Colle 21 – Questions de cours

Question de cours 1 — **Propriété**. $\forall\,(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2,\ \deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

Preuve. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Si l'un au moins des polynômes est nul, la propriété est immédiate.

Supposons à présent P et Q non nuls, et notons :

$$P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k \text{ et } Q=\sum_{k=0}^{m}b_kX^k \text{ avec } n=\deg P,\ m=\deg Q \text{ (d'où } a_n\neq 0 \text{ et } b_m\neq 0).$$

Selon le cours : $PQ=\displaystyle\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}\right)X^k$. Ainsi : $PQ=a_nb_mX^{n+m}+\underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{n+m-1}\left(\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}\right)X^k}_{\text{degré}<n+m}$

Puisque $a_nb_m\neq 0$, on en déduit que : $\deg(PQ)=n+m$, soit : $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

Conclusion. $\forall\,(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2,\ \deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

Question de cours 2 — **Propriété**. $\forall\,(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2,\ \deg(P+Q)\leqslant\max(\deg(P),\deg(Q))$

Preuve. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Si l'un au moins des polynômes est nul, la propriété est immédiate.

Supposons à présent P et Q non nuls, et notons :

$$P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k \text{ et } Q=\sum_{k=0}^{m}b_kX^k \text{ avec } n=\deg P,\ m=\deg Q \text{ (d'où } a_n\neq 0 \text{ et } b_m\neq 0).$$

On distingue deux cas, suivant que les degrés de P et Q sont égaux ou non.

Premier cas — $\deg(P)=\deg(Q)$. Alors $n=m$, et : $P+Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\,X^k$.

Il s'ensuit que : $\deg(P+Q)\leqslant n$, soit : $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg(P),\deg(Q))$.

Second cas — $\deg(P)\neq\deg(Q)$. SNALG, on peut supposer $n>m$.

Alors : $P+Q=\underbrace{\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n}a_kX^k+\sum_{k=0}^{m}a_kX^k}_{=P}+\underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}b_kX^k}_{=Q}$.

D'où : $P+Q=a_nX^n+\underbrace{\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n-1}a_kX^k+\sum_{k=0}^{m}(a_k+b_k)\,X^k}_{\text{degré}<n}$. D'où : $\deg(P+Q)=n$

Il s'ensuit que : $\deg(P+Q)=n$. En particulier : $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg(P),\deg(Q))$.

Conclusion. $\forall\,(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2,\ \deg(P+Q)\leqslant\max(\deg(P),\deg(Q))$

Question de cours 3 — **Propriété**. Deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont associés SSI il existe un scalaire $\lambda\in\mathbb{K}^*$ tel que $Q=\lambda P$.

ET Conséquence : deux polynômes associés ont même degré.

Preuve. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ deux polynômes associés : $P|Q$ et $Q|P$.
Alors : $\exists\,(R_1,R_2)\in\mathbb{K}[X]^2,\quad Q=PR_1$ et $P=QR_2$.

On en déduit que : $Q=QR_1R_2$ d'où : $Q(1-R_1R_2)=\tilde{0}$.
L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on en déduit que $Q=\tilde{0}$ ou $1-R_1R_2=\tilde{0}$.

Premier cas — $Q=\tilde{0}$. Alors $P=\tilde{0}$, et pour tout $\lambda\in\mathbb{K}^*,\ Q=\lambda P$, wouaouh.

Second cas — $Q\neq\tilde{0}$. Alors $1-R_1R_2=\tilde{0}$, d'où : $R_1R_2=1$. On en déduit que R_1 et R_2 sont non nuls ; leurs degrés respectifs n_1 et n_2 sont donc des entiers naturels tels que : $n_1+n_2=0$.

On en déduit que : $n_1=n_2=0$. En particulier : $\exists\,\lambda\in\mathbb{K}^*,\ R_1=\lambda$. Par suite : $Q=\lambda P$.

Ainsi : P et Q associés $\Longrightarrow$ il existe un scalaire $\lambda\in\mathbb{K}^*$ tel que $Q=\lambda P$

La réciproque demande moins d'efforts : s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$, alors on a également $P = \lambda^{-1}Q$. Ces deux égalités signifient respectivement que $P|Q$ et $Q|P$: les polynômes P et Q sont donc associés.

Ainsi : P et Q associés $\Longleftarrow$ il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$

Conclusion. P et Q associés $\Longleftrightarrow$ il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$

Prouvons la **Conséquence** : deux polynômes associés ont même degré.
Soient P et Q deux polynômes associés. D'après la propriété précédente : $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ Q = \lambda P$

Par suite : $\deg Q = \deg(\lambda P) = \deg \lambda + \deg P = \deg P$. D'où la conclusion.

