Exercices 19 — Polynômes

Partie 1 - Degré, coefficient dominant, division euclidienne.

Exercice 1. — (Degré et coefficient dominant)

1/ Calculer le degré et le coefficient dominant de $P = (1+X)^2 + (1-X)^2$

2/ Calculer le degré et le coefficient dominant de $P = (1+X)^3 + (1-X)^3$

3/ Soit n un entier naturel non nul. Calculer le degré et le coefficient dominant de $P = (1+X)^n + (1-X)^n$

Exercice 2. — (Utilisation du degré) Soit n un entier naturel.

Prouver qu'il n'existe aucun polynôme P tel que : $P^2 = X\left(X^{2n}+1\right)$

Exercice 3. — Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solutions de l'équation :

$$\text{(E)} \qquad P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right)P(X)$$

Exercice 4. — (Utilisation du degré et du coefficient dominant) Déterminer tous les polynômes P tels que : $P^2 = 4P$

Exercice 5. — (Utilisation du degré et du coefficient dominant) Déterminer tous les polynômes P tels que

$$P^3 = X^2P$$

Exercice 6. — (Division euclidienne). Effectuer la division euclidienne de $A = 5X+7$ par $B = X^3+2$, puis celle de B par A.

Exercice 7. — (Division euclidienne). Effectuer la division euclidienne de $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ par $B = X^2 - 3X + 1$.

Exercice 8. — (Division euclidienne). A quelle condition le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 9. — (Inversibles de $\mathbb{K}[X]$) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Déterminer $\mathbb{K}[X]^*$.

Seconde formulation. Quels sont les polynômes de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ inversibles pour la multiplication ?

Troisième formulation. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ pour lesquels il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PQ = 1$.

Exercice 10. — (Utilisation du coefficient dominant) Déterminer tous les polynômes P tels que

$$P = XP'$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

Partie 2 - Division euclidienne, utilisation des racines.

Exercice 11. — (Division euclidienne) Le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $(X-2)$ est 3 et par $(X+2)$ est 2. Quel est le reste de la division euclidienne de P par (X^2-4) ?

Exercice 12. — (Division euclidienne). Soient α et β deux éléments distincts de $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $Q = (X-\alpha)(X-\beta)$.

Exercice 13. — (Division euclidienne, bis). Soit α un élément de $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $Q = (X - \alpha)^2$.

Exercice 14. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $B = X^2 - 3X + 2$.

Exercice 15. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$.

Etablir que pour tout entier naturel N, la matrice A^N est combinaison linéaire de A et de I_n (c'est à dire qu'il existe deux scalaires a_N et b_N tels que : $A^N = a_N A + b_N \mathrm{I}_n$).

Exercice 16. — Soit n un entier naturel. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^3 - 10X^2 + 16X$.

Exercice 17. — Soient m, n et p trois entiers naturels, et θ un nombre réel. Vérifier dans chacun des cas suivants que le polynôme A divise le polynôme B :

1/ $A = 2X^3 - 3X^2 + X$ et $B = (X-1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$.

2/ $A = X^2 + X + 1$ et $B = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$.

3/ $A = X^2 - 2X\cos\theta + 1$ et $B = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$ avec $\theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$. [1]

Exercice 18. — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Etablir que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\bar{\alpha}$ est racine de P.

Exercice 19. — Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme : $P = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4$ après avoir calculé $P(1+i)$.

Exercice 20. — Factoriser le polynôme $P = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 3$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Indication : on pourra calculer $P(\mathrm{i})$.

Exercice 21. — Etablir qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, que l'on déterminera, tel que :

$$P(-1) = 1\,; \qquad P(0) = -2 \qquad \text{et } P(2) = 1$$

Exercice 22. — Soient α_1, α_2, α_3 et α_4 quatre réels, deux à deux distincts.

Etablir que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ P &\longmapsto (P(\alpha_1), P(\alpha_2), P(\alpha_3), P(\alpha_4)) \end{aligned}$$

est bijective.

