Exercices 22 — Espaces vectoriels de dimension finie — Corrigé

Familles libres, bases

Exercice 1. — (Familles libres).

Dans chacun des cas suivants, déterminer si chacune des familles suivantes est libre ou liée.

1/ $E = \mathbb{R}^2$; $\quad \mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Supposons qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \right.$$

Conclusion. La famille $\mathscr{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

Synonyme : les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

2/ $E = \mathbb{R}^2$; $\quad \mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

On a :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion. La famille $\mathscr{F}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^2$.

Synonyme : les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas linéairement indépendants, ou sont linéairement dépendants.

3/ $E = \mathbb{R}^2$; $\quad \mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

On a : $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion. La famille $\mathscr{F}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^2$.

Synonyme : les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas linéairement indépendants...

4/ $E = \mathbb{R}_2[X]$; $\quad \mathscr{F} = \left\{ 1, 3X - 4, 2X^2 - X + 1 \right\}$

Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$a \times 1 + b\,(3X - 4) + c\left(2X^2 - X + 1\right) = 0$$

Par identification des coefs de X^2, on obtient : $c = 0$.

Par identification des coefs constants, on obtient : $a = 0$.

Il est alors trivial que $b = 0$.

Ainsi :

$$\left[a \times 1 + b\,(3X - 4) + c\left(2X^2 - X + 1\right) = 0\right] \Longrightarrow [a = b = c = 0]$$

Conclusion. La famille $\mathscr{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

Synonyme. Les polynômes 1, $3X - 4$ et $2X^2 - X + 1$ sont linéairement indépendants.

5/ $E = \mathbb{R}_2[X]$; $\mathscr{F} = \{X, X+1, X^2\}$

Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$aX + b(X+1) + cX^2 = 0$$

Par identification des coefs de X^2, on obtient : $c = 0$.

Par identification des coefs constants, on obtient : $b = 0$.

Il est alors trivial que $a = 0$.

Ainsi :

$$\left[aX + b(X+1) + cX^2 = 0\right] \Longrightarrow [a = b = c = 0]$$

Conclusion. La famille $\mathscr{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

Synonyme. Les polynômes X, $X+1$ et X^2 sont linéairement indépendants.

6/ $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$; $\mathscr{F} = \{\mathrm{I}_2, E_{11}, E_{22} - E_{11}\}$

On a :

$$\mathrm{I}_2 = (E_{22} - E_{11}) + 2E_{11}$$

Conclusion. La famille $\mathscr{F}$ est une famille liée de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

7/ $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\mathscr{F} = \{\sin, \cos\}$

Supposons qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\alpha \cos + \beta \sin = 0$$

Alors : $\alpha = 0$ (par évaluation en 0) et $\beta = 0$ (par évaluation en $\pi/2$).

Conclusion. La famille $\mathscr{F}$ est une famille libre de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

8/ $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\mathscr{F} = \{\exp, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}\}$

On a : $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$.

Conclusion. La famille $\mathscr{F}$ est une famille liée de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2. — (Bases et dimension).

Dans chacun des cas suivants, on demande de déterminer une base du sev F, et d'en déduire la dimension de F.

1/ $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0 \right\}$

Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$v \in F \Longleftrightarrow x + 2y - 3z = 0 \Longleftrightarrow x = 3z - 2y \Longleftrightarrow v = (3z - 2y, y, z)$$

Ainsi :

$$v \in F \Longleftrightarrow \exists\,(y, z) \in \mathbb{R}^2,\ v = y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1) \Longleftrightarrow v \in \operatorname{Vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$$

La famille $\mathscr{B} = \{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ est génératrice de F ; et elle est clairement libre (car de cardinal 2, et constituée de 2 vecteurs non colinéaires). C'est donc une base de F.

Conclusion. La famille $\mathscr{B} = \{(-2,1,0),(3,0,1)\}$ est une base de F. Donc : $\dim F = 2$.

2/ $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0\}$

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$P \in F \Longleftrightarrow P(0) = 0 \Longleftrightarrow \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = aX^2 + bX \Longleftrightarrow P \in \text{Vect}\left(X, X^2\right)$$

La famille $\mathscr{B} = \left\{X, X^2\right\}$ est génératrice de F ; et elle est clairement libre (car de cardinal 2, et constituée de 2 polynômes non colinéaires). C'est donc une base de F.

Conclusion. La famille $\mathscr{B} = \left\{X, X^2\right\}$ est une base de F. Donc : $\dim F = 2$.

3/ $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(2) = 0\}$

Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_3[X]$, on a :

$$P \in F \Longleftrightarrow \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{K}^3,\ P = a(X-2) + b(X-2)^2 + c(X-2)^3 \Longleftrightarrow P \in \text{Vect}\left(X-2, (X-2)^2, (X-2)^3\right)$$

La famille $\mathscr{B} = \left\{X-2, (X-2)^2, (X-2)^3\right\}$ est génératrice de F.

Justifions que $\mathscr{B}$ est libre. Supposons qu'il existe 3 réels a, b et c tels que :

$$a(X-2) + b(X-2)^2 + c(X-2)^3 = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$$

Alors : $c(X-2)^3 = -a(X-2) - b(X-2)^2$.

Si $c \neq 0$, alors le terme de gauche est un polynôme de degré 3, et celui de droite un polynôme de degré au plus 2 : contradiction.

Donc $c = 0$. Donc : $a(X-2) + b(X-2)^2 = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$. Donc : $a(X-2) = -b(X-2)^2$.

Si $b \neq 0$, alors le terme de droite est un polynôme de degré 2, et celui de gauche un polynôme de degré au plus 1 : contradiction.

Donc $b = 0$. Donc : $a(X-2) = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$. Donc : $a = 0$.

En résumé, on a établi l'implication :

$$\left[a(X-2) + b(X-2)^2 + c(X-2)^3 = 0_{\mathbb{K}_3[X]}\right] \Longrightarrow [a = b = c = 0]$$

Ce qui signifie que la famille $\mathscr{B} = \left\{X-2, (X-2)^2, (X-2)^3\right\}$ est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice de F, c'est une base de F.

Conclusion. La famille $\mathscr{B} = \left\{X-2, (X-2)^2, (X-2)^3\right\}$ est une base de F. Donc : $\dim F = 3$.

4/ Le sev F des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$

Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. On a :

$$M \in F \Longleftrightarrow \exists\ (a,b,c) \in \mathbb{K}^3,\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \exists\ (a,b,c) \in \mathbb{K}^3,\ M = aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}$$

Ainsi :

$$M \in F \Longleftrightarrow M \in \text{Vect}\,(E_{11}, E_{12}, E_{22})$$

La famille $\mathscr{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ est génératrice de F.

