Colle 22 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Théorème**. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Le scalaire α est racine de P de multiplicité au moins m SSI $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$.

Preuve.
➤ Sens direct. Supposons que α est racine de P de multiplicité au moins m. Il existe alors un polynôme Q tel que : $P = (X-\alpha)^m Q$.

Soit alors k un entier quelconque de $[\![0, m-1]\!]$. On a (via la formule de Leibniz) :

$$P^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[(X-\alpha)^m\right]^{(i)} Q^{(k-i)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-i)!} (X-\alpha)^{m-i} Q^{(k-i)}$$

En évaluant en α cette relation, on obtient : $P^{(k)}(\alpha) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-i)!} \underbrace{0^{m-i}}_{=0 \text{ car } i<m} Q^{(k-i)}(\alpha)$ d'où $P^{(k)}(\alpha) = 0$.

On a ainsi établi l'implication : [α est racine de P de multiplicité au moins m] $\Longrightarrow \left[\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P^{(k)}(\alpha) = 0\right]$.

➤ Réciproque. Supposons que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P^{(k)}(\alpha) = 0$.

D'après la formule de Taylor, on peut écrire : $P = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k}_{\text{nulle par hypothèse}} + \displaystyle\sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$.

Par suite : $P = \displaystyle\sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$ càd : $P = (X-\alpha)^m \displaystyle\sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^{\overbrace{k-m}^{\geqslant 0}}$.

Il s'ensuit que $(X-\alpha)^m | P$, ce qui signifie que α est racine de multiplicité au moins égale à m de P.

Conclusion. [α est racine de P de multiplicité au moins m] $\Longleftrightarrow \left[\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P^{(k)}(\alpha) = 0\right]$

Question de cours 2. — **Théorème (nombre maximal de racines d'un polynôme)** : si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $(n+1)$ racines distinctes, alors $P = \tilde{0}$
ET Corollaire (principe du prolongement algébrique) : soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$. S'il existe $(n+1)$ scalaires (càd des éléments de $\mathbb{K}$) $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ distincts tels que : $\forall i \in [\![1, n+1]\!], P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

Preuve du théorème. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P possède $(n+1)$ racines 2 à 2 distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. Alors P est divisible par $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} (X-\alpha_i)$. Il existe donc un polynôme Q tel que : $P = Q \times \displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} (X-\alpha_i)$.

Si Q est non nul, alors : $\deg\left(Q \times \displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} (X-\alpha_i)\right) \geqslant n+1$, et par suite : $\deg\left(Q \times \displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} (X-\alpha_i)\right) > \deg(P)$. Contradiction.

Il s'ensuit que Q est nul, ce qui implique que P l'est.

Conclusion. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $(n+1)$ racines 2 à 2 distinctes, alors $P = \tilde{0}$.

Preuve du corollaire. Soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$. Supposons qu'il existe $(n+1)$ scalaires $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ 2 à 2 distincts tels que : $\forall i \in [\![1, n+1]\!], P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$.

On pose judicieusement : $R = P - Q$. Le polynôme R est de degré au plus n (puisque P et Q le sont), et possède $(n+1)$ racines 2 à 2 distinctes par hypothèse. D'après le théorème précédent, $R = 0$, d'où $P = Q$.

Conclusion. Soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$. S'il existe $(n+1)$ scalaires $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ deux à deux distincts tels que : $\forall i \in [\![1, n+1]\!], P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

Question de cours 3. — **Formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$ (en α)** : soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons : $A(n)$: "pour $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$"

➤ Initialisation ($n=0$) : pour un polynôme de degré 0, càd constant (non nul), on a $P = P(\alpha)$ pour tout scalaire α, ce qui établit l'initialisation.

➤ Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n pour un certain entier naturel n. Soit P un polynôme de degré $n+1$. Alors P' étant de degré n, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour écrire :

$$P' = \sum_{k=0}^{n} \frac{P'^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k \text{ soit : } P' = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

On en déduit (par intégration formelle) :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ P = \lambda + \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(X-\alpha)^{k+1}$$

Puis, par changement d'indice dans la somme :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ P = \lambda + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

Il reste à observer que $P(\alpha) = \lambda$ (en évaluant en α l'égalité précédente) pour obtenir :

$$P = P(\alpha) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k \quad \text{puis} \quad P = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

La dernière égalité obtenue signifie que la propriété $A(n+1)$ est vraie, ce qui prouve l'hérédité et achève cette récurrence.

