Colle 23 – Questions de cours

Question de cours 1 — **Propriété**. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors : $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$.

Preuve. D'une part : $f\left(\overrightarrow{0}_E + \overrightarrow{0}_E\right) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$. D'autre part : $f\left(\overrightarrow{0}_E + \overrightarrow{0}_E\right) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right) + f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$ (f étant linéaire)

On en déduit que : $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) + f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$, puis la conclusion.

> **Conclusion**. $[f \in \mathscr{L}(E,F)] \Longrightarrow \left[f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F\right]$

Question de cours 2 — **Propriété** : si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\ker f$ est un sev de E et $\operatorname{Im} f$ est un sev de F.

Preuve. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Montrons que $\ker f$ est un sev de E. Par définition, $\ker f$ est une partie de E (SEV1). Le vecteur nul y appartient (SEV2), puisque $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$ pour toute $f \in \mathscr{L}(E,F)$ (QC2).

Il reste à établir que $\ker f$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\ker f$, et λ et μ deux scalaires.
Alors : $f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{0_F} + \mu\overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_F}$; la première égalité provenant de la définition d'application linéaire, et la seconde du fait que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans le noyau de f par hypothèse.
Par conséquent : $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in \ker f$, et $\ker f$ est donc stable par combinaison linéaire.

> **Conclusion 1**. $\ker f$ est une partie de E, contenant $\overrightarrow{0}_E$, et stable par combinaison linéaire. Par suite, $\ker f$ est un sev de E.

Montrons que $\operatorname{Im} f$ est un sev de F. Par définition, $\operatorname{Im} f$ est une partie de F (SEV1). Le vecteur nul (de F) y appartient (SEV2), puisque $\overrightarrow{0_F} = f\left(\overrightarrow{0_E}\right)$ pour toute $f \in \mathscr{L}(E,F)$ (QC2 encore).

Il reste à établir que $\operatorname{Im} f$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\operatorname{Im} f$, et λ et μ deux scalaires.
Par hypothèse, il existe deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de E tels que $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{u}$ et $f\left(\overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{v}$. Par conséquent :
$f\left(\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}\right) = \lambda f(\overrightarrow{a}) + \mu f\left(\overrightarrow{b}\right) = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$; la première égalité provenant de la définition d'application linéaire, et la seconde des définitions respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Il s'ensuit que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in \operatorname{Im} f$ (puisqu'il admet pour antécédent $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$). Ainsi $\operatorname{Im} f$ est stable par combinaison linéaire (SEV3).

> **Conclusion 2**. $\operatorname{Im} f$ est une partie de F, contenant $\overrightarrow{0}_F$, et stable par combinaison linéaire. Par suite, $\operatorname{Im} f$ est un sev de F.

Question de cours 3 — **Théorème**. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors : f est injective SSI $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

Preuve. On raisonne par double implication, pour faire preuve d'originalité.

➤ Supposons f injective. On a déjà $\left\{\overrightarrow{0}_E\right\} \subset \ker f$ puisque $\ker f$ est un sev de E. Réciproquement, soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\ker f$. Alors $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}_F$. Comme par ailleurs f est linéaire, on a aussi : $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$. Donc $f(\overrightarrow{v}) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$, et on en déduit $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}_E$ par injectivité de f. Ce qui assure que $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

En résumé : $[f \text{ injective}] \Longrightarrow \left[\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}\right]$.

➤ <u>Réciproquement, supposons ker $f =$</u>$\left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$. Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs de E tels que $f\left(\overrightarrow{v}\right) = f\left(\overrightarrow{w}\right)$. Alors : $f\left(\overrightarrow{v}\right) - f\left(\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{0}_F$, d'où par linéarité de f : $f\left(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{0}_F$. Par suite, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \in \ker\ f$, et puisque le noyau de f est réduit au vecteur nul par hypothèse, on en déduit que $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}_E$, d'où : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

On a ainsi établi que $\left[f\left(\overrightarrow{v}\right) = f\left(\overrightarrow{w}\right)\right] \Longrightarrow \left[\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}\right]$, ce qui prouve l'injectivité de f.

Par suite : $\left[\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}\right] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$.