Justifions que $\mathscr{B}$ est libre. Supposons qu'il existe 3 réels a, b et c tels que :

$$aE_{11} + bE_{12} + cE_{22} = 0_{M_2(\mathbb{K})}$$

Alors : $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'où : $a = b = c = 0$.

En résumé, on a établi l'implication :

$$\left[aE_{11} + bE_{12} + cE_{22} = 0_{M_2(\mathbb{K})}\right] \Longrightarrow [a = b = c = 0]$$

Ce qui signifie que la famille $\mathscr{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice de F, c'est une base de F.

Conclusion. La famille $\mathscr{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ est une base de F. Donc : $\dim F = 3$.

5/ Le sev F des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$

Fait en classe.

Conclusion. La famille $\mathscr{B} = \{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$ est une base de F. Donc : $\dim F = 3$.

6/ Le sev F des fonctions f de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle : $\quad y'' - 6y' + 8y = 0$

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a :

$$f \in F \Longleftrightarrow y'' - 6y' + 8y = 0 \Longleftrightarrow \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ f = af_1 + bf_2$$

avec f_1 et f_2 définies en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \mathrm{e}^{2x} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^{4x}$$

Ainsi : $f \in F \Longleftrightarrow P \in \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$.

La famille $\mathscr{B} = \{f_1, f_2\}$ est génératrice de F ; et elle est clairement libre (car de cardinal 2, et constituée de 2 fonctions non colinéaires). C'est donc une base de F.

Conclusion. La famille $\mathscr{B} = \{f_1, f_2\}$ est une base de F. Donc : $\dim F = 2$.

7/ $F = \mathrm{im}\rho$ avec $\qquad \rho : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3$

On utilise la propriété bien connue du cours pour déterminer l'image de ρ.

Puisque $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3)$, on a : $\mathrm{im}(\rho) = \mathrm{Vect}\left(\rho(1), \rho(X), \rho(X^2), \rho(X^3)\right)$.

Or :

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \rho(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \rho(X^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \rho(X^3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que : $\mathrm{im}\rho = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}\right)$.

La famille $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est donc génératrice de F.

Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Alors :

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

La résolution aisée de ce système donne : $a = b = c = 0$.

En résumé, on a établi l'implication :

$$[av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}] \Longrightarrow [a = b = c = 0]$$

Ce qui signifie que la famille $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice de F, c'est une base de F.

Conclusion. La famille $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de F. Donc : $\dim F = 3$. Puisque de plus F est un sev de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que : $F = \mathbb{R}^3$ (l'application ρ est donc surjective).

Exercice 3. — (Familles libres et liées dans $\mathbb{K}[X]$). Déterminer si chacune des familles est libre ou liée.

1/ Considérons $\mathscr{F}_1 = \big(1, X-1, X^2 - X\big)$.

Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$a + b(X-1) + c(X^2 - X) = 0$$

Par identification, on obtient successivement $c = 0$ (comparaison des termes en X^2), $b = 0$ (comparaison des termes en X) puis $a = 0$ (immédiat).

Ainsi :

$$\big[a + b(X-1) + c(X^2 - X) = 0\big] \Longrightarrow [a = b = c = 0]$$

Conclusion. La famille $\mathscr{F}_1 = \big(1, X-1, X^2 - X\big)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

2/ Considérons $\mathscr{F}_2 = \big(2X+1, X^2+X, 2X^2-1\big)$.

Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$a(2X+1) + b(X^2+X) + c(2X^2-1) = 0$$

Par identification, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} b + 2c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ a - c = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -2a \\ c = a \end{array}\right.$$

En particulier, si l'on choisit $a = 1$, on a : $b = -2$ et $c = 1$. D'où :

$$(2X+1) - 2(X^2+X) + (2X^2-1) = 0$$

Conclusion. La famille $\mathscr{F}_2 = \big(2X+1, X^2+X, 2X^2-1\big)$ est une famille liée de $\mathbb{K}[X]$.

3/ Considérons $\mathscr{F}_3 = \big(X^2, X^2 - X, X^2 - 2X\big)$.

Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$a(X^2) + b(X^2 - X) + c(X^2 - 2X) = 0$$

Par identification, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} a + b + c = 0 = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = c \\ b = -2c \end{array}\right.$$

En particulier, si l'on choisit $c = 1$, on a : $b = -2$ et $a = 1$. D'où :

$$X^2 - 2(X^2 - X) + (X^2 - 2X) = 0$$

Conclusion. La famille $\mathscr{F}_3 = \big(X^2, X^2 - X, X^2 - 2X\big)$ est une famille liée de $\mathbb{K}[X]$.

4/ Considérons $\mathscr{F}_4 = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ où les L_i sont les polynômes (de degré 3) d'interpolation de Lagrange associés aux valeurs 1, 2, 3 et 4.

Supposons qu'il existe quatre réels $\alpha_1, \ldots,\ \alpha_4$ tels que :

$$\underbrace{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4}_{=P} = 0$$

Par évaluation en 1, on obtient : $\alpha_1 = 0$ (puisque $P(1) = \alpha_1$).

Par évaluation en 2, on obtient : $\alpha_2 = 0$ (puisque $P(2) = \alpha_2$).

Par évaluation en 3, on obtient : $\alpha_3 = 0$ (puisque $P(3) = \alpha_3$).

Par évaluation en 4, on obtient : $\alpha_4 = 0$ (puisque $P(4) = \alpha_4$).

Ainsi :

$$[\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4 = 0] \Longrightarrow [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0]$$

Conclusion. La famille $\mathscr{F}_4 = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 4. — (Bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$). Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1/ $F_1 = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ {}^tA = A\}$.

La famille $\{E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$ est libre et génératrice de F_1.
Conclusion. La famille $\{E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$ est une base de F_1. Donc $\dim(F_1) = 3$ (F_1 est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).

2/ $F_2 = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ {}^tA = -A\}$.

La famille $\{E_{12} - E_{21}\}$ est libre et génératrice de F_2.
Conclusion. La famille $\{E_{12} - E_{21}\}$ est une base de F_2. Donc $\dim(F_2) = 1$ (F_2 est une droite vectorielle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).

3/ $F_3 = \{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tA = A\}$.

La famille $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}\}$ est libre et génératrice de F_3.
Conclusion. La famille $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}\}$ est une base de F_3. Donc $\dim(F_3) = 6$ (F_3 est un sev de dimension 6 dans un espace vectoriel de dimension 9).

4/ $F_4 = \{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tA = -A\}$.