Conclusion : $\forall\, P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$

Question de cours 4. — **Propriété**. Dans $\mathbb{K}[X]$ les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

Preuve. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, avec $\deg(P) = 1$, et soit D un diviseur de P. Il existe alors $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $DQ = P$. En comparant les degrés des deux termes de cette égalité, on obtient $\deg(D) = 0$ ou $\deg(D) = 1$.
Si $\deg(D) = 0$, alors D est un polynôme constant non nul : $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ D = \lambda$ (et D est donc associé à 1).
Et lorsque $\deg(D) = 1$, on a $\deg(Q) = 0$, donc $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ Q = \lambda$, d'où $D = (1/\lambda)P$ (et D est donc associé à P).

En résumé, les diviseurs associés à P sont les polynômes associés à 1, et ceux associés à P. Donc P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. **Conclusion**. Tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ (pour tout corps $\mathbb{K}$).

Question de cours 5. — **Théorème**. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement ceux de degré 1.

Preuve. Tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ (pour tout corps $\mathbb{K}$).

Montrons que la réciproque est vraie dans $\mathbb{C}[X]$, càd que tout polynôme irréductible à coefficients complexes est de degré 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme irréductible. Par définition, P est non constant, et donc $\deg(P) \geqslant 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\deg(P) \geqslant 2$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet (au moins) une racine dans $\mathbb{C}$; notons la α. Alors $Q = (X-\alpha)$ est un diviseur de P dans $\mathbb{C}[X]$, qui n'est associé ni à 1, ni à P (puisque $\deg(Q) \neq 0$ et $\neq \deg(P)$) : contradiction.

Il s'ensuit que tout polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X]$ est de degré 1.

Conclusion. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement ceux de degré 1.

Question de cours 6. — **Propriété**. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. Alors $F \cap G$ est un sev de E.

Preuve. On vérifie les axiomes "(SEVx)".

(SEV1) F et G sont deux parties de E car F et G sont deux sev de E, donc $(F \cap G) \subset E$.
(SEV2) $\overrightarrow{0}_E \in F$ et $\overrightarrow{0}_E \in G$ car F et G sont deux sev de E. D'où : $\overrightarrow{0}_E \in (F \cap G)$.
(SEV3) Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $(F \cap G)$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Alors : $(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) \in F$ car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans F, et que F est un sev de E.
Et : $(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) \in G$ car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans G, et que G est un sev de E.
Il s'ensuit que $(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) \in (F \cap G)$.
On a ainsi prouvé que : $[\overrightarrow{u} \in (F \cap G)$ et $\overrightarrow{v} \in (F \cap G)] \Longrightarrow \left[\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \in (F \cap G)\right]$
Ce qui signifie que $(F \cap G)$ est stable par combinaison linéaire.

Conclusion. $F \cap G$ est une partie de E (SEV1), qui contient le vecteur nul de E (SEV2), et qui est stable par combinaison linéaire (SEV3). Donc $F \cap G$ est un sev de E.

Banque d'exercices

Exercice 1. — **(Tchebychev 1)**. On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant
$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad \text{et} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$
Etablir que : $\forall\, n\in\mathbb{N}, \quad \deg(T_n) = n$

Exercice 2. — **(Tchebychev 2)**. On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant
$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad \text{et} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$
Etablir que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\,\theta\in\mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Exercice 3. — **(Polynômes interpolateurs de Lagrange)**. Soit n un entier naturel non nul, soient $(n+1)$ réels deux à deux distincts $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, et soit $(\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Pour tout $i \in [\![\, 0, n \,]\!]$, on pose : $L_i = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X-\alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$

Montrer que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(\alpha_k) = \beta_k$ pour tout $k \in [\![\, 0, n \,]\!]$.

Exercice 4. — Déterminer les décompositions en polynômes irréductibles de $P = X^6 - 1$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. — On note $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes.
Montrer que $F = \left\{ f\in E, \quad \displaystyle\int_0^1 f = 0 \right\}$ est un sev de E.

