MPSI – Colle 22 (31 mars au 4 avril 2025) : Polynômes - Espaces vectoriels

Chapitre 19 : Polynômes

1 – Généralités

2 – Degré, coefficient dominant

~~**(3 – Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$)**~~

Aucune question spécifique à ce thème n'est attendue dans cette colle : pas de calcul de PGCD, de PPCM, de coefficients de Bezout. On pourra en revanche demander de prouver que D divise P en utilisant le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$, ou en utilisant les racines (multiples ou pas).

4 – Fonctions polynomiales

a – Racines d'un polynôme

b – Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

c – Multiplicités / Dérivées successives

5 – Polynômes irréductibles

Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires - LE TOUT DEBUT !

1 – Espaces vectoriels

Définition, catalogue d'exemples.

2 – Sous-espaces vectoriels

Caractérisation à l'aide des axiomes (SEV1) (inclusion), (SEV2) (vecteur nul), (SEV3) (stabilité par combinaison linéaire). Exemples.

L'intersection de 2 sev en est un.

3 – Combinaisons linéaires (finies), familles génératrices

Notation $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ pour désigne l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$.

Propriété : $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ est un sev.

Questions de cours

- **Théorème** : soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$. Le scalaire α est racine de P de multiplicité au moins m SSI $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$.

- **Théorème (nombre maximal de racines d'un polynôme)** : si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $(n+1)$ racines distinctes, alors $P = \tilde{0}$

  ET Corollaire (principe du prolongement algébrique) : soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$. S'il existe $(n+1)$ scalaires (càd des éléments de $\mathbb{K}$) $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ distincts tels que : $\forall\, i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

- **Formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$ (en α)** : soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$

- **Théorème** : dans $\mathbb{K}[X]$, les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

- **Théorème** : dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont exactement les polynômes de degré 1.

- **Propriété** : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.