La famille $\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$ est libre et génératrice de F_4.
Conclusion. La famille $\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$ est une base de F_4. Donc $\dim(F_4) = 3$ (F_4 est un sev de dimension 3 dans un espace vectoriel de dimension 9).

5/ $F_5 = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ diagonale}\}$.

La famille $\{E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}\}$ est libre et génératrice de F_5.
Conclusion. La famille $\{E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}\}$ est une base de F_5. Donc $\dim(F_5) = n$ (F_5 est un sev de dimension n dans un espace vectoriel de dimension n^2).

Exercice 5. — (ker et im). On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + y + t \\ x + z - t \end{pmatrix}$$

On admet que f est linéaire.

1/ Déterminer le noyau de f. En préciser une base et la dimension.

Soit $\overrightarrow{v} = (x, y, z, t) \in \ker f$. On a : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 0 \\ x + y + t & = & 0 \\ x + z - t & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 0 \\ x + y & = & -t \\ x + z & = & t \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & -t \\ x + z & = & t \end{array}\right.$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -x - t \\ z & = & t - x \end{array}\right.$$

En résumé : $\overrightarrow{v} \in \ker f \Longleftrightarrow \exists\ (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{v} = (x, -x - t, t - x, t)$. Par suite : $\boxed{\ker f = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v_2}}\right)}$.

La famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est génératrice de $\ker f$ (c'est ce que l'on vient de prouver) et libre ($\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont clairement non colinéaires) ; c'est donc une base de $\ker f$, et l'on peut conclure que : $\boxed{\dim \ker f = 2}$.

2/ Déterminer l'image de f. En préciser une base et la dimension.

En vertu de la "propriété bien connue", on a : $\text{im } f = \text{Vect}\left(f\left(\overrightarrow{e_1}\right), f\left(\overrightarrow{e_2}\right), f\left(\overrightarrow{e_3}\right), f\left(\overrightarrow{e_4}\right)\right)$, où les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ constituent la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On a donc : $\text{im } f = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_3}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_4}}\right)$ et l'embarras du choix pour réduire cette famille génératrice.

En observant (par exemple) que : $\overrightarrow{w_4} = \overrightarrow{w_2} - \overrightarrow{w_3}$, on obtient : $\text{im } f = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_3}}\right)$

Puis en observant que : $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{w_3}$, on peut affirmer que : $\text{im } f = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_3}}\right)$.

La famille $(\overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3})$ est génératrice de $\text{im} f$ (c'est ce que l'on vient de prouver) et libre ($\overrightarrow{w_2}$ et $\overrightarrow{w_3}$ sont clairement non colinéaires) ; c'est donc une base de $\text{im} f$, et l'on peut conclure que : $\boxed{\dim \text{im} f = 2}$.

Exercice 6. — **(Bases).** On considère la famille $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ de $M_2(\mathbb{K})$, où l'on a posé :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $M_2(\mathbb{K})$.

Montrons que la famille $\mathscr{B}'$ est libre.
Soient a, b, c et d quatre réels tels que $aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0_E$, alors :

$$\begin{pmatrix} a-b & b-a-c \\ c-b-d & d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b = a+c \\ c = b+d \\ c = d \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que la famille $\mathscr{B}'$ est libre ; et puisque son cardinal (4) est égal à la dimension de E, on peut conclure : $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } E}$.

Exercice 7. — (Bases et dimension). On considère l'application $\varphi : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_3[X]$ définie en posant :

$$\forall P \in \mathbb{K}_3[X],\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1/ Montrer que φ est linéaire.

Trivial.

2/ Déterminer $\ker\varphi$ et $\operatorname{im}\varphi$.

Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. Il existe quatre réels a, b, c et d tels que : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

On a alors :

$$P \in \ker\varphi \Longleftrightarrow \varphi(P) = 0 \Longleftrightarrow P(X+1) = P(X) \Longleftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\Longleftrightarrow aX^3 + 3aX^2 + 3aX + a + bX^2 + 2bX + b + cX + c + d = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\Longleftrightarrow aX^3 + (3a+b)X^2 + (3a+2b+c)X + a + b + c + d = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = a \\ 3a + b = b \\ 3a + 2b + c = c \\ a + b + c + d = d \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Par suite :

$$P \in \ker\varphi \Longleftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{K},\ P = d$$

Conclusion. $\ker\varphi = \operatorname{Vect}(1)$.

Par ailleurs :

$$\mathbb{K}_3[X] = \operatorname{Vect}(1, X, X^2, X^3) \text{ donc } \operatorname{im}\varphi = \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$$

D'où : $\operatorname{im}\varphi = \operatorname{Vect}(0, 1, 2X+1, 3X^2+3X+1)$. **Conclusion**. $\operatorname{im}\varphi = \operatorname{Vect}(1, 2X+1, 3X^2+3X+1)$.

3/ Préciser une base pour chacun des sev $\ker\varphi$ et $\operatorname{im}\varphi$, en déduire leur dimension.

D'après la question précédente : $\ker\varphi = \operatorname{Vect}(1)$. Donc $\{1\}$ est une base de $\ker\varphi$.[1].

Conclusion. $\{1\}$ est une base de $\ker\varphi$. Donc $\dim(\ker\varphi) = 1$.

D'après la question précédente : $\operatorname{im}\varphi = \operatorname{Vect}(1, 2X+1, 3X^2+3X+1)$. Donc $\left\{1, 2X+1, 3X^2+3X+1\right\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{im}\varphi$.

Montrons qu'elle est libre.

Supposons qu'il existe 3 réels x, y et z tels que :

$$x + y(2X+1) + z(3X^2+3X+1) = 0$$

Alors par identification on obtient : $z = y = x = 0$.[2]

On en déduit que la famille $\left\{1, 2X+1, 3X^2+3X+1\right\}$ est libre.

Conclusion. La famille $\left\{1, 2X+1, 3X^2+3X+1\right\}$ est libre et génératrice de $\operatorname{im}\varphi$. C'est donc une base de $\operatorname{im}\varphi$. Donc $\dim(\operatorname{im}\varphi) = 3$.

---

1. Un singleton $\{\overrightarrow{v}\}$ est une famille libre SSI $\overrightarrow{v}$ est non nul.
2. Comparer les termes en X^2, puis en X puis constants.

Exercice 8. — (Bases et dimension). Dans chacun des cas suivants, on demande de déterminer une base du sev F, et d'en déduire la dimension de F.

1/ $F = \{A \in M_3(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$

La famille $\mathscr{F} = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, -(E_{11} + E_{12} + E_{13} + E_{21} + E_{22} + E_{23} + E_{31} + E_{32})\}$ est génératrice de F, et libre.