Exercice 6. — Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on considère l'ensemble F des polynômes admettant (-2) comme racine de multiplicité au moins égale à 3.
Montrer que F est un sev de E.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — (Tchebychev 1). On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(T_n) = n$

Notons pour tout n entier naturel : $P(n)$: "$\deg(T_n) = n$"

➤ Initialisation (pour $n = 0$ et $n = 1$) : d'après l'énoncé $\deg(T_0) = 0$ et $\deg(T_1) = 1$. Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

➤ Hérédité : supposons la propriété $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n.

On exploite alors la relation $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Dans le terme de droite de cette égalité, le degré de $2XT_{n+1}$ est par hypothèse de récurrence, égal à $1 + (n+1) = n+2$; tandis que celui de T_n est égal à n (toujours par hypothèse de récurrence).

Puisque $\deg(2XT_{n+1}) > \deg(T_n)$, on en déduit que : $\deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(2XT_{n+1}) = n+2$.

D'où $P(n+2)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(T_n) = n$

Exercice 2. — (Tchebychev 2). On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Notons P(n) : "$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$" pour tout entier naturel n.

➤ Initialisation (pour $n = 0$ et $n = 1$). Soit θ un réel. d'une part $T_0 = 1$ d'où : $T_0(\cos(\theta)) = 1$. D'autre part : $\cos(0 \times \theta) = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part $T_1 = X$ d'où : $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$. D'autre part : $\cos(1 \times \theta) = \cos(\theta)$. Donc $P(1)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n. Alors pour tout réel θ :

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\underbrace{T_{n+1}(\cos(\theta))}_{=_{HR}\cos((n+1)\theta)} - \underbrace{T_n(\cos(\theta))}_{=_{HR}\cos(n\theta)} = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

$$= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \text{ d'où : } T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$$

D'où $P(n+2)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Exercice 3. — (Polynômes interpolateurs de Lagrange). Soit n un entier naturel non nul, soient $(n+1)$ réels deux à deux distincts $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, et soit $(\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose : $L_i = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$

Montrer que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(\alpha_k) = \beta_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Commençons par observer que par construction les polynômes L_k sont de degré exactement n, et :

$$\forall (i,k) \in [\![0, n]\!]^2,\ L_k(\alpha_i) = \delta_{ik}$$

Posons : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta_k L_k$. Le polynôme P est de degré au plus n, en tant que combinaison linéaire de polynômes de degré n.

En outre : $\forall j \in [\![0, n]\!],\ P(\alpha_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta_k L_k(\alpha_j) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \delta_{kj} = \beta_j$

Le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ répond donc à la question.

Montrons son unicité. Supposons qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ répondant à la question, alors P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui coïncident en $(n+1)$ points : d'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

Ce qui prouve l'unicité du polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall\, k \in [\![\, 0, n \,]\!],\ P(\alpha_k) = \beta_k$.

Conclusion. Pour tout $(\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(\alpha_k) = \beta_k$ pour tout $k \in [\![\, 0, n \,]\!]$

Exercice 4. — Déterminer les décompositions en polynômes irréductibles (DPI) de $P = X^6 - 1$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Les racines de $X^6 - 1$ sont les racines sixièmes de l'unité. Par suite :

$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}})(X+\mathrm{j})(X+\bar{\mathrm{j}}) \qquad \text{(DPI dans } \mathbb{C}[X])$$

Pour obtenir la DPI de $X^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, on multiplie deux à deux les parenthèses faisant intervenir des racines complexes conjuguées :

$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) \qquad \text{(DPI dans } \mathbb{R}[X])$$

Exercice 5. — On note $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes. Montrer que $F = \left\{ f \in E,\quad \int_0^1 f = 0 \right\}$ est un sev de E.

D'après l'énoncé F est une partie de E (SEV1), et la fonction identiquement nulle sur $[0,1]$ (qui est $\overrightarrow{0}_E$) appartient clairement à F (SEV2).
Soient f et g dans F, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Par linéarité de l'intégrale et par hypothèse : $\displaystyle\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g = 0$. D'où : $(\lambda f + \mu g) \in F$.