Question de cours 4 — **Propriété**. $\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}^*$ (l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est commutatif et intègre, mais ce n'est pas un corps).

Preuve. Soit $P \in \mathbb{K}[X]^*$. Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $PQ = 1$. Cette égalité implique que P et Q ne sont pas nuls, et leurs degrés respectifs n et m sont des entiers naturels tels que : $n + m = 0$. Il s'ensuit que $n = m = 0$.

En particulier : $\deg P = 0$. Donc : $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ P = \lambda$. D'où : $P \in \mathbb{K}^*$.

On a ainsi établi que : $P \in \mathbb{K}[X]^* \Longrightarrow P \in \mathbb{K}^*$. D'où l'inclusion : $\mathbb{K}[X]^* \subset \mathbb{K}^*$.

L'inclusion $\mathbb{K}^* \subset \mathbb{K}[X]^*$ est immédiate. **Conclusion.** $\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}^*$

Question de cours 5 — **Propriété**. L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est intègre.

Preuve. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ tels que : $PQ = \tilde{0}$. Alors : $\deg(P) + \deg(Q) = -\infty$.

On en déduit que $\deg P = -\infty$ ou $\deg Q = -\infty$, càd : $P = \tilde{0}$ ou $Q = \tilde{0}$.

On a ainsi établi que : $PQ = \tilde{0} \Longrightarrow P = \tilde{0}$ ou $Q = \tilde{0}$. **Conclusion.** L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est intègre.

Question de cours 6 — **Lemme**. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq \tilde{0}$. Il existe un unique polynôme unitaire associé à P.

Preuve. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq \tilde{0}$. Posons : $Q = \dfrac{1}{\mathrm{cd}(P)}P$. On a : $\mathrm{cd}(Q) = \dfrac{1}{\mathrm{cd}(P)}\mathrm{cd}(P) = 1$.

Le polynôme Q est donc unitaire, et associé à P ; ce qui prouve l'existence.

Prouvons l'unicité : supposons qu'il existe deux polynômes unitaires Q_1 et Q_2 associés à P. Alors Q_1 et Q_2 sont associés (par transitivité de la relation de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$).
Donc : $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ Q_2 = \lambda Q_1$. D'où : $\mathrm{cd}(Q_1) = \lambda \mathrm{cd}(Q_2)$. D'où $\lambda = 1$, puisque Q_1 et Q_2 sont unitaires. Par suite $Q_2 = Q_1$; ce qui prouve l'unicité.

Conclusion. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq \tilde{0}$. Il existe un unique polynôme unitaire associé à P.

Question de cours 7 — **Lemme**. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, le reste dans la division euclidienne du polynôme P par le polynôme $(X - \alpha)$ est le polynôme constant $\widetilde{P}(\alpha)$.
ET Conséquence : α est racine de P SSI $(X - \alpha)$ divise P.

Preuve. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

D'après le théorème de la division euclidienne : $\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2,\ P = (X - \alpha)Q + R$, avec $\deg(R) < 1$. On en déduit que R est constant : $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ R = \lambda$.

On a donc : $P = (X - \alpha)Q + \lambda$. L'évaluation en α de cette relation donne $P(\alpha) = \lambda$ et la conclusion du lemme.

Conséquence. Supposons que α soit racine de P. Alors $P(\alpha) = 0$ (par définition de racine), et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$ est nul (d'après le lemme). Il s'ensuit que $(X - \alpha)|P$.
Ainsi : $[\alpha$ racine de $P] \Longrightarrow [(X - \alpha)|P]$. La réciproque est triviale.
Conclusion. α est racine de P SSI $(X - \alpha)|P$

Banque d'exercices

Exercice 1 — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Degré et coefficient dominant de $P = (1+X)^n + (1-X)^n$

Exercice 2 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

Exercice 3 — Etablir que : $\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$ (formule de Vandermonde)

Exercice 4 — Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation (E) $\quad P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right) P(X)$

Exercice 5 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 7X + 6$.

Exercice 6 — Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^2 - 7A + 6\mathrm{I}_p = 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{K})}$.
Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1 — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Degré et coefficient dominant de $P = (1+X)^n + (1-X)^n$

Une double application du binôme de Newton donne : $P = (1+(-1)^n)X^n + n(1+(-1)^{n-1})X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k}(1+(-1)^k)X^k$

Lorsque n est pair, on a : $(1+(-1)^n) = 2$. D'où : $\deg(P) = n$ et $\mathrm{cd}(P) = 2$.