Exercice 23. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^2 - 5A + 6\mathrm{I}_n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$.

Etablir que pour tout entier naturel N, il existe deux scalaires a_N et b_N tels que : $A^N = a_N A + b_N \mathrm{I}_n$.

Exercice 24. — Soit z un nombre complexe.

Etablir que le polynôme $P = (X - z)(X - \overline{z})$ est à coefficients réels.

Exercice 25. — Factoriser le polynôme $P = X^3 - 1$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

---

1. Càd que θ est un réel non multiple de π.

Exercice 26. — Factoriser le polynôme $P = X^6 - 1$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 27. — Soient n un entier naturel $\geqslant 2$ et α_0, α_1,… α_n $(n+1)$ réels, deux à deux distincts. Etablir que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

est bijective.

Exercice 28. — Factoriser le polynôme $P = X^4 + 1$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 29. — Factoriser le polynôme $P = X^4 - X^2 + 2X - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie 3 - Multiplicité d'une racine, polynômes interpolateurs.

Exercice 30. — Démontrer la **formule de Taylor pour les polynômes** : pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Exercice 31. — Le but de cet exercice est de mettre en exergue une propriété des polynômes de Lagrange.

On considère les 3 réels : $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 2$.

On définit L_0, L_1 et L_2 comme les 3 polynômes de Lagrange associés aux réels -1, 1 et 2.

1/ Par définition, L_0, L_1 et L_2 appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$; pour quelle valeur de n ? [2]

2/ Déterminer les expressions des polynômes de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés aux trois réels -1, 1 et 2.

3/ **Trois exemples pour commencer à comprendre**.

a/ On pose $Q = L_0 + L_1 + L_2$. Calculer explicitement le polynôme Q (c'est-à-dire déterminer explicitement ses coefficients).

b/ On pose $R = -L_0 + L_1 + 2L_2$. Calculer explicitement le polynôme R.

c/ On pose $S = L_0 + L_1 + 4L_2$. Calculer explicitement le polynôme S.

4/ **Généralisation**.

a/ Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On pose $P_1 = P(-1)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$. A la lumière des exemples ci-dessus, que peut-on dire des polynômes P et P_1 ?

b/ Justifier la réponse à la question précédente.

2. Sous-entendu : quelle est la **plus petite valeur** de n qui convient.

Exercice 32. — On pose $P = X^4 - 2X^2 + 3X + 5 \in \mathbb{R}_4[X]$.

On considère par ailleurs les 5 polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2, L_3 et L_4 associés aux réels 0, 1, 2, 3 et 4.

Les deux questions sont indépendantes.

1/ Exprimer P en fonction de L_0, L_1, L_2, L_3 et L_4.

2/ Exprimer P en fonction de 1, $(X+1)$, $(X+1)^2$, $(X+1)^3$ et $(X+1)^4$.

Exercice 33. — Soit $n \in N^*$. On considère $(n+1)$ scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts, et $L_0, \ldots, L_n$ les $(n+1)$ polynômes de Lagrange (de $\mathbb{K}_n[X]$) associés à $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Les deux questions sont indépendantes.

1/ On pose : $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k$. Montrer que $P = Q$.

2/ Exprimer P en fonction de 1, $(X+1), \ldots, (X+1)^n$.

Exercice 34. — Etablir que 1 est racine de multiplicité 4 de $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$.

Exercice 35. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer a et b pour que $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 36. — Soit $n \in N$, $n \geqslant 3$. Montrer que le polynôme $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ est divisible par $(X-1)^3$, mais n'est pas divisible par $(X-1)^4$.

Exercice 37. — Déterminer la valeur de m pour que 1 soit racine double[3] du polynôme $P_m = X^3 - 3X + m$.

Exercice 38. — Déterminer les racines (dans $\mathbb{C}$) du polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k \right]$ ainsi que leurs multiplicités.

Partie 4 - Multiplicité d'une racine (bis), polynômes irréductibles.