Donc $\mathscr{F}$ est une base de F. **Conclusion**. $\dim F = 8$. (on dit que F est un hyperplan de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

2/ Le sev F des fonctions f de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle : $y' - 6y = 0$

$F = \mathrm{Vect}\left(\exp^6\right)$. Donc : $F = \left\{\exp^6\right\}$ est une base de F.

Conclusion. $\dim F = 1$. (on dit que F est une droite vectorielle de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3/ $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(1) = 0 \wedge\ P'(1) = 0\}$

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_4[X]$ appliquée en 1 : $F = \mathrm{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4\right)$.

La famille $\mathscr{F} = \left\{(X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4\right\}$ est génératrice de F, et il est aisé de justifier qu'elle est libre.[3]

Conclusion. $\dim F = 3$.

4/ $F = \ker\varphi$ avec $\varphi : P \in \mathbb{K}_2[X] \mapsto (P(0), P'(0)) \in \mathbb{R}^2$

C'est un copier-coller de la question précédente. On a : $\ker\varphi = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(0) = 0 \wedge\ P'(0) = 0\}$.

Conclusion. La famille $\left\{X^2\right\}$ est une base de F. Donc $\dim F = 1$. (on dit que F est une droite vectorielle de $\mathbb{K}_2[X]$).

3. Utiliser les degrés, et le corrigé des exos de math39 au besoin.

Exercice 9. — Dans cet exercice, on note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Par ailleurs, on définit sur $\mathbb{R}$ trois fonctions g_1, g_2 et g_3 en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{2x} ; \qquad g_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \cos\left(x\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \qquad g_3 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \sin\left(x\sqrt{3}\right)$$

Enfin on note F le sev de E engendré par les fonctions g_i définies ci-dessus, càd :

$$F = \operatorname{Vect}(g_1, g_2, g_3)$$

Montrer que la famille $\mathscr{F} = \{g_1, g_2, g_3\}$ est une base de F.

Supposons qu'il existe 3 réels α_1, α_2, α_3 tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \alpha_i g_i = 0$.

Il est équivalent d'écrire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x) = 0$$

soit encore plus explicitement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1 \mathrm{e}^{2x} + \alpha_2 \mathrm{e}^{-x} \cos\left(x\sqrt{3}\right) + \alpha_3 \mathrm{e}^{-x} \sin\left(x\sqrt{3}\right) = 0 \qquad (\spadesuit)$$

Il est clair que : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^{-x} \cos\left(x\sqrt{3}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin\left(x\sqrt{3}\right) = 0$.[4]

On en déduit, avec $(\spadesuit)$ que : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \alpha_1 \mathrm{e}^{2x} = 0$. Ceci implique que : $\alpha_1 = 0$.

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_2 \mathrm{e}^{-x} \cos\left(x\sqrt{3}\right) + \alpha_3 \mathrm{e}^{-x} \sin\left(x\sqrt{3}\right) = 0$$

Par évaluation en 0, on en déduit que : $\alpha_2 = 0$.

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_3 \mathrm{e}^{-x} \sin\left(x\sqrt{3}\right) = 0$$

D'où l'on déduit que $\alpha_3 = 0$ puisque la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \sin\left(x\sqrt{3}\right)$ n'est pas identiquement nulle.

En résumé, on a établi que :

$$\left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_i g_i = 0\right] \Longrightarrow [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0]$$

Ce qui signifie que la famille $\{g_1, g_2, g_3\}$ est libre.

Puisqu'il est trivial que c'est également une famille génératrice de $\operatorname{Vect}(g_1, g_2, g_3)$, on peut conclure.

Conclusion. La famille $\{g_1, g_2, g_3\}$ est une base de $F = \operatorname{Vect}(g_1, g_2, g_3)$. Donc $\dim F = 3$.

Exercice 10. — $^{(*)}$ **(Une famille libre arbitrairement grande dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).** Soient $n \geqslant 1$ un entier naturel, et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n réels distincts ; on suppose $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
On considère la famille $F_n = \left(f_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha_k x},\ k \in [\![1, n]\!]\right)$. Montrer que F_n est une famille libre de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

S'inspirer de l'exo précédent, et penser aux limites. . . .

Exercice 11. — Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère la famille de polynômes

$$\mathscr{F} = \left\{ \underbrace{(X-1)(X-2)(X-3)}_{=P_0}, \underbrace{X(X-2)(X-3)}_{=P_1}, \underbrace{X(X-1)(X-3)}_{=P_2}, \underbrace{X(X-1)(X-2)}_{=P_3} \right\}$$

Montrer que $\mathscr{F}$ est libre.

Supposons qu'il existe quatre réels $\alpha_1, \ldots,\ \alpha_4$ tels que :

$$\underbrace{\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4}_{=P} = 0$$

4. Bornée $\times$ limite nulle.

Par évaluation en 0, on obtient : $\alpha_1 = 0$ (puisque $P(0) = -6\alpha_1$).

Par évaluation en 1, on obtient : $\alpha_2 = 0$ (puisque $P(1) = 2\alpha_2$).

Par évaluation en 2, on obtient : $\alpha_3 = 0$ (puisque $P(2) = -2\alpha_3$).

Par évaluation en 3, on obtient : $\alpha_4 = 0$ (puisque $P(3) = 6\alpha_4$).

Ainsi :

$$[\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = 0] \Longrightarrow [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0]$$

Conclusion. La famille $\mathscr{F} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque. A des constantes multiplicatives près, la famille $\mathscr{F} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est celle des 4 polynômes de Lagrange de $\mathbb{K}_3[X]$ associés aux scalaires 0, 1, 2 et 3. C'est une autre façon de dire que cet exo est le même que la question 4 de l'exo 1 de la feuille précédente.

Exercice 12. — **(Transport de bases).** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme de E dans F, et $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ une base de E.

On note $\varphi(\mathscr{B}) = \{\varphi(\overrightarrow{v_1}), \ldots, \varphi(\overrightarrow{v_1})\}$ l'image de $\mathscr{B}$ par φ.

Montrer que $\varphi(\mathscr{B})$ est une base de F.

On prouve ainsi l'énoncé :

"L'image d'une base par un isomorphisme est une base"

Cf cours sans doute !

Exercice 13. — **(Conséquence du "transport de bases").** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.

On suppose que $\dim(E) = n$, et que E et F sont isomorphes (càd qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ de E dans F).

Etablir que $\dim(F) = n$

On prouve ainsi l'énoncé :

"Deux ev de dimension finie isomorphes ont la même dimension."