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \left[\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}\right] \Longleftrightarrow [f \text{ injective}]}$

Question de cours 4 — **Propriété** : soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe une famille $\left(\overrightarrow{v}_i\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ génératrice de E, càd une famille de vecteurs de E tels que $E = \text{Vect}\left(\left(\overrightarrow{v}_i\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$. Alors :

$$\text{Im}f = \text{Vect}\left(\left(f\left(\overrightarrow{v}_i\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$$

Preuve. ➤ <u>Montrons l'inclusion : Imf ⊂</u>Vect$\left(\left(f\left(\overrightarrow{v}_i\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$. Soit $\overrightarrow{V} \in \text{Im}f$. Il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E tel que : $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{V}$.

Puisque la famille $\left(\overrightarrow{v}_i\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est génératrice de E : $\exists\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i$.

Ainsi : $\overrightarrow{V} = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i\right)$ et par linéarité de f : $\overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(\overrightarrow{v}_i\right)$, d'où : $\overrightarrow{V} \in \text{Vect}\left(\left(f\left(\overrightarrow{v}_i\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion 1}} : \text{Im}f \subset \text{Vect}\left(\left(f\left(\overrightarrow{v}_i\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)}$

➤ <u>Montrons l'inclusion</u> : Vect$\left(\left(f\left(\overrightarrow{v}_i\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\right) \subset \text{Im}f$. Soit $\overrightarrow{V} \in \text{Vect}\left(\left(f\left(\overrightarrow{v}_i\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$.

Alors : $\exists\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(\overrightarrow{v}_i\right)$.

Par linéarité de f, on a : $\overrightarrow{V} = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i\right)$, d'où $\overrightarrow{V} \in \text{Im}f$. $\boxed{\underline{\text{Conclusion 2}} : \text{Vect}\left(\left(f\left(\overrightarrow{v}_i\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\right) \subset \text{Im}f}$

$\boxed{\textbf{Bilan. } \text{Im}f = \text{Vect}\left(\left(f\left(\overrightarrow{v}_i\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)}$

Question de cours 5 — **Propriété (caractérisation des sev supplémentaires)** : deux sev F et G de E sont supplémentaires SSI $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $E = F + G$.

Preuve. ➤ <u>Sens direct</u> : supposons que F et G soient supplémentaires dans E (càd $E = F \bigoplus G$). En particulier, on a déjà $E = F + G$.

Montrons que $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Soit $\overrightarrow{v} \in F \cap G$. Alors le vecteur $\overrightarrow{v}$ peut s'écrire $\overrightarrow{v} = \underbrace{\overrightarrow{v}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in G}$ et $\overrightarrow{v} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{v}}_{\in G}$. Les sev F et G étant supplémentaires dans E, on en déduit que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Par conséquent : $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. $\boxed{\underline{\text{Conclusion 1}} : \left[E = F \bigoplus G\right] \Longrightarrow \left[F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \text{ et } E = F + G\right]\ (\spadesuit)}$.

➤ Réciproquement : supposons que $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $E = F + G$, et considérons un vecteur arbitraire $\overrightarrow{v}$ de E. La seconde hypothèse permet d'affirmer qu'il existe $\overrightarrow{f} \in F$ et $\overrightarrow{g} \in G$ tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

Il reste à établir l'unicité de cette écriture. Supposons qu'il existe $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{f'}$ dans F, et $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{g'}$ dans G tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f'} + \overrightarrow{g'}$. Alors : $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{f'} = \overrightarrow{g'} - \overrightarrow{g}$. On en déduit que $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{f'} \in F \cap G$. Par hypothèse, ceci implique que : $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{f'} = \overrightarrow{0}$. D'où $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f'}$ et donc $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g'}$.

Par suite : $\forall \overrightarrow{v} \in E, \quad \exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$. Autrement dit : $E = F \bigoplus G$.

$\boxed{\text{Conclusion 2 : } [F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \text{ et } E = F + G] \Longrightarrow [E = F \bigoplus G] \ (\clubsuit)}$.

$\boxed{\textbf{Synthèse. } \text{D'après } (\spadesuit) \text{ et } (\clubsuit) : [F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \text{ et } E = F + G] \Longleftrightarrow [E = F \bigoplus G]}$

Question de cours 6 — Propriétés (des projections) : soient F et G deux sev supplémentaires de E. On note p_F la projection sur F parallèlement à G. Alors p_F est un endomorphisme de E tel que $p_F^2 = p_F$. En outre : $\ker(p_F) = G$ et $\operatorname{Im}(p_F) = F$.

