MPSI – Colle 23 (21 au 25 avril 2025) : Espaces vectoriels et applications linéaires

Chapitre 20 : **Espaces vectoriels et applications linéaires**

1 – Espaces vectoriels

2 – Sous-espaces vectoriels

3 – Combinaisons linéaires (finies), familles génératrices

4 – Applications linéaires

Définition : une application $f : E \longrightarrow F$ entre deux $\mathbb{K}$-ev est **linéaire** si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v})$$

Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans lui-même ("$F = E$").

Propriétés g[ales]. $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E)$ sont des $\mathbb{K}$-ev ; $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (non-commutatif et non-intègre en général). A titre culturel en Sup : $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

5 – Ker et Im : noyau et image d'une application linéaire

Définition : soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **noyau de** f et on note $\ker f$ le sous-ensemble de E suivant :

$$\ker f = \left\{ \overrightarrow{v} \in E\ ,\ f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}_F \right\}$$

L'**image de** f, notée Im f, est la partie de F suivante :

$$\operatorname{Im} f = \{ \overrightarrow{w} \in F\ ,\ \exists\ \overrightarrow{v} \in E,\ f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w} \}$$

Propriété. $\ker f$ est un sev de E et Im f est un sev de F.

Propriété : soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose qu'il existe une famille $(\overrightarrow{v}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ génératrice de E, c'est-à-dire une famille de vecteurs de E tels que $E = \operatorname{Vect}\left((\overrightarrow{v}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}\right)$. Alors :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i \in [\![1,n]\!]}\right)$$

Théorème : soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors : f est injective SSI $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$; et f est surjective SSI Im $f = F$.

6 – Isomorphismes et automorphismes

Définition : soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. On appelle **isomorphisme** entre E et F (*resp.* **automorphisme** de E) une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ bijective (*resp.* un endomorphisme de E bijectif). Les ev E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme entre E et F.

Notation : GL(E) est l'ensemble des automorphismes de E.

Propriétés : la composée de deux iso(auto)morphismes est un iso(auto)morphisme. Si f est un isomorphisme entre E et F, alors f^{-1} est un isomorphisme entre F et E.

Corollaire : $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire de** E.

7 – Sommes de sev et sev supplémentaires

a – Sommes de sev

Définition : soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. La **somme de** F **et** G, notée $F + G$ est :

$$F+G = \left\{ \overrightarrow{v} \in E\ ,\ \exists \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G,\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} \right\}$$

Propriété. $F + G$ est un sev de E.

b – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition : deux sev F et G d'un même $\mathbb{K}$-ev E sont **supplémentaires (dans** E**)** lorsque tout vecteur de E s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, soit :

$$\forall\ \overrightarrow{v} \in E, \quad \exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}.$$

Dans ce cas, on note : $E = F \bigoplus G$, et on dit que E est la **somme directe** de F et de G.

Propriété (caractérisation des sev supplémentaires) : deux sev F et G de E sont supplémentaires SSI $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $E = F + G$.

c – Projections et symétries

Définition : soit E un $\mathbb{K}$-ev E ; F et G deux sev supplémentaires de E ($E = F \bigoplus G$). Ainsi : $\forall \overrightarrow{v} \in E, \quad \exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.
Avec ces hypothèses et notations, on appelle :

- **projection sur** F **parallèlement à** G l'application p_F de E dans E définie en posant $p_F\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{f}$;
- **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G l'application s_F de E dans E définie en posant $s_F\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$

Propriétés.
1) p_F est un endomorphisme de E, et $p_F^2 = p_F$. En outre : $\ker\left(p_F\right) = G$ et $\mathrm{Im}\left(p_F\right) = F$.
2) s_F est un automorphisme de E ($s_F \in \mathrm{GL}(E)$), et $s_F^2 = \mathrm{id}_E$ (s_F est une involution).

Remarques. $\mathrm{id}_E = p_F + p_G$, et $\ker(\mathrm{id}_E - p_F) = \mathrm{Im}(p_F)$

8 – Projecteurs

Définition : soit E un $\mathbb{K}$-ev. Un **projecteur** de E est un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.

Propriétés. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Si p est un projecteur, alors :

1) $\mathrm{id}_E - p$ est un projecteur

2) $\mathrm{Im}(p) = \ker(\mathrm{id}_E - p)$ et $\ker(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)$

Propriété (caractérisation des projecteurs). Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. LASSE :

1) p est un projecteur

2) $\mathrm{id}_E - p$ est un projecteur

3) $E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, et $p \in \mathscr{L}(E)$. Si p est un projecteur de E, alors p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Questions de cours

- **Propriété** : si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, alors $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$.
- **Propriété** : si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\ker f$ est un sev de E et $\mathrm{Im}\, f$ est un sev de F.
- **Théorème** : soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. f est injective SSI $\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
- **Propriété** : soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe une famille $(\overrightarrow{v}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ génératrice de E, c'est-à-dire une famille de vecteurs de E tels que $E = \mathrm{Vect}\left((\overrightarrow{v}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}\right)$.
  Alors : $\qquad \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\left(f\left(\overrightarrow{v}_i\right)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}\right)$
- **Propriété** : deux sev F et G de E sont supplémentaires SSI $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $E = F + G$.
- **Propriétés (des projections)** : soient F et G deux sev supplémentaires de E. On note p_F la projection sur F parallèlement à G. Alors p_F est un endomorphisme de E tel que $p_F^2 = p_F$. En outre : $\ker\left(p_F\right) = G$ et $\mathrm{Im}\left(p_F\right) = F$.
- **Propriété**. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. LASSE :

  1) p est un projecteur

  2) $E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$