Exercice 39. — Etablir que le polynôme $X^2 - 4X + 3$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 40. — Etablir que le polynôme $X^2 - 3X + 4$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 41. — Décomposer en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants[4] :

$$P_1(X) = X^4 - 16 \qquad P_2(X) = X^3 - 8 \qquad P_3(X) = X^3 + X^2 + X + 1$$

3. Càd de multiplicité exactement 2.

4. Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont exactement ceux de degré 1. Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont exactement ceux de degré 1, et ceux de degré 2 sans racine réelle ("avec un $\Delta < 0$").

Exercice 42. — Dans $\mathbb{R}_6[X]$, on considère l'ensemble E des polynômes P admettant 1 comme racine de multiplicité au moins 3.

1/ Par définition, que signifie l'assertion "P admet 1 comme racine de multiplicité au moins 3" ?

2/ Montrer qu'il existe quatre polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 à coefficients réels tel que :

$$\forall\ P \in\ E,\ \exists\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in\ \mathbb{R}^4,\ P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4.$$

Exercice 43. — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $P\,(a) > 0$ et : $\forall\ k \in \mathbb{N}^*, \quad P\,(k)\,(a) \geqslant 0$. Etablir que : $\forall\ x \geqslant a, \quad P\,(x) > 0$.

Exercice 44. — On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de f est $f^{(n)} : x \in \mathbb{R} \longmapsto P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, avec P_n polynôme à coefficients réels. Calculer P_0, P_1 et P_2.
2) Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $P_{n+1}\,(x) = 2xP_n\,(x) + 2nP_{n-1}\,(x) = 0$.

   On pourra utiliser le fait que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2xf(x)$.

Exercice 45. — **(Décomposition en irréductibles)**.

Décomposer en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

1/ $P = X^4 - X$ 2/ $Q = X^6 + X^4 + X^2 + 1$

Exercice 46. — **(Multiplicité, décomposition en irréductibles, $\mathbb{U}_3$)**. On pose :

$$P = (X^4 - X)\,(X^2 + X + 1)$$

1/ Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$, ainsi que les multiplicités, du polynôme P.

2/ Déterminer la décomposition en irréductibles du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 47. — **(Multiplicité, $\mathbb{U}_3$)**. On pose :

$$P_1 = (X^2 + X + 1)^3\,(X - 2)\,(X^2 + 1)\,(X^3 - 1)\,; \qquad P_2 = (X^2 + X + 1)^2\,(X^3 - 1)^2\,(X^2 + 1)$$

Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$, ainsi que les multiplicités, des polynômes P_1 et P_2.

Exercice 48. — **(Un exo pas trop complexe)**. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$.

On suppose que i et j sont racines de P.

Etablir que P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 49. — **(Utilisation des racines 5-èmes de l'unité)**. On pose :

$$P = \sum_{k=0}^{4} X^k \qquad \text{càd} \qquad P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

Déterminer la décomposition en irréductibles du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie 5 - Deux exos classiques.

Exercice 50. — (A propos des polynômes de Tchebychev).

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce.*

1/ Expliciter T_2 et T_3.

2/ Pour tout entier naturel n, déterminer le degré de P et son coefficient dominant.

3/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ T_n\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta)$

4/ Soit à présent n un entier naturel non nul. Montrer que T_n admet n racines deux à deux distinctes dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 51. — (Polynômes de Tchebychev, deuxième acte).

L'objectif de cet exo est d'établir que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme T_n à coefficients réels tel que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Cet unique polynôme T_n est appelé **n-ème polynôme de Tchebychev** (de première espèce).

1/ **Unicité**. Soit n un entier naturel, et soient P et Q deux polynômes tels que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad P\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta)\ \wedge\ Q\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta)$$

Montrer que $P = Q$.

2/ **Existence et expression**. Soient n un entier naturel et θ un réel.

a/ Etablir que : $$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right)$$

b/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède que : $$T_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}\left(X^2-1\right)^k X^{n-2k}.$$