Preuve. Soient F et G deux sev supplémentaires de E (càd tels que $E = F \bigoplus G$). Par définition (de sev supplémentaires) : $\forall \overrightarrow{v} \in E, \quad \exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$. On rappelle alors que la projection sur F parallèlement à G est l'application p_F de E dans E définie en posant $p_F(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}$.

➤ Montrons la linéarité de p_F. Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs de E, et soient λ et μ deux scalaires. Puisque $E = F \bigoplus G$, il existe deux vecteurs $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{f'}$ dans F, et deux vecteurs $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{g'}$ dans G uniques tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{f'} + \overrightarrow{g'}$. Notons déjà que : $\overrightarrow{f} = p_F(\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{f'} = p_F(\overrightarrow{w})$ $(\sharp)$.

En outre : $\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w} = \underbrace{\lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{f'}}_{\in F} + \underbrace{\lambda\overrightarrow{g} + \mu\overrightarrow{g'}}_{\in G}$. D'où : $p_F(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{f'} \quad (\flat)$.

On déduit de $(\flat)$ et de $(\sharp)$ que : $p_F(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda p_F(\overrightarrow{v}) + \mu p_F(\overrightarrow{w})$. Ce qui prouve que p_F est linéaire. $\boxed{\text{D'où } p_F \in \mathscr{L}(E)}$

➤ Montrons que $p_F^2 = p_F$. Avec les notations précédemment introduites : $p_F(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}$.

Et puisque $\overrightarrow{f} = \underbrace{\overrightarrow{f}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{0}_E}_{\in G}$, on a : $p_F^2(\overrightarrow{v}) = p_F(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f}$. Il s'ensuit que : $\forall \overrightarrow{v} \in E, \ p_F^2(\overrightarrow{v}) = p_F(\overrightarrow{v})$.

Donc : $\boxed{p_F^2 = p_F}$.

➤ Montrons que $\ker(p_F) = G$. Par double inclusion : si $\overrightarrow{g} \in G$, alors $\overrightarrow{g} = \underbrace{\overrightarrow{0}_E}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{g}}_{\in G}$, d'où $p_F(\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{0}$, càd : $\overrightarrow{g} \in \ker(p_f)$. Ainsi : $G \subset \ker(p_F)$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ (toujours avec les mêmes notations) est dans $\ker(p_F)$, alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}_E$, d'où $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g}$. Par suite : $\overrightarrow{v} \in G$, ce qui prouve l'inclusion : $\ker(p_F) \subset G$. $\boxed{\text{Finalement : } \ker(p_F) = G}$.

➤ Montrons que $\operatorname{Im}(p_F) = F$. Il résulte de la définition que $\operatorname{Im}(p_F) \subset F$. Etablissons l'inclusion réciproque. Pour tout $\overrightarrow{f} \in F$, on a : $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{0}_E$, d'où : $\overrightarrow{f} = p_F(\overrightarrow{f})$. Par conséquent : $\overrightarrow{f} \in \operatorname{Im}(p_f)$, ce qui prouve que : $F \subset \operatorname{Im}(p_F)$.

$\boxed{\text{Finalement : } \operatorname{Im}(p_F) = F}$.

Question de cours 7 — **Propriété**. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. On a :

$$(p \text{ est un projecteur de } E) \Longleftrightarrow \left(E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)\right)$$

Preuve. ➤ Montrons que $(p$ est un projecteur de $E) \Longrightarrow \left(E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)\right)$.

Supposons que p est un projecteur de E.

Montrons que $\ker(p) \cap \ker(\mathrm{id}_E - p) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

Supposons que $\overrightarrow{w} \in \ker(p) \cap \ker(\mathrm{id}_E - p)$, alors $p(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}_E$ (puisque $\overrightarrow{w} \in \ker(p)$) et $p(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$ (puisque $\overrightarrow{w} \in \ker(\mathrm{id}_E - p)$). D'où $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}_E$. Il s'ensuit que : $\ker(p) \cap \ker(\mathrm{id}_E - p) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$ $(\flat)$.