Soit $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ une base de E, et $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme de E dans F.

On montre facilement que la famille $\varphi(\mathscr{B}) = \{\varphi(\overrightarrow{v_1}), \ldots, \varphi(\overrightarrow{v_n})\}$ est génératrice de F (en utilisant le fait que $\mathscr{B}$ est une base de E, et la surjectivité de φ), et libre (en utilisant l'injectivité de φ). [5]

Donc la famille $\varphi(\mathscr{B})$ est une base de F. Par conséquent : $\dim F = \operatorname{card}(\varphi(\mathscr{B}))$.

Conclusion. $\dim(F) = n$.

Exercice 14. — **(Familles échelonnées de polynômes)**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans $\mathbb{K}[X]$, on considère n polynômes P_1,..., P_n tous non nuls.

On suppose que :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$$

Montrer que la famille $\mathscr{F} = (P_1, \cdots, P_n)$ est libre.

On prouve ainsi l'énoncé :

"Toute famille échelonnée de polynômes est libre"

Cf cours sans doute !

5. Au passage, c'est une magnifique question de cours !

Exercice 15. — **(Challenge).** Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \longmapsto P + XP''$$

est bijective (on pourra admettre que f est linéaire).

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a : $P \in \ker f \iff f(P) = 0 \iff P = -XP''$.

On vérifie alors sans peine (essentiellement par comparaison des degrés) $P \in \ker f \iff P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Par suite : $\ker f = \left\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\right\}$. **Donc l'endomorphisme f est injectif.**

Par ailleurs, d'après le cours :

$$\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) \qquad \text{en ayant noté} \qquad \mathscr{F} = \{f(1), f(X), \ldots, f(X^n)\}$$

Or pour tout entier k compris entre 0 et n, on a clairement :

$$\deg(f(X^k)) = k$$

En d'autres termes, la famille $\mathscr{F}$ est une famille échelonnée de polynômes. Elle est donc libre, d'après l'exo précédent.

Comme de plus :

$$\operatorname{card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

on en déduit que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par suite :

$$\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) = \mathbb{R}_n[X] \qquad \textbf{Donc l'endomorphisme } f \textbf{ est surjectif.}$$

Conclusion. L'endomorphisme f est bijectif. C'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ($f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_n[X])$).

Exercice 16. — **(Une base classique de $\mathbb{K}_n[X]$).** Soient n un entier naturel non nul, et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire quelconque.

On considère la famille

$$\mathscr{B} = \left\{1, X - \alpha, (X-\alpha)^2, \ldots, (X-\alpha)^n\right\}$$

On se propose de prouver de deux manières différentes que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1/ Justifier que $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

La famille $\mathscr{B}$ est une famille échelonnée de polynômes non nuls : à ce titre, c'est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus : $\operatorname{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$.

Conclusion : $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$, et $\operatorname{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2/ Justifier que $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_n[X]$ appliquée en α :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \qquad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = P(\alpha) + P'(\alpha)(X-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n$$

D'où : $\mathbb{K}_n[X] = \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$. La famille $\mathscr{B}$ est donc génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus : $\operatorname{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$.

Conclusion : $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, et $\operatorname{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 17. — (Une autre base classique de $\mathbb{K}_n[X]$ — Polynômes interpolateurs de Lagrange). Soit n un entier naturel non nul.

On considère $(n+1)$ scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts.

On note $L_0, \ldots, L_n$ les $(n+1)$ polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

1/ Question de cours : rappeler l'expression du polynôme L_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

A savoir retrouver !!!

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(X-\alpha_i)}{(\alpha_k - \alpha_i)}$$

2/ Etablir que la famille $\mathscr{B} = \{L_0, \ldots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Méthode 1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k$$

D'où : $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$. La famille $\mathscr{B}$ est donc génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus : $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$.

Conclusion : $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, et $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

➤ **Méthode 2**. Supposons qu'il existe $(n+1)$ scalaires $\beta_0, \ldots, \beta_n$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k L_k = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$$

Alors :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{k=0}^{n} \beta_k \underbrace{L_k(\alpha_i)}_{=\delta_{ik}} = \beta_i = 0$$

On a ainsi établi que :

$$\left[\sum_{k=0}^{n} \beta_k L_k = 0_{\mathbb{K}_n[X]}\right] \Longrightarrow \left[\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \beta_i = 0\right]$$

Ce qui signifie que $\mathscr{B}$ une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus : $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$.

Conclusion : $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$, et $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 18. — (Supplémentaires). Dans cette partie, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.
On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$, et on note G le sev des matrices de E de trace nulle.

1/ Déterminer la dimension de F et la dimension de G.

Comme on l'a vu dans le live, il est immédiat que $\dim F = 1$ et on montre aisément que $\dim G = 3$.

2/ Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

On vérifie sans difficulté que $F \cap G = \left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$. Par suite :

$$\begin{cases} \dim F + \dim G = \dim \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ F \cap G = \left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right\} \end{cases}$$

On en déduit [6] que :

$$\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = F \bigoplus G$$

Exercice 19. — (Supplémentaires bis). Dans $E = \mathbb{K}_2[X]$ on considère les sev

$$F = \text{Vect}\left(X^2 + X + 1,\ 5X + 2\right) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(X^2 - X).$$

On pourra noter $P_1 = X^2 + X + 1$; $P_2 = 5X + 2$; $P_3 = X^2 - X$.

1/ Etablir que : $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{K}_2[X]}\right\}$.

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Supposons que $P \in F \cap G$. Alors il existe trois réels a, b et c tels que :

$$P = a\left(X^2 + X + 1\right) + b(5X + 2)\ (\text{car } P \in F) \quad \text{et} \quad P = c(X^2 - X)\ (\text{car } P \in G)$$

Ainsi :

$$a\left(X^2 + X + 1\right) + b(5X + 2) = c(X^2 - X)$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} a = c \\ a + 5b = -c \\ a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ 2a + 5b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ 2a + 5b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

D'où $P = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$. **Conclusion**. $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{K}_2[X]}\right\}$

2/ En déduire que : $E = F \bigoplus G$.

Puisque F est engendré par deux polynômes non colinéaires, on a : $\dim F = 2$.

Puisque G est engendré par un polynôme non nul, on a : $\dim G = 1$.

Par suite :

$$\begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E & (2{+}1{=}3\ldots) \\ F \cap G = \left\{0_{\mathbb{K}_2[X]}\right\} & (\text{d'après la question précédente}) \end{cases}$$

On en déduit [7] que :

$$\mathbb{K}_2[X] = F \bigoplus G$$

3/ Justifier que $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

D'après la question précédente, on a en particulier : $\mathbb{K}_2[X] = \text{Vect}\,(P_1, P_2) + \text{Vect}\,(P_3)$.

