$ (avec $a=0$ et $n=4$)
35) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{1-x}$ (avec $a=0$ et $n=3$)
36) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ (avec $a=0$ et $n=4$)
37) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2-x^3}$ (avec $a=0$ et $n=7$)
38) $f(x) = (\mathrm{ch}\, x)^{1/x^2}$ (avec $a=0$ et $n=2$)
39) $f(x) = \cos^3 x$ (avec $a=0$ et $n=7$)
40) $f(x) = \ln\left(1+\sin^2 x\right)$ (avec $a=0$ et $n=8$)
41) $f(x) = \mathrm{ch}(1-\cos x)$ (avec $a=0$ et $n=5$)
42) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ (avec $a=0$ et $n=2$)
43) $f(x) = \mathrm{e}^x$ (avec $a=1$ et $n=2$)
44) $f(x) = \ln x$ (avec $a=1$ et $n=3$)
45) $f(x) = \sqrt{x}$ (avec $a=1$ et $n=2$)
46) $f(x) = \sqrt{x}$ (avec $a=4$ et $n=2$)
47) $f(x) = \sin x$ (avec $a=\pi$ et $n=3$)
48) $f(x) = \sin x$ (avec $a=\dfrac{\pi}{2}$ et $n=3$)
49) $f(x) = \cos x$ (avec $a=\dfrac{\pi}{2}$ et $n=4$)
50) $f(x) = \cos x$ (avec $a=\dfrac{\pi}{3}$ et $n=2$)
51) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (avec $a=+\infty$ et $n=5$)
52) $f(x) = \ln\left(x\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ (avec $a=+\infty$ et $n=4$)
53) $f(x) = \arctan(2\sin x)$ (avec $a=\dfrac{\pi}{3}$ et $n=3$)
54) $f(x) = \tan x$ (avec $a=\dfrac{\pi}{4}$ et $n=3$)
55) $f(x) = \sqrt{\tan x}$ (avec $a=\dfrac{\pi}{4}$ et $n=3$)
56) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (avec $a=2$ et $n=4$)
57) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\mathrm{d}t$ (avec $a=0$ et $n=5$)