Montrons que $E = \ker(p) + \ker(\mathrm{id}_E - p)$ par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Supposons qu'il existe $\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in \ker(p) \times \ker(\mathrm{id}_E - p)$ tel que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

Alors : $p(\overrightarrow{v}) = p\left(\overrightarrow{f}\right) + p(\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{0}_E + \overrightarrow{g}$ (la première égalité provenant de la linéarité de p, et la seconde des hypothèses faites sur $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$).

Ainsi : $\overrightarrow{g} = p(\overrightarrow{v})$. Il s'ensuit que : $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v})$.

Synthèse. Soit $\overrightarrow{v} \in E$. On écrit judicieusement : $\overrightarrow{v} = \underbrace{(\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v}))}_{\overrightarrow{f}} + \underbrace{p(\overrightarrow{v})}_{\overrightarrow{g}}$

Avec ces notations, on a :

- ➢ $p\left(\overrightarrow{f}\right) = p(\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v})) = p(\overrightarrow{v}) - p^2(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{v}) - p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.* D'où : $\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v}) \in \ker(p)$ $(\heartsuit)$.
- ➢ $p(\overrightarrow{g}) = p(p(\overrightarrow{v})) = p(\overrightarrow{v})$ (puisque p est un projecteur). D'où $p(\overrightarrow{v}) \in \ker(\mathrm{id}_E - p)$ $(\clubsuit)$.
- ➢ Enfin, il est immédiat que $\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v})) + p(\overrightarrow{v})$ $(\spadesuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\heartsuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $E = \ker(p) + \ker(\mathrm{id}_E - p)$ $(\diamondsuit)$.

D'après $(\diamondsuit)$ et $(\flat)$: $E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$.

Conclusion 1. $(p$ est un projecteur de $E) \Longrightarrow \left(E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)\right)$

➤ Réciproquement, montrons que : $\left(E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)\right) \Longrightarrow (p$ est un projecteur de $E)$.

Soit $\overrightarrow{v}$ un élément de E. Par hypothèse : $\exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in \ker(p) \times \ker(\mathrm{id}_E - p)$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

Muni des hypothèses faites sur $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$, on effectue sans difficulté les calculs suivants.

D'abord : $p(\overrightarrow{v}) = p\left(\overrightarrow{f}\right) + p(\overrightarrow{g})$, d'où : $p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{g}$.

Puis : $p^2(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{g}$, càd : $p^2(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{g}$.

Par conséquent : $\forall \overrightarrow{v} \in E$, $p^2(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{v})$. Donc : $p^2 = p$, ce qui signifie que l'endomorphisme p est un projecteur.

Conclusion 2. $\left(E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)\right) \Longrightarrow (p$ est un projecteur de $E)$

Bilan. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. On a : $(p$ est un projecteur de $E) \Longleftrightarrow \left(E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)\right)$

---

*. La première égalité provenant de la linéarité de p, et la seconde de l'hypothèse selon laquelle p est un projecteur.

Méthodes essentielles du chapitre 20

1. Montrer que “quelquechose” est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E :

- **a.** En utilisant les axiomes “(SEVx)” (exo 1 de la banque)
- **b.** En utilisant “un Vect” (exo 2 de la banque)
- **c.** En utilisant “un ker” (exo 3 de la banque)

2. Déterminer une famille génératrice d'un sev (répétition du point 1.b, exo 4 de la banque)

3. Montrer qu'une application est linéaire (ou est un endomorphisme) (exo 5 de la banque)

4. Déterminer le noyau d'une application linéaire (résolution de $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$, exo 6 de la banque)

5. Déterminer l'image d'une application linéaire

(en utilisant : $f\left(\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_n\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(f(\overrightarrow{v}_1), \dots, f(\overrightarrow{v}_n)\right)$, exo 7 de la banque)

6. Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme/automorphisme (exo 8 de la banque)

7. Montrer que deux sev sont supplémentaires dans un ev E (exo 9 de la banque)

Banque d'exercices

Exercice 1 — On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes.

Montrer que $F = \left\{ f \in E,\quad \int_0^1 f = 0 \right\}$ est un sev de E.

Exercice 2 — Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on considère l'ensemble F des polynômes admettant (-2) comme racine de multiplicité au moins égale à 3.

