Chapitre 22 — “L'essentiel” sur la dimension des espaces vectoriels

Préambule. Ce chapitre est le second volet du cours d'algèbre linéaire de cette année : on y introduit la notion cruciale de dimension d'un espace vectoriel, dont on étudie quelques propriétés.

Table des matières

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dorénavant, on pourra noter v au lieu de $\overrightarrow{v}$ un élément de E.

1. Familles libres et bases d'un espace vectoriel

Définition 1 - Deux vecteurs u et v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont **colinéaires** s'il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$, ou s'il existe un scalaire λ tel que $v = \lambda u$.

Propriété 1 - Deux vecteurs u et v non nuls d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont colinéaires SSI il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tels que $\alpha u + \beta v = 0_E$.

Remarque. A l'opposé, u et v sont non colinéaires si et seulement si la relation $\alpha u + \beta v = 0_E$ implique $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Définition 2 - Soit n un entier naturel non nul.

n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un $\mathbb{K}$-ev E sont **linéairement indépendants** si :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E\right] \Longrightarrow [\forall\, i \in [\![1; n]\!],\ \lambda_i = 0] \qquad (\text{avec } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n)$$

Remarque. La définition fournit une méthode pour prouver que n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un $\mathbb{K}$-ev E sont linéairement indépendants. Explicitement, on suppose qu'il existe n scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$, et on établit que cette égalité n'est satisfaite que lorsque tous les λ_i sont nuls.

Exemples. Deux vecteurs sont linéairement indépendants SSI ils sont non colinéaires.

Si n (avec $n \geqslant 3$) vecteurs sont linéairement indépendants alors ils sont deux à deux non colinéaires. ATTENTION : la réciproque de cette dernière affirmation est FAUSSE. Dans $\mathbb{R}^2$, les trois vecteurs $u\,(1, 0)$, $v\,(0, 1)$ et $w\,(1, 1)$ sont deux à deux non colinéaires ; mais u, v et w ne sont pas linéairement indépendants puisque $w = u + v$.

Définition 3 - Soient $v_1,\dots, v_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E.

La famille $\mathscr{F} = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est **libre** si les vecteurs $v_1,\dots, v_n$ sont linéairement indépendants ; dans le cas contraire on dit que $\mathscr{F}$ est **liée**.

Propriété 2 - Soient $v_1,\dots, v_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E.

La famille $\mathscr{F} = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est **liée** SSI il existe un entier $i \in [\![\, 1, n \,]\!]$ tel que : $v_i \in \operatorname{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$.

Exemples :

- soit v un vecteur de E. La famille $\mathscr{F} = (v)$ est libre SSI $v \neq 0_E$.
- dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathscr{F} = (v_1, v_2)$ est libre SSI $\det(v_1, v_2) \neq 0$.
- dans $\mathbb{R}^3$: la famille $\mathscr{F} = (u\,(1,2,3)\,, v\,(4,5,6)\,, w\,(7,8,9))$ est liée puisque $w = 2v - u$. Et la famille $\mathscr{G} = (v_1, v_2)$ est libre SSI $v_1 \wedge v_2 \neq \overrightarrow{0}$
- dans $\mathbb{K}_2[X]$, la famille $\mathscr{F} = (1, X, X^2)$ est (très clairement) libre.

  La famille $\mathscr{G} = ((X-1)(X-2)\,, X(X-2)\,, X(X-1))$ est (un peu moins clairement) libre, puisque les 3 polynômes qui la constituent sont (à des constantes multiplicatives près) les polynômes d'interpolation de Lagrange de degré 2 associés aux valeurs 0, 1 et 2.

- dans $\mathbb{K}[X]$, on considère n polynômes $P_1,\dots, P_n$ non nuls.

  On suppose que : $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$. Alors la famille $\mathscr{F} = (P_1, \cdots, P_n)$ est libre (toute famille échelonnée de polynômes est libre).

- dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, la famille $\mathscr{F} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \right)$ est libre.
- dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $\mathscr{F} = (\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \exp)$ est liée puisque $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$; mais la famille $\mathscr{G} = (\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est libre.

Définition 4 - Une **base** d'un espace vectoriel E est une famille génératrice et libre de E.