Lorsque n est impair, on a : $(1+(-1)^n) = 0$ et $n(1+(-1)^{n-1}) = 2n$. D'où : $\deg(P) = n-1$ et $\mathrm{cd}(P+Q) = 2n$.

Exercice 2 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

On rappelle que $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X],\ \deg(P) \leqslant n\}$.

Par définition $\mathbb{K}_n[X]$ est une partie de $\mathbb{K}[X]$ contenant le polynôme nul (SG1 et SG2).

En outre, si P et Q sont dans $\mathbb{K}_n[X]$, alors : $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$. D'où : $\deg(P+Q) \leqslant n$ puisque $\deg P$ et $\deg Q$ sont $\leqslant n$.

On a ainsi établi que : $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{K}_n[X] \Longrightarrow P+Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Ce qui signifie que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable pour la loi $+$ (SG3).

Enfin, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $(-P) \in \mathbb{K}_n[X]$, puisque $\deg(-P) = \deg P$. Ce qui signifie que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par passage à l'opposé (SG4).

Conclusion. $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$. En particulier, $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est un groupe abélien.

Exercice 3 — Etablir que : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$ (formule de Vandermonde)

Posons $P = (1+X)^n$ et $Q = (1+X)^m$.

On a : $PQ = (1+X)^{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} X^j$ $\quad (\spadesuit)$

Par ailleurs : $P = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j$ et $Q = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} X^j$. Selon la formule donnant le produit de deux polynômes, on en déduit :

$$PQ = \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{n}{k}\binom{m}{j-k} \right) X^j \qquad (\clubsuit)$$

Selon $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} X^j = \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{n}{k}\binom{m}{j-k} \right) X^j$

En identifiant les coefficients de X^n dans ces deux expressions, on obtient : $\binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$.

Conclusion. $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$

Exercice 4 — Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation (E) $\quad P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right)P(X)$

Le polynôme nul est solution de l'équation.

Supposons à présent P non nul, et notons $n = \deg P$.

Si P est solution de l'équation, alors : $\deg P\left(X^2\right) = \deg\left(X^2+1\right)P(X)$ soit : $2n = n+2$ d'où $n = 2$.

On cherche donc P sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.

Alors : $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right)P(X) \Longleftrightarrow aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c$.

Par identification, on en déduit que $b = 0$ et $c = -a$.

Donc : P non nul solution $\Longrightarrow$ $\exists\, a \in \mathbb{K}^*,\ P = aX^2 - a$. La réciproque est une vérification immédiate.

Puisque le polynôme nul est également solution, on peut conclure.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{a\left(X^2-1\right),\ a \in \mathbb{K}\right\}$.

Remarque. *L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ est l'ensemble des polynômes* ***colinéaires*** *au polynôme (X^2-1). Très prochainement, nous pourrons dire que $\mathscr{S}$ est une droite vectorielle dans $\mathbb{K}[X]$, de vecteur directeur (X^2-1).*

Exercice 5 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 7X + 6$.

D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$X^n = (X^2 - 7X + 6)Q + R \text{ et } \deg(R) < 2$$

Il s'ensuit que le reste R est de degré au plus 1, et qu'il existe donc deux scalaires tels que $R = aX + b$. On a donc :

$$X^n = \left(X^2 - 7X + 6\right)Q + aX + b \qquad (\spadesuit)$$

Or : $X^2 - 7X + 6 = (X-1)(X-6)$.

Donc : $X^n = (X-1)(X-6)\,Q + aX + b$.

En évaluant en 1 et en 6 cette relation, on obtient : $\begin{cases} 1 = a + b \\ 6^n = 6a + b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{6^n - 1}{5} \\ b = \dfrac{6 - 6^n}{5} \end{cases}$

Conclusion. Le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 7X + 6$ est :

$$R = \frac{6^n - 1}{5}X + \frac{6 - 6^n}{5}$$

Exercice 6 — Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^2 - 7A + 6\mathrm{I}_p = 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{K})}$.
Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après l'exercice précédent :

$$\exists\, Q \in \mathbb{K}[X],\ X^n = (X^2 - 7X + 6)Q + \frac{6^n - 1}{5}X + \frac{6 - 6^n}{5}$$

Il s'ensuit que :

$$A^n = (A^2 - 7A + 6\mathrm{I}_p)Q(A) + \frac{6^n - 1}{5}A + \frac{6 - 6^n}{5}\mathrm{I}_p$$

Or par hypothèse : $A^2 - 7A + 6\mathrm{I}_p = 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{K})}$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = \dfrac{6^n - 1}{5}A + \dfrac{6 - 6^n}{5}\mathrm{I}_p$