D'où : $\mathbb{K}_2[X] = \text{Vect}\,(P_1, P_2, P_3)$.

Il s'ensuit que la famille $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$.

De plus, le cardinal de $\mathscr{B}'$ est égal à la dimension de $\mathbb{K}_2[X]$. On peut donc conclure que **$\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.**

Exercice 20. — Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère la partie F constituée des polynômes P tels que $P(1) = P(-1)$.

1/ Montrer que F est un sev de E, en déterminer une base, et en déduire la dimension de F.

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X] : \exists\,(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Alors : $P \in F \iff P(1) = P(-1) \iff a + b + c + d = -a + b - c + d \iff c = -a$.

Par suite :

6. Avec la nouvelle caractérisation des sev supplémentaires obtenue comme conséquence du T4D.
7. Encore une fois avec la nouvelle caractérisation des sev supplémentaires obtenue comme conséquence du T4D.

$$P \in F \iff \exists\,(a,b,d) \in \mathbb{R}^3,\ P = a(X^3-X)+bX^2+d \iff P \in \text{Vect}\left(X^3-X, X^2, 1\right)$$

Ainsi :

$$F = \text{Vect}\left(X^3-X, X^2, 1\right)$$

La famille $\left\{X^3-X, X^2, 1\right\}$ est génératrice de F (archi-trivial), et puisque c'est une famille échelonnée de polynômes, elle est libre. C'est donc une base de F.

Conclusion. La famille $\left\{X^3-X, X^2, 1\right\}$ est une base de F. Donc : $\dim F = 3$.

2/ Soit $G = \text{Vect}(X)$. Montrer que : $E = F \bigoplus G$.

D'après la question précédente : $\dim F = 3$.

D'après le cours : $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$.

En outre : $\dim G = 1$, puisque G est engendré par un polynôme non nul.

Par ailleurs, on vérifie sans peine que : $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\right\}$.

Ainsi :

$$\left.\begin{array}{c} \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}_3[X] \\ \\ F \cap G = \left\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\right\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{R}_3[X] = F \bigoplus G$$

Conclusion. F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 21. — **(Très très classique).** Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'endomorphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\longmapsto P - P' \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Un polynôme P est dans le noyau de f si et seulement si $P = P'$. Par comparaison des degrés, cette égalité est vérifiée si et seulement si le polynôme P est nul. On en déduit que l'endomorphisme f **est injectif**.

Par ailleurs :

$$\text{im}f = \text{Vect}\left(f(1), f(X), \ldots, f(X^n)\right) \iff \text{im}f = \text{Vect}\left(1, X-1, \ldots, X^k - kX^{k-1}, \ldots, X^n - nX^{n-1}\right)$$

La famille $\left\{1, X-1, \ldots, X^k - kX^{k-1}, \ldots, X^n - nX^{n-1}\right\}$ est une famille échelonnée de polynômes non nuls de $\mathbb{K}_n[X]$; à ce titre elle est libre. Comme en outre son cardinal $(n+1)$ est égal à la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On en déduit que :

$$\text{im}f = \text{Vect}\left(1, X-1, \ldots, X^k - kX^{k-1}, \ldots, X^n - nX^{n-1}\right) = \mathbb{K}_n[X]$$

Il s'ensuit que l'endomorphisme f **est surjectif**.

Donc l'endomorphisme f **est bijectif**.

Conclusion. L'endomorphisme f est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Coordonnées dans une base, matrice de passage

Exercice 22. — **(Coordonnées dans $\mathbb{R}_3[X]$).**

Quelles sont les coordonnées de $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$ dans :

1/ la base canonique $\mathscr{B}_1 = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$?

Avec les notations du cours, il est immédiat que : $X_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2/ la base $\mathscr{B}_2 = \left(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$?

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{R}_3[X]$ appliquée en 1, on a :

$$X_{\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \\ P''(1)/2 \\ P'''(1)/6 \end{pmatrix} \qquad \text{càd} \qquad X_{\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3/ la base $\mathscr{B}_3 = (L_0, L_1, L_2, L_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, où les L_1 désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels 0, 1, 2 et 3 ?

D'après les propriétés relatives aux polynômes interpolateurs de Lagrange, on a :

$$X_{\mathscr{B}_3} = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \end{pmatrix} \qquad \text{càd} \qquad X_{\mathscr{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 15 \\ 43 \end{pmatrix}$$

Exercice 23. — **(Matrice de passage)**. On considère la famille $\mathrm{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ avec :

$$P_1 = X^2 - 1\,; \qquad P_2 = (X-1)^2\,; \qquad P_3 = (X+1)^2$$

1/ Etablir que la famille B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient a, b et c trois réels tels que : $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

Alors :

$$a(X^2-1) + b(X-1)^2 + c(X+1)^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

Par évaluation en 1, on en déduit que : $c = 0$.

Donc :

$$a(X^2-1) + b(X-1)^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

Par évaluation en -1, on en déduit que : $b = 0$.

Donc :

$$a(X^2-1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

D'où : $a = 0$.

On a ainsi établi que :

$$\left[aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\right] \Longrightarrow [a = b = c = 0]$$

La famille B' est donc libre. Puisqu'en outre son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut conclure : B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.

La matrice de passage de la base B à la base B' est : $P = P_{\mathrm{BB}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3/ Après avoir brièvement justifié que P est inversible, calculer P^{-1}.[8]

Soient (x, y, z) et (b_1, b_2, b_3) dans $\mathbb{R}^3$.

On a : $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y+z = b_1 \\ -2y+2z = b_2 \\ x+y+z = b_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y+z-b_1 \\ -2y+2z = b_2 \\ 2y+2z = b_1+b_3 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y+z-b_1 \\ 4y = b_1-b_2+b_3 \\ 4z = b_1+b_2+b_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = (b_3-b_1)/2 \\ y = (b_1-b_2+b_3)/4 \\ z = (b_1+b_2+b_3)/4 \end{cases}$$

Conclusion. $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 24. — **(Changement de base)** Dans cet exercice, on considère l'espace vectoriel $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On rappelle que la **base canonique** de E est la base $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1/ On considère la famille $\mathscr{B}' = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, où l'on a posé :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Soient a, b, c et d quatre réels tels que $aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0_E$, alors :

$$\begin{pmatrix} a-b & b-a-c \\ c-b-d & d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b = a+c \\ c = b+d \\ c = d \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que la famille $\mathscr{B}'$ est libre ; et puisque son cardinal (4) est égal à la dimension de E, on peut conclure : $\mathscr{B}'$ est une base de E.