Exemples :

- la famille $\mathscr{F} = (e_1(1,0);\ e_2(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, appelée **base canonique de** $\mathbb{R}^2$. Définitions analogues pour les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{K}^n$.
- la famille $\mathscr{F} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est la **base canonique de** $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$.
- la famille $\mathscr{F} = (1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$, appelée **base canonique de** $\mathbb{K}_2[X]$; plus généralement, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est la **base canonique de** $\mathbb{K}_n[X]$.

  La famille $\mathscr{G} = ((X-1)(X-2)\,, X(X-2)\,, X(X-1))$ est une autre base de $\mathbb{K}_2[X]$.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

2.1. Dimension.

Définition 5 - On appelle $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension finie** un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ayant une famille génératrice finie.

Exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.
En revanche, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (entre autres exemples) ne sont pas des espaces vectoriels de dimension finie.

La notion de dimension repose essentiellement sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1 - Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1/ Toute famille de vecteurs de E contenue dans une famille libre est libre.

2/ Toute famille de vecteurs de E contenant une famille génératrice est génératrice.

Lemme 2 - Dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, le cardinal d'une famille libre est majoré par n.

Remarque. Une formulation équivalente de ce lemme est : dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal strictement plus grand que n est liée.

Théorème 1 - Dans un espace vectoriel (non nul) de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Le théorème rend légitime la définition suivante :

Définition 6 - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nul) de dimension finie.

On appelle **dimension** de E le cardinal d'une quelconque de ses bases (par convention, la dimension de l'espace vectoriel nul est zéro).

Notation. La dimension du $\mathbb{K}$-ev est notée $\dim_{\mathbb{K}} E$, ou $\dim E$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathbb{K}$.

Exemples :

- $\dim \mathbb{R}^3 = 3$; $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$; $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$; $\dim \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = n \times p$;...
- $\dim \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$; $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Un exemple "plus torturé" : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ mais $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. En effet, une base du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$ est (1), mais une base du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ est $(1, i)$. "Dans le même style" : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_3[X] = 4$ mais $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_3[X] = 8$.

2.2. **Théorème de la base extraite.**

Théorème 2 - (“De la base extraite”). De toute famille génératrice on peut extraire une base.

Plus explicitement : si $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E, alors il existe un entier $p \in [\![1; n]\!]$ tel que $(v_1, \cdots, v_p)$ soit une base de E (quitte à renuméroter les vecteurs).

Corollaire 1 - Tout espace vectoriel (non nul) de dimension finie admet une base.

Corollaire 2 - Soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie n.

1/ Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.

2/ Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base.

2.3. **Théorème de la base incomplète.**

Théorème 3 - (De la base incomplète). Soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie n. Soient encore :

- $\mathscr{F} = (v_1, \cdots, v_p)$ (avec $p \leqslant n$) une famille libre de E ;
- et $\mathscr{B} = (w_1, \cdots, w_n)$ une base de E.

Alors il existe $(n - p)$ vecteurs $w_1, \ldots, w_{n-p}$ (quitte à renuméroter les vecteurs) de $\mathscr{B}$ tels que la famille $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_p, v_1, \ldots, v_{n-p})$ est une base de E.

Interprétation. C'est le théorème de la base extraite “à l'envers” ; l'énoncé ci-dessus signifie que toute famille libre $\mathscr{F}$ peut-être complétée en une base de E. Encore plus précisément, les vecteurs que l'on adjoint à $\mathscr{F}$ pour obtenir une base peuvent être pris (avec précaution, cf exemple suivant la preuve du théorème) dans une base choisie à l'avance.

Exemples. Dans $E = \mathbb{R}^3$, la famille $\mathscr{F} = (u\,(1, 1, 1)\,, v\,(1, 2, 3))$ est libre. On peut obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant à $\mathscr{F}$ un vecteur de la base canonique. Dans ce cas particulier, la famille $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base avec $w = \mathrm{e}_1$ ou e_2 ou e_3.

MAIS pour la famille $\mathscr{F}' = (u'\,(1, 1, 0)\,, v'\,(1, 2, 0))$ (qui est libre aussi), la famille $\mathscr{B}' = (u', v', w')$ n'est une base que pour $w' = \mathrm{e}_3$.

