MPSI – Colle 20 (du 17 au 21 mars 2025) : Analyse asymptotique - Développements limités

Chapitre 18 : Analyse asymptotique

1 – Négligeabilité

Définition. Une fonction f est **négligeable devant** g **au voisinage de** a s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que : $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

Notation. On peut noter : $f = o_a(g)$, ou $f(x) = o_a(g(x))$.

Propriété. (**caractérisation de la négligeabilité**). Sous réserve que g ne s'annule pas sur un voisinage de a, on a : $f = o_a(g)$ SSI $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 0$.

Remarque. $f = o_a(1)$ SSI $\lim\limits_a f = 0$.

Autres propriétés : **négligeabilité et opérations algébriques, transitivité de la négligeabilité**.

➤ **Echelle de négligeabilité en** $+\infty$

$$\mathrm{e}^{-x} \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll x \ll x^2 \ll \mathrm{e}^x$$

➤ **Synthèse — Echelle de négligeabilité en** 0^+

$$x^2 \ll x \ll \sqrt{x} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll \ln x \ll \frac{1}{\sqrt{x}} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{x^2}$$

2 – Domination (pas encore vue en cours)

Définition. Une fonction f est **dominée par** g **au voisinage de** a s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tel que sur un voisinage de a on ait : $|f(x)| \leqslant M\,|g(x)|$.

Notation. On note : $f = O_a(g)$, ou $f(x) = O_a(g(x))$.

Propriété. (**caractérisation de la domination**). Sous réserve que g ne s'annule pas sur un voisinage de a, on a : $f = O_a(g)$ SSI $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

3 – Equivalents

Définition. Deux fonctions f et g sont **équivalentes au voisinage de** a s'il existe une fonction φ définie au voisinage de a telle que : $f(x) = g(x)\varphi(x)$.

Notation. On note : $f \sim_a g$, ou $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$.

Propriété. (**caractérisation de l'équivalence**). Sous réserve que g ne s'annule pas sur un voisinage de a, on a : $f \sim_a g$ SSI $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 1$.

Propriété. $f \sim_a g$ SSI $f = g + o_a(g)$.

Propriété. (**équivalents et opérations algébriques**).

1) Si $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$ alors : $f_1 g_1 \sim_a f_2 g_2$

2) Si $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{g_1} \sim_a \dfrac{f_2}{g_2}$ (sous réserve...)

Remarque : en revanche, on ne peut pas sommer les équivalents !

Extrêmement utile en pratique :

Propriété essentielle. Si $f \sim_a g$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ ou $\in \mathbb{C}$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = \ell$

4 – Développements limités

A – Généralités

Définition. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert non-vide, soit $a \in I$ et soit n un entier naturel. La fonction f admet un **développement limité à l'ordre** n **au voisinage de** a s'il existe $(n+1)$ scalaires $a_0, a_1 \ldots, a_n$ tels que :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k\right] + o\left((x-a)^n\right)$$

Propriété. Si f admet un DL à l'ordre n en a, il est unique.

B – Construction

Théorème (Formule de Taylor-Young) : si $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, alors f admet un DL à l'ordre n en a, explicitement :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + o\left((x-a)^n\right)$$

En particulier lorsque $a = 0$:

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] + o\left(x^n\right)$$

Application : début du formulaire des DL usuels (exp, cos, sin, ch, sh, $1/(1-x)$, $(1+x)^\alpha$).

C – DL et opérations algébriques

Régles donnant le DL d'une somme, d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'une composée et d'une primitive.

Application : fin du formulaire des DL usuels ($\ln(1+x)$, arctan, arccos, arcsin).

D – Quelques applications des DL

Calculs de limites, d'équivalents, de tangentes (et positions relatives locales), d'asymptotes (et positions relatives locales).

Questions de cours

- $f = o_a(g) \iff \lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 0$
- $f \sim_a g \iff \lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 1$
- $f \sim_a g \iff f = g + o_a(g)$
- **Formule de Taylor-Young.**

  (en admettant : “$\displaystyle\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\,\mathrm{d}t = o_a\left((x-a)^{n+1}\right)$”).

- **Application de la formule de Taylor 1**. DL en 0 à l'ordre $2n$ de cos.
- **Application de la formule de Taylor 2**. DL en 0 à l'ordre n de $f : x \longmapsto 1/(1-x)$. Conséquence : DL en 0 à l'ordre $(2n+1)$ de la fonction arctangente.