On a ainsi prouvé que : $[f \in F \text{ et } g \in F] \Longrightarrow \left[\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ \lambda f + \mu g \in F\right]$
Ce qui signifie que F est stable par combinaison linéaire (SEV3).

Conclusion. F est une partie de E (SEV1), qui contient le vecteur nul de E (SEV2), et qui est stable par combinaison linéaire (SEV3). Donc F est un sev de E.

Exercice 6. — Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on considère l'ensemble F des polynômes admettant (-2) comme racine de multiplicité au moins égale à 3.
Montrer que F est un sev de E.

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{R}_5[X]$: $\forall\, P \in \mathbb{R}_5[X],\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{P^{(k)}(-2)}{k!}\,(X+2)^k$

Par ailleurs, d'après le cours : (-2) est racine de P de multiplicité au moins égale à 3 SSI $P(-2) = P'(-2) = P''(-2) = 0$.

Il s'ensuit que P appartient à F SSI il existe 3 réels a, b et c tels que : $P = a\,(X+2)^3 + b\,(X+2)^4 + c\,(X+2)^5$

Conclusion. $F = \mathrm{Vect}\left((X+2)^3, (X+2)^4, (X+2)^5\right)$

Compléments

Complément 1. — Racines des polynômes de Tchebychev. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que T_n admet n racines simples, et que toutes ses racines sont dans l'intervalle $[-1,1]$.

Soit n un entier, $n \geqslant 1$. On cherche les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1,1]$.

Considérons donc x un réel de cet intervalle tel que : $T_n(x) = 0$. Puisque x est compris entre -1 et 1, il existe un unique réel θ dans $[0,\pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. On a alors :

$$T_n(x) = 0 \Longleftrightarrow T_n(\cos(\theta)) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Longleftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2n}\ \left[\frac{\pi}{n}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2n} + k\,\frac{\pi}{n} \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{(2k+1)\,\pi}{2n}$$

Posons alors, pour tout $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$, $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\,\pi}{2n}$. Il est clair que les réels θ_k sont n réels distincts de $[0,\pi]$. Puisque la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0,\pi]$ est injective, les réels $(\cos(\theta_k))_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ sont n réels distincts de l'intervalle $[-1,1]$; qui plus est, ce sont (par construction) n racines distinctes du polynôme T_n.

Puisqu'en outre T_n est de degré n, T_n ne possède pas d'autre racine que les $\cos(\theta_k)$ évoqués ci-dessus.

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, le polynôme T_n possède n racines simples, qui sont les réels : $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\,\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$.

Complément 2. — **Théorème (D'Alembert-Gauss).**

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède une racine dans $\mathbb{C}$.

NB : cette preuve est hors-programme de colle, et hors-programme tout court, mais pas l'énoncé du théorème !

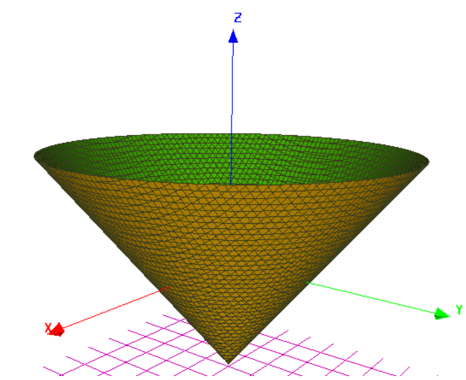
Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, non constant. Notons $n \in \mathbb{N}^*$ son degré, et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Considérons l'application $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$$z \longmapsto |P(z)|$$

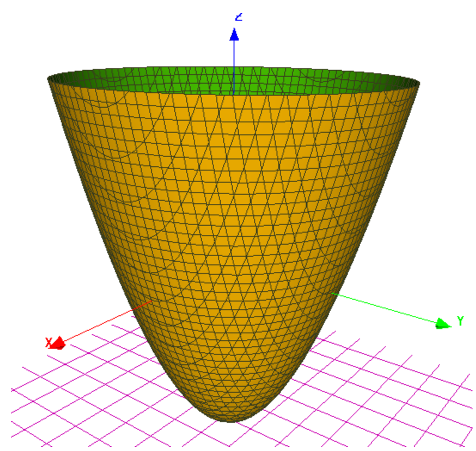
Principe de la preuve : établir que la fonction ψ admet un minimum, puis que ce minimum est nul.