Corollaire 3 - Soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie n.

1) Toute famille libre de E possède au plus n éléments.

2) Toute famille libre de E de cardinal n est une base.

Application (tellement classique). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille échelonnée de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls, càd une famille de polynômes non nuls tels que : $\deg(P_1) < \deg(P_2) \ldots < \deg(P_n)$. Alors la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre.

Autrement dit : toute famille échelonnée de polynômes non nuls est libre.

Application. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraire. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $\mathscr{F} = \left((X-\alpha)^k\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est libre (car échelonnée) et de cardinal $(n+1) = \dim \mathbb{R}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Propriété 3 - Soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie n, et F un sev de E. Alors :
1) $\dim F \leqslant n$ 2) $\dim F = n$ SSI $F = E$

Exemples d'illustration. Les sev de $\mathbb{R}^2$ sont $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ (dimension 0), les droites vectorielles $\mathrm{Vect}\,(v)$ (avec $v \in \mathbb{R}^2$ non nul ; dimension 1) et $\mathbb{R}^2$ (dimension 2).
Dans $\mathbb{R}^3$, les sev sont $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ (dimension 0), les droites vectorielles $\mathrm{Vect}\,(v)$ (avec $v \in \mathbb{R}^3$ non nul ; dimension 1), les plans vectoriels $\mathrm{Vect}\,(u,v)$ (avec u et $v \in \mathbb{R}^3$ non colinéaires ; dimension 2) et $\mathbb{R}^3$ (dimension 3).

Exemple d'application. soit n un entier naturel. L'application linéaire $\varphi : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto (P - P') \in \mathbb{K}_n[X]$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ (autrement écrit, $\varphi \in \mathrm{GL}\,(\mathbb{K}_n[X])$).

3. Dimension d'une somme de sev

Propriété 4 - Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F et G deux sev supplémentaires dans E (*ie* $E = F \bigoplus G$). On a : $\dim E = \dim F + \dim G$.

L'énoncé ci-dessous est une conséquence du théorème de la base incomplète.

Théorème 4 - (Existence d'un supplémentaire en dimension finie). Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F un sev de E.

Il existe un sev G de E tel que : $E = F \bigoplus G$.

Théorème 5 - (Des 4 dimensions ou relation de Graßmann). Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F et G deux sev de E. Alors :

$$\dim\,(F+G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F \cap G)$$

Exemple d'application. Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1,1,1))$. Il est aisé de prouver que $\dim F = 2$, et il est immédiat que $\dim G = 1$. D'après le théorème ci-dessus, il suffit alors de prouver que $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ pour conclure que $\mathbb{R}^3 = F \bigoplus G$ (gain de temps important).

Définition 7 - Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. On appelle **hyperplan** de E un sev de E de dimension $n-1$.

Propriété 5 - Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, H un hyperplan de E et v un vecteur de E tel que $v \notin H$. Alors :

$$E = H \bigoplus \mathrm{Vect}\,(v)$$

Exemples d'application.

1/ Dans $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geqslant 2$), on considère $H = \{(x_1,\dots,x_n)\,,\ x_1+\cdots+x_n = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}\,((1,\dots,1))$. On a : $\mathbb{K}^n = H \oplus D$.

2/ Dans $\mathrm{M}_2\,(\mathbb{R})$, on considère $H = \{A \in \mathrm{M}_2\,(\mathbb{R}) \ / \,\mathrm{tr}(A) = 0\}$. H est l'hyperplan des matrices de trace nulle, et on a : $\mathrm{M}_2\,(\mathbb{R}) = H \bigoplus \mathrm{Vect}\,(M)$ pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_2\,(\mathbb{R})$ de trace non nulle.

3/ Dans un $\mathbb{K}$-ev E de dimension $n \geqslant 2$, l'intersection de deux hyperplans distincts est de dimension $n-2$.

En effet, d'après la formule des quatre dimensions : $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.

On a : $H_1 \subset (H_1 + H_2) \subset E$. D'où : $n - 1 \leqslant \dim(H_1 + H_2) \leqslant n$.