Montrer que F est un sev de E.

Exercice 3 — Soit $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $A \in E$.

On considère l'ensemble F des matrices de E commutant avec A, càd : $F = \mathrm{COM}(A) = \{M \in E,\ MA = AM\}$.

Montrer que F est un sev de E.

Exercice 4 — On pose $E = \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des matrices de E telles que la somme des coefficients de la deuxième ligne soit égale au double de la somme des coefficients de la première ligne.

Montrer que F est un sev de E, et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 5 — Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - X^2 P'' \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 — Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et soit $\omega \in R_+^*$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & y'' + \omega^2 y \end{array}$$

On admet que f est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau.

Exercice 7 — On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M - M^T \end{array}$

On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 8 — On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M - \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{I}_2 \end{array}$

On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 9 — Dans $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les sev $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\cos)$.
Etablir que : $E = F \bigoplus G$.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1 — On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes.

Montrer que $F = \left\{ f \in E, \quad \int_0^1 f = 0 \right\}$ est un sev de E.

D'après l'énoncé F est une partie de E (SEV1), et la fonction identiquement nulle sur $[0,1]$ (qui est $\overrightarrow{0}_E$) appartient clairement à F (SEV2).

Soient f et g dans F, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$.

Par linéarité de l'intégrale et par hypothèse : $\displaystyle\int(\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g = 0$. D'où : $(\lambda f + \mu g) \in F$.

On a ainsi prouvé que : $[f \in F \text{ et } g \in F] \Longrightarrow \left[\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2,\ \lambda f + \mu g \in F\right]$

Ce qui signifie que F est stable par combinaison linéaire (SEV3).

Conclusion. F est une partie de E (SEV1), qui contient le vecteur nul de E (SEV2), et qui est stable par combinaison linéaire (SEV3). Donc F est un sev de E.

Exercice 2 — Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on considère l'ensemble F des polynômes admettant (-2) comme racine de multiplicité au moins égale à 3.

Montrer que F est un sev de E.

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{R}_5[X]$: $\forall P \in \mathbb{R}_5[X],\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{P^{(k)}(-2)}{k!}(X+2)^k$

Par ailleurs, d'après le cours : (-2) est racine de P de multiplicité au moins égale à 3 SSI $P(-2) = P'(-2) = P''(-2) = 0$.

Il s'ensuit que P appartient à F SSI il existe 3 réels a, b et c tels que : $P = a(X+2)^3 + b(X+2)^4 + c(X+2)^5$

Conclusion. $F = \text{Vect}\left((X+2)^3, (X+2)^4, (X+2)^5\right)$

Exercice 3 — Soit $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $A \in E$.

On considère l'ensemble F des matrices de E commutant avec A, càd : $F = \mathrm{COM}(A) = \{M \in E,\ MA = AM\}$.

Montrer que F est un sev de E.

Observons que : $MA = AM \Longleftrightarrow MA - AM = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.

Cette remarquable observation nous conduit à introduire l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array}$$

Soient $(M,N) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$f(\lambda M + \mu N) = (\lambda M + \mu N)A - A(\lambda M + \mu N) = \lambda MA + \mu NA - \lambda AM - \mu AN = \lambda(MA - AM) + \mu(NA - AN)$

Finalement : $f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$. Ce qui prouve la linéarité de f.

Cette vérification faite, il est clair que : $\ker f = F$.
Conclusion. F est un sev, en tant que noyau d'une application linéaire.

Exercice 4 — On pose $E = \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des matrices de E telles que la somme des coefficients de la deuxième ligne soit égale au double de la somme des coefficients de la première ligne.

Montrer que F est un sev de E, et en déterminer une famille génératrice.

Soit $M \in E$. Par un calcul aisé : $M \in F \Longleftrightarrow \exists\,(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5,\ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 2\,(a+b+c)-d-e \end{pmatrix}$

D'où : $M \in F \Longleftrightarrow \exists\,(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5,\ M = a(\mathrm{E}_{11}+2\mathrm{E}_{23})+b(\mathrm{E}_{12}+2\mathrm{E}_{23})+c(\mathrm{E}_{13}+2\mathrm{E}_{23})+d(\mathrm{E}_{21}-\mathrm{E}_{23})+e(\mathrm{E}_{22}-\mathrm{E}_{23})$

Conclusion. $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{E}_{11}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{12}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{13}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{21}-\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{22}-\mathrm{E}_{23})$

F est un sev de $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, et $\mathscr{F} = \{\mathrm{E}_{11}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{12}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{13}+2\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{21}-\mathrm{E}_{23},\ \mathrm{E}_{22}-\mathrm{E}_{23}\}$ est une famille génératrice de F.