Remarque. Si vous voulez vous faire une image de ψ, il faut un peu d'imagination. Puisqu'elle est définie sur $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, ψ ne sera plus représentée par une courbe, mais par une surface. Explicitement, l'image d'un complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$ par ψ est le réel positif $\psi(z)$; on se propose alors d'associer à ces données le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x, y, \psi(x + \mathrm{i}\,y))$. L'ensemble des points obtenus de cette façon en faisant varier x et y est une surface de $\mathbb{R}^3$, que l'on pourra alors appeler surface représentative de la fonction ψ (et que l'on notera S_ψ dans les exemples ci-dessous).

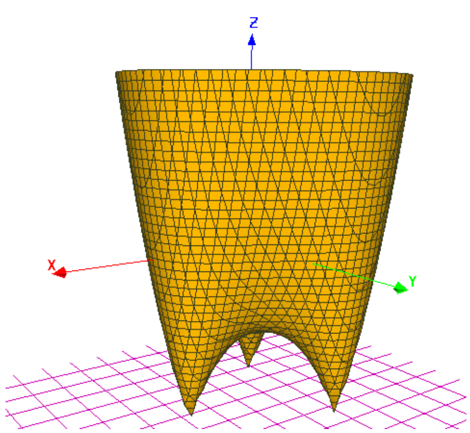
Ci-dessous, on donne quelques exemples de telles surfaces S_ψ associées à différents polynômes P.



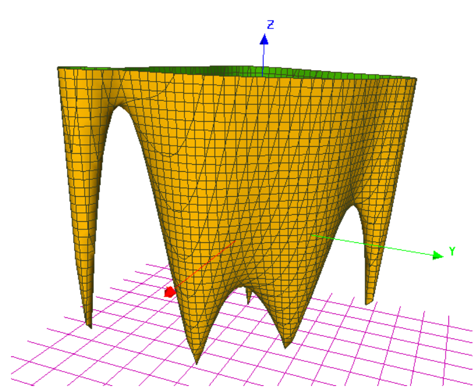
S_ψ pour $P = X$



S_ψ pour $P = X^2$



S_ψ pour $P = X^2 + X + 1$



S_ψ pour un certain P ayant 5 racines simples

➤ 1ère partie — Où l'on prouve que ψ admet un minimum.

Pour tout nombre complexe z non nul, on a : $\psi(z) = |z^n| \left| a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right|$

Soit k un entier de $[\![0, n-1]\!]$. Lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$, on a : $\frac{a_k}{z^{n-k}} \longrightarrow 0$.

Donc : $\lim_{z \to +\infty} \left| a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| = |a_n|$

Puisque $|a_n| > 0$ (a_n est non nul par hypothèse[*]), on a donc : $\lim_{z \to +\infty} \psi(z) = +\infty$.

En particulier, il existe un réel $R > 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C},\ (|z| > R) \Longrightarrow (\psi(z) > |a_0| + 1) \quad (\spadesuit)$.[†]

Posons alors $K = D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leqslant R\}$. K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$.[‡] D'après le théorème des bornes atteintes[§], ψ admet un maximum et un minimum sur K.

Ne nous intéressons qu'au minimum de ψ, que l'on note m. Il existe un complexe $z_0 \in D(0, R)$ tel que : $\psi(z_0) = m$.

Alors : (1) : $\quad \forall z \in D(0, R), \quad \psi(z) \geqslant m$ puisque m est le minimum de ψ sur K.

En particulier : $|a_0| \geqslant m$ puisque $|a_0| = \psi(0)$. Il s'ensuit que : (2) $\quad \forall z \in \mathbb{C},\ (|z| > R) \Longrightarrow (\psi(z) > m)$ d'après ($\spadesuit$).

On déduit des points (1) et (2) que : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \psi(z) \geqslant m = \psi(z_0) \quad (\clubsuit)}$.

Ainsi la fonction ψ admet un minimum (global) sur $\mathbb{C}$. Fin du premier acte.

➤ 2ème partie — Où l'on prouve que le minimum de ψ est nul.