Supposons que $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$. Alors : $H_1 = H_1 + H_2$ (puisqu'alors $H_1 \subset (H_1 + H_2)$ et $\dim H_1 = \dim(H_1 + H_2)$). Or par hypothèse, H_1 et H_2 sont distincts, donc il existe $h_2 \in H_2 \backslash H_1$, et donc $H_1 \neq H_1 + H_2$.

Il s'ensuit que : $\dim(H_1 + H_2) = n$. Par conséquent : $n = 2(n-1) + \dim(H_1 \cap H_2)$, d'où : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

4. Coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de passage

4.1. Coordonnées.

Théorème 6 - Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et soit $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Alors :

$$\forall\, V \in E,\ \exists!\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n,\ V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Définition 8 - Les scalaires $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ du théorème ci-dessus sont appelés **coordonnées du vecteur V dans la base $\mathscr{B}$**.

Remarque : le point crucial est de remarquer que les coordonnées d'un vecteur sont relatives à la base choisie.

Exemple. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées du polynôme $P = aX^2 + bX + c$ sont (c, b, a) dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$. Les coordonnées de P sont $(P(0), P(1), P(2))$ dans la base $\mathscr{B}' = (L_0, L_1, L_2)$ des polynômes de Lagrange de degré 2 associés aux valeurs 0, 1 et 2. Enfin, d'après la formule de Taylor pour les polynômes, les coordonnées de P sont $(P(\alpha), P'(\alpha), P''(\alpha)/2)$ dans la base $\mathscr{B}'' = \left(1, X - \alpha, (X - \alpha)^2\right)$ (pour tout réel α).

4.2. Changement de base et matrice de passage.

Définition 9 - Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n $(n \neq 0)$, soient $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathscr{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$ deux bases de E.

La **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** notée $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ (ou $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$) est la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$$

les scalaires α_{ij} étant caractérisés par :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad w_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i$$

Traduction : $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ est la matrice obtenue en mettant en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ (attention à l'ordre !).

Propriété 6 - (Effet d'un changement de base sur les coordonnées). Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

Pour tout vecteur V de E, notons $X_{\mathscr{B}}$ et $X_{\mathscr{B}'}$ les n-uplets de ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement. On a :

$$X_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} X_{\mathscr{B}'}$$

Exemple d'application. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la famille $\mathscr{B}' = (X^2 - 1, X + 1, X)$.

1/ Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

2/ A l'aide d'une matrice de passage, déterminer les coordonnées de $P = aX^2 + bX + c$ dans la base $\mathscr{B}'$.

L'énoncé suivant a une importance plus théorique que pratique (on vous demandera souvent de faire un changement de base dans un problème, rarement deux) :

Propriété 7 - Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E. On a :

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}''}$$

La conséquence spectaculaire de cet énoncé étant la propriété (plus pratique que théorique) ci-dessous :

Propriété 8 - Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

Alors $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $\left[\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}\right]^{-1} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}$.

Pour enfoncer le clou : **toute matrice de passage est inversible**

5. Classification des ev de dimension finie

Propriété 9 - Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, avec E de dimension $n \geqslant 1$; $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E ; et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Enfin on note $\mathscr{F} = (f(\overrightarrow{v_i}))_{i \in [\![1,n]\!]}$. Alors :

1/ [f est injective] $\Longleftrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est libre]

2/ [f est surjective] $\Longleftrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est génératrice de F]

3/ [f est un isomorphisme] $\Longleftrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est une base de F]

Corollaire 4 - Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Si E et F sont isomorphes, alors $\dim E = \dim F$

La réciproque est vraie, dans le sens rendu plus précis par l'énoncé ci-dessous :

Théorème 7 - (Classification des ev de dimension finie).

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Interprétation. A isomorphisme près, $\mathbb{K}^n$ est le seul $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Remarque. Dans le théorème de classification, il est surtout important de retenir l'idée de la preuve. Si E est un ev de dimension n, il admet une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Un isomorphisme $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$ peut alors être défini en posant : $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$; l'isomorphisme réciproque φ^{-1} associe à tout vecteur v de E le n-uplet de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Corollaire 5 - Deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension sont isomorphes.

Exemple. $S_3(\mathbb{R})$ (le sev des matrices symétriques de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$), $\mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_5[X]$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels deux à deux isomorphes, tous trois étant isomorphes à $\mathbb{R}^6$.