2/ Ecrire la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

On a : $P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3/ Justifier brièvement que P est inversible, et calculer P^{-1}.

La matrice P est inversible car c'est une matrice de passage.

Calculons son inverse en résolvant le système linéaire bien connu. Pour X et B deux vecteurs de $\mathbb{K}^4$ on a :

$$PX = B \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = b_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = b_2 \\ - x_2 + x_3 - x_4 = b_3 \\ - x_3 + x_4 = b_4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = -b_3 - b_4 \\ x_1 = b_1 - b_3 - b_4 \\ x_3 = -b_1 - b_2 \\ x_4 = -b_1 - b_2 + b_4 \end{cases}$$

8. On pourra vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{4}R$, où $R \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients appartiennent à $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Conclusion : P est inversible et $P^{-1} = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 25. — **Algèbre linéaire**

Dans cet exercice, on note $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients réels.

On note $\mathbf{B} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ la base canonique de E ; et I_2 la matrice identité de E.

Enfin, on note :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ On considère le sev :

$$F = \mathrm{Vect}\,(M_1, M_2, M_3)$$

Montrer que la famille $\mathbf{B}_1 = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de F.

Soient a, b et c trois réels tels que : $aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Alors : $\begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & 2a \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. D'où : $a = b = c = 0$.

La famille $\{M_1, M_2, M_3\}$ est donc libre, et génératrice de F : par suite, c'est une base de F.

Conclusion. $\dim F = 3$. Donc F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ (puisque $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4).

2/ On pose : $G = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2)$. Etablir que F et G sont supplémentaires dans E.

Si I_2 appartenait à F, il existerait trois réels a, b et c tels que : $\mathrm{I}_2 = aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0$. Cette égalité impliquerait en particulier : $a = 2a = 1$, ce qui est absurde. Donc : $\mathrm{I}_2 \notin F$.

Conclusion. Puisque F est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et que $\mathrm{I}_2 \notin F$, le cours assure que :

$$E = F \bigoplus \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2).$$

3/ On introduit à présent la famille :

$$\mathbf{B'} = \{M_1, M_2, M_3, \mathrm{I}_2\}$$

Etablir que **B'** est une base de E.

D'après la question précédente et l'énoncé, on a :

$$E = F + \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}\,(M_1, M_2, M_3) + \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3, \mathrm{I}_2)$$

Il s'ensuit que **B'** est génératrice de E. Puisqu'en outre son cardinal est égal à la dimension de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on peut conclure.

Conclusion. **B'** est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4/ Ecrire la matrice de passage P de la base **B** à la base **B'**.

D'après le cours : $P_{\mathbf{BB'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5/ Donner les coordonnées de la matrice $\mathbf{E}_{11}$ dans la base $\mathbf{B}$, ainsi que dans la base $\mathbf{B'}$.

Les coordonnées de $\mathbf{E}_{11}$ dans la base $\mathbf{B}$ sont clairement : $(1, 0, 0, 0)$.

Pour avoir les coordonnées de cette matrice dans la base $\mathbf{B'}$, on peut utiliser la matrice de passage (inverse à calculer) et la formule du cours, ou chercher à exprimer $\mathbf{E}_{11}$ en fonction des éléments de $\mathbf{B'}$ (ce n'est pas trop difficile).

En observant que $\mathbf{E}_{11} = 2\mathrm{I}_2 - M_1$, on peut conclure que les coordonnées de $\mathbf{E}_{11}$ dans la base $\mathbf{B'}$ sont : $(-1, 0, 0, 2)$.

Exercice 26. — **(Racines carrées de l'identité de $\mathbb{K}_2[X]$)** Dans cet exercice, $\mathbf{E}_1$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbf{B} = \left\{1, X, X^2\right\}$ la base canonique de $\mathbf{E}_1$.

On note : $\quad P_1 = X(X-1)\,; \quad P_2 = X(X-2)\,; \quad$ et $\quad P_3 = (X-1)(X-2)$.

Enfin, on note : $\quad F = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2) \quad$ et $\quad G = \mathrm{Vect}(P_3)$.

1/ Etablir que $\mathbf{B'} = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbf{E}_1$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = \tilde{0}$.

Alors : $\alpha_1 X(X-1) + \alpha_2 X(X-2) + \alpha_3 (X-1)(X-2) = \tilde{0}$

Par évaluation en 0, on en déduit : $\alpha_3 = 0$. D'où : $\alpha_1 X(X-1) + \alpha_2 X(X-2) = \tilde{0}$

Par évaluation en 1, on en déduit : $\alpha_2 = 0$. D'où : $\alpha_1 X(X-1) = \tilde{0}$. D'où : $\alpha_1 = 0$

Ainsi : $\left[\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = \tilde{0}\right] \Longrightarrow [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0]$. Ce qui prouve que la famille $\mathbf{B'}$ est libre.

Donc $\mathbf{B'}$ est une famille libre de $\mathbf{E}_1$, telle que $\mathrm{Card}(\mathbf{B'}) = \dim \mathbf{E}_1$.

Conclusion. $\mathbf{B'}$ est une base de $\mathbf{E}_1$.

2/ Etablir que : $\quad \mathbf{E}_1 = F \bigoplus G$.

D'après la question précédente, $\mathbf{B'}$ est génératrice de $\mathbf{E}_1$. D'où :

$$\mathbf{E}_1 = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2) + \mathrm{Vect}(P_3) = F + G \qquad (\spadesuit)$$

En outre, il est clair que $\dim F = 2$ et $\dim G = 1$. Or selon le T4D : $\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim F + G \qquad (\clubsuit)$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\dim F \cap G = 0$. D'où : $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathbf{E}_1}\right\}$.

Conclusion. On a prouvé que : $\mathbf{E}_1 = F + G$ et $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathbf{E}_1}\right\}$. Donc : $\mathbf{E}_1 = F \bigoplus G$.

3/ Ecrire la matrice de passage $P_{\mathbf{BB'}}$ de la base $\mathbf{B}$ à la base $\mathbf{B'}$.[9]

On a : $P_1 = X^2 - X\,; \quad P_2 = X^2 - 2X\,; \quad$ et $\quad P_3 = X^2 - 3X + 2$.

D'après le cours : $P_{\mathbf{BB'}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4/ **Etude d'une symétrie**. On note s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On rappelle que s_F est un endomorphisme de $\mathbf{E}_1$.

a/ Etablir que : $\qquad (s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E}_1)}$

On a : $(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = s_F^2 - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}$. Or $s_F^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}$ (par définition de S_F).