Commençons par une observation pas trop difficile ; la fonction ψ étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, son minimum est supérieur ou égal à 0. Pour parvenir à nos fins, il "suffit" donc de prouver que m ne peut pas être strictement positif. Pour cela, rien de tel qu'un petit raisonnement par l'absurde.

Supposons que $m = \psi(z_0) > 0$. Alors la formule de Taylor appliquée en z_0 donne :

$$P(z_0 + Z) = \alpha_0 + \alpha_1 Z + \alpha_2 Z^2 + \cdots + \alpha_n Z^n$$

où les α_i désignent les complexes $\frac{P^{(i)}(z_0)}{i!}$. En particulier : $\alpha_0 = P(z_0) \neq 0$ (par hypothèse), et $\alpha_n \neq 0$ puisque $\deg(P) = n$.

Notons alors : $k = \min \{i \in [\![1, n]\!] \ / \ \alpha_i \neq 0\}$. L'existence de ce minimum est assurée par le fait que l'ensemble considéré est une partie de $\mathbb{N}^*$ (donc minorée !) non vide (n y appartient). Avec cette définition de k, on a donc :

$$P(z_0 + Z) = \alpha_0 + \alpha_k Z^k + \alpha_{k+1} Z^{k+1} + \cdots + \alpha_n Z^n$$

Notons encore ω une racine k-ième du complexe $-\frac{\alpha_0}{\alpha_k}$.

Alors pour tout réel t : $P(z_0 + \omega t) = \alpha_0 + \alpha_k w^k t^k + \alpha_{k+1} w^{k+1} t^{k+1} + \cdots + \alpha_n w^n t^n$

d'où : $P(z_0 + \omega t) = \alpha_0 - \alpha_0 t^k + \alpha_{k+1} w^{k+1} t^{k+1} + \cdots + \alpha_n w^n t^n \quad$ soit enfin : $\quad P(z_0 + \omega t) = \alpha_0 (1 - t^k + o(t^k))$.

D'où : $\psi(z_0 + \omega t) = |\alpha_0| \times \left| (1 - t^k + o(t^k)) \right|$.

Pour $t > 0$, la quantité $1 - t^k + o(t^k)$ est strictement plus petite que 1 (puisqu'alors l'expression $t^k - o(t^k)$ est strictement positive) sur un voisinage de 0. En particulier, il existe un réel t_0 tel que : $\psi(z_0 + \omega t_0) < |\alpha_0|$.

---

[*]. C'est le coefficient dominant de P.

[†]. On utilise la définition de "tendre vers $+\infty$" pour une fonction définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, que voici : *soit* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ *;* $\lim_{z \to +\infty} f(z) = +\infty$ *si pour tout réel* M*, il existe un réel* R *tel que :* $\forall z \in \mathbb{C},\ (|z| > R) \Longrightarrow (f(z) > R)$.
La motivation pour choisir $R = |a_0| + 1$ *dans le cas présent est que* $\psi(0) = |a_0|$*, et que l'on est donc assuré qu'il existera un voisinage de* 0 *sur lequel* ψ *sera inférieure ou égale à* $|a_0| + 1$*, et donc que* $R \neq 0$.

[‡]. Que K soit bornée, vous pouvez le comprendre. "Fermée", vous pouvez en avoir l'intuition : K est un disque fermé car "on en prend le bord". Vous verrez l'an prochain une définition vraiment mathématique de ce terme.

[§]. Qui affirmera que toute fonction continue $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$ est elle même bornée et atteint ses bornes. Ici, la fonction ψ est continue en tant que composée d'une fonction polynomiale, et de la fonction valeur absolue, toutes deux continues.

En posant $z_1 = z_0 + \omega t_0$ et en se rappelant que $\alpha_0 = P(z_0) = m$, on a donc établi que :

$$\exists\, z_1 \in \mathbb{C},\ \psi\left(z_1\right) < \psi\left(z_0\right)$$

ce qui contredit violemment le fait que $\psi\left(z_0\right)$ est le minimum global de ψ.

Il s'ensuit que $m = \psi(z_0) = 0$, ce qui prouve que ψ s'annule au moins une fois dans $\mathbb{C}$, et donc que P s'annule au moins une fois dans $\mathbb{C}$.

Conclusion. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède une racine dans $\mathbb{C}$.