Exercice 5 — Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - X^2P'' \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, λ et μ deux réels. On a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q) - X^2(\lambda P + \mu Q)'' = \lambda P + \mu Q - \lambda X^2 P'' - \mu X^2 Q''$$

(essentiellement par linéarité de la dérivation).

Donc : $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda(P - X^2P'') + \mu(Q - X^2Q'') = \lambda f(P) + \mu f(Q)$

En résumé, on a établi que : $\forall\,(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$

Conclusion. L'application f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$; c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 — Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et soit $\omega \in R_+^*$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & y'' + \omega^2 y \end{array}$$

On admet que f est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau.

Le noyau de f est par définition :

$$\ker(f) = \left\{g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(g) = 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = \left\{g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ g'' + \omega^2 g = 0\right\}$$

Déterminer $\ker(f)$ revient donc à résoudre l'équation différentielle $g'' + \omega^2 g = 0$.

Or la solution générale de cette EDL2 archi-célèbre est :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ g(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$$

Notons, pour tout réel t : $f_1(t) = \cos(\omega t)$ et $f_2(t) = \sin(\omega t)$.

Avec ces notations : $g \in \ker f \Longleftrightarrow g'' + \omega^2 g = 0 \Longleftrightarrow \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ g = \lambda f_1 + \mu f_2 \Longleftrightarrow g \in \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$

Conclusion. $\ker(f) = \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$

Exercice 7 — On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M - M^T \end{array}$

On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$.

D'après le cours : $\mathrm{M}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

D'où, d'après le cours : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$

Des calculs sans difficultés donnent :

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}, E_{12} - E_{21}, E_{21} - E_{12}, 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}) \qquad \text{Par suite : } \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(E_{12} - E_{21})$$

Or $\mathrm{Vect}(E_{12} - E_{21}) = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$, puisqu'une matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ est antisymétrique SSI il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $M = \lambda(E_{12} - E_{21})$.

Conclusion. $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\,(E_{12} - E_{21}) = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$

Exercice 8 — On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M - \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{I}_2 \end{array}$

On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Puisque l'on admet que f est linéaire, il suffit de prouver que f est bijective.

➤ **Injectivité de** f. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. On a :

$$M \in \ker f \iff f(M) = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})} \iff M - \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{I}_2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})} \iff M = \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{I}_2$$
$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \iff a = b = c = d = 0$$

En résumé : $M \in \ker f \iff M = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}$. D'où : $\ker f = \left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right\}$. Donc f est injective (♠).

➤ **Surjectivité de** f. D'après le cours : $\mathrm{M}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

D'où, d'après le cours : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$

Des calculs sans difficultés donnent :

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(-E_{22}, E_{12}, E_{21}, -E_{11}) = \mathrm{Vect}(E_{22}, E_{12}, E_{21}, E_{11}) = \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \quad \text{Donc } f \text{ est surjective.}$$

Conclusion. f est un endomorphisme bijectif de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. C'est donc un automorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 9 — Dans $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les sev $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\cos)$. Etablir que : $E = F \bigoplus G$.

Soit $\varphi \in F \cap G$. Alors : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi = \lambda \cos$. Puisque $\varphi \in F$, on en déduit $\lambda = 0$, d'où $\varphi = \overrightarrow{0}_E$. Par suite : $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

Montrons que $E = F + G$ par analyse-synthèse.

Soit $\varphi \in E$. En s'inspirant de l'exemple fait en cours (avec "exp" à la place de "cos"), on obtient la décomposition : $\varphi = \underbrace{(\varphi - \varphi(0)\cos)}_{\in F} + \underbrace{\varphi(0)\cos}_{\in G}$. †

Conclusion. $E = F \bigoplus G$

†. Cette partie est naturellement à détailler en colle.