Conclusion. $(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E}_1)}$

9. Cette question a un unique intérêt : rapporter un point à tout.e étudiant.e qui sait traiter cette question de cours. La matrice $P_{\mathbf{BB'}}$ ne sera pas réutilisée dans la suite du problème.

b/ Justifier brièvement que : $\forall Q \in \mathbf{E}_1,\ \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

La famille **B'** $= \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbf{E}_1$. Tout polynôme Q de $\mathbf{E}_1$ admet donc un unique triplet de coordonnées dans cette base.

Conclusion. $\forall Q \in \mathbf{E}_1,\ \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

c/ Calculer $s_F(P_1)$, $s_F(P_2)$ et $s_F(P_3)$.

Puisque P_1 et P_2 appartiennent à F, on a $s_F(P_1) = P_1$ et $s_F(P_2) = P_2$.

Puisque P_3 appartient à G, on a $S_F(P_3) = -P_3$.

Conclusion. $s_F(P_1) = P_1$; $s_F(P_2) = P_2$ et $s_F(P_3) = -P_3$

d/ Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$. A l'aide de la question précédente, calculer : $s_F\left(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3\right)$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$. Par linéarité de S_F et d'après la question précédente, on a :

$$s_F\left(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3\right) = \alpha_1 s(P_1) + \alpha_2 s(P_2) + \alpha_3 s(P_3) = P_1 + P_2 - P_3$$

Conclusion. $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3,\ s_F\left(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3\right) = P_1 + P_2 - P_3$

e/ Montrer que $\ker\left(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right)$ est un sev de $\mathbf{E}_1$, de dimension 2 ; et que $\ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right)$ est un sev de $\mathbf{E}_1$, de dimension 1.

Soit $Q \in \mathbf{E}_1$. D'après la question 4-b : $\exists!\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

On a : $Q \in \ker\left(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) \Longleftrightarrow s_F(Q) = Q \Longleftrightarrow \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 - \alpha_3 P_3 = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \Longleftrightarrow \alpha_3 = 0$ (la dernière équivalence provenant de l'unicité des coordonnées d'un polynôme dans la base **B'**).

Ainsi : $Q \in \ker\left(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) \Longleftrightarrow \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \Longleftrightarrow Q \in F$

D'où : $\ker\left(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = F$ et $\dim \ker\left(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = 2$ (F est engendré par 2 vecteurs, qui constituent une famille libre car extraite d'une base).

Par ailleurs on a :

$$Q \in \ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) \Longleftrightarrow s_F(Q) = -Q \Longleftrightarrow \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 - \alpha_3 P_3 = -\alpha_1 P_1 - \alpha_2 P_2 - \alpha_3 P_3$$
$$\Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

(la dernière équivalence provenant de l'unicité des coordonnées d'un polynôme dans la base **B'**).

Ainsi : $Q \in \ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) \Longleftrightarrow \exists!\, \alpha_3 \in \mathbb{K}, \quad Q = \alpha_3 P_3 \Longleftrightarrow Q \in G$

D'où : $\ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = G$ et $\dim \ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = 1$ (G est engendré par 1 vecteur non nul).

Conclusion. $\ker\left(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = F$ et $\dim \ker\left(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = 2$; $\ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = G$ et $\dim \ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = 1$.

Remarque : à l'issue de cette question, on peut observer que : $\mathbf{E}_1 = \ker\left(s_F + id_{\mathbf{E}_1}\right) \bigoplus \ker\left(s_F - id_{\mathbf{E}_1}\right)$

Exercice 27. — (Racines cubiques de l'identité de $\mathbb{C}_2[X]$) Dans cet exercice, on note $\mathbf{E}_2 = \mathbb{C}_2[X]$, et on considère l'application

$$f : \mathbf{E}_2 \longrightarrow \mathbf{E}_2 \qquad \text{avec } \mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$$
$$aX^2 + bX + c \longmapsto a\mathrm{j}^2 X^2 + b\mathrm{j}X + c$$

Il revient au même de dire que l'application f envoie le polynôme $P(X)$ sur le polynôme $P(\mathrm{j}X)$.

5/ Etablir que f est un endomorphisme de $\mathbf{E}_2$.

Soient P et Q dans $\mathbf{E}_2$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(\mathrm{j}X) = \lambda P(\mathrm{j}X) + \mu Q(\mathrm{j}X) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

Ce qui prouve que f est linéaire ; puisque de plus f est définie sur $\mathbf{E}_2$ et à valeurs dans $\mathbf{E}_2$, on peut conclure.

Conclusion. f est un endomorphisme de $\mathbf{E}_2$.

6/ Etablir que : $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}$

Pour tout polynôme $P \in \mathbf{E}_2$ on a :

$$f^3(P) = f^2(f(P)) = f^2(P(\mathrm{j}X)) = f(f(P(\mathrm{j}X))) = f\left(P(\mathrm{j}^2X)\right) = P(\mathrm{j}^3X) = P(X)$$

Conclusion. $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}$

7/ Montrer que $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2})$ est le sev de $\mathbf{E}_2$ constitué des polynômes constants.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{E}_2$. On a :

$$P \in \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}) \Longleftrightarrow f(P) = P \Longleftrightarrow a\mathrm{j}^2X^2 + b\mathrm{j}X + c = aX^2 + bX + c \Longleftrightarrow a = b = 0$$

Ainsi : $P \in \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}) \Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{C},\ P = c \Longleftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(1)$.

Conclusion. $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}) = \mathrm{Vect}(1)$

8/ Pour tout $P \in \mathbf{E}_2$, calculer $f^2(P) + f(P) + P$. En déduire que : $\ker\left(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{E}_2$. On a :

$$f^2(P) + f(P) + P = \left(a\mathrm{j}X^2 + b\mathrm{j}^2X + c\right) + \left(a\mathrm{j}^2X^2 + b\mathrm{j}X + c\right) + \left(aX^2 + bX + c\right)$$

$$= a\left(\underbrace{1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2}_{=0}\right)X^2 + b\left(\underbrace{1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2}_{=0}\right)X + 3c$$

Ainsi : $f^2(P) + f(P) + P = 3c$.

On en déduit que :

$$P \in \ker\left(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) \Longleftrightarrow \exists\,(a, b) \in \mathbb{C}^2,\ P = aX^2 + bX$$

Conclusion. $\ker\left(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$

Remarque : à l'issue de cette question, on peut observer que : $\mathbf{E}_2 = \ker\left(f^2 + f + id_{\mathbf{E}_2}\right) \bigoplus \ker\left(f - id_{\mathbf{E}_2}\right)$