Exercices 22 — Espaces vectoriels de dimension finie

Familles libres, bases

Exercice 1. — (Familles libres).

Dans chacun des cas suivants, déterminer si chacune des familles suivantes est libre ou liée.

1/ $E = \mathbb{R}^2$; $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

2/ $E = \mathbb{R}^2$; $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3/ $E = \mathbb{R}^2$; $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

4/ $E = \mathbb{R}_2[X]$; $\mathscr{F} = \{1, 3X - 4, 2X^2 - X + 1\}$

5/ $E = \mathbb{R}_2[X]$; $\mathscr{F} = \{X, X + 1, X^2\}$

6/ $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$; $\mathscr{F} = \{\mathrm{I}_2, E_{11}, E_{22} - E_{11}\}$

7/ $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\mathscr{F} = \{\sin, \cos\}$

8/ $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\mathscr{F} = \{\exp, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}\}$

Exercice 2. — (Bases et dimension).

Dans chacun des cas suivants, on demande de déterminer une base du sev F, et d'en déduire la dimension de F.

1/ $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0 \right\}$

2/ $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0\}$

3/ $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(2) = 0\}$

4/ Le sev F des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$

5/ Le sev F des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$

6/ Le sev F des fonctions f de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 8y = 0$

7/ $F = \mathrm{im}\rho$ avec $\rho : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 3. — (Familles libres et liées dans $\mathbb{K}[X]$). Déterminer si chacune des familles est libre ou liée.

1/ $\mathscr{F}_1 = \{1, X - 1, X^2 - X\}$

2/ $\mathscr{F}_2 = \{2X + 1, X^2 + X, 2X^2 - 1\}$

3/ $\mathscr{F}_3 = \{X^2, X^2 - X, X^2 - 2X\}$

4/ $\mathscr{F}_4 = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ où les L_i sont les polynômes (de degré 3) d'interpolation de Lagrange associés aux valeurs 1, 2, 3 et 4.

Exercice 4. — (Bases de sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$). Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1/ $F_1 = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ {}^tA = A\}$.

2/ $F_2 = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ {}^tA = -A\}$.

3/ $F_3 = \{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tA = A\}$.

4/ $F_4 = \{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tA = -A\}$.

5/ $F_5 = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ diagonale}\}$.

Exercice 5. — (ker et im). On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \qquad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+y+t \\ x+z-t \end{pmatrix}$$

On admet que f est linéaire.

1) Déterminer le noyau de f. En préciser une base et la dimension.

2) Déterminer l'image de f. En préciser une base et la dimension.

Exercice 6. — (Bases). On considère la famille $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, où l'on a posé :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 7. — (Bases et dimension). On considère l'application $\varphi : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_3[X]$ définie en posant :

$$\forall P \in \mathbb{K}_3[X],\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1/ Montrer que φ est linéaire.

2/ Déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\ \varphi$.

3/ Préciser une base pour chacun des sev $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\ \varphi$, en déduire leur dimension.

Exercice 8. — (Bases et dimension). Dans chacun des cas suivants, on demande de déterminer une base du sev F, et d'en déduire la dimension de F.

1/ $F = \{A \in M_3(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$

2/ Le sev F des fonctions f de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle : $y' - 6y = 0$

3/ $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(1) = 0 \wedge P'(1) = 0\}$

4/ $F = \ker\varphi$ avec $\varphi : P \in \mathbb{K}_2[X] \mapsto (P(0), P'(0)) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 9. — Dans cet exercice, on note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Par ailleurs, on définit sur $\mathbb{R}$ trois fonctions g_1, g_2 et g_3 en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{2x}; \qquad g_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos\left(x\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin\left(x\sqrt{3}\right)$$

Enfin on note F le sev de E engendré par les fonctions g_i définies ci-dessus, càd :

$$F = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2, g_3)$$

Montrer que la famille $\mathscr{F} = \{g_1, g_2, g_3\}$ est une base de F.

Exercice 10. — (Une famille libre arbitrairement grande dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Soient $n \geqslant 1$ un entier naturel, et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n réels distincts ; on suppose $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
On considère la famille $F_n = (f_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha_k x},\ k \in [\![1, n]\!])$. Montrer que F_n est une famille libre de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 11. — Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère la famille de polynômes

$$\mathscr{F} = \left\{ \underbrace{(X-1)(X-2)(X-3)}_{=P_0}, \underbrace{X(X-2)(X-3)}_{=P_1}, \underbrace{X(X-1)(X-3)}_{=P_2}, \underbrace{X(X-1)(X-2)}_{=P_3} \right\}$$

Montrer que $\mathscr{F}$ est libre.

Exercice 12. — (Transport de bases). Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme de E dans F, et $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ une base de E.

On note $\varphi(\mathscr{B}) = \{\varphi(\overrightarrow{v_1}), \ldots, \varphi(\overrightarrow{v_1})\}$ l'image de $\mathscr{B}$ par φ. Montrer que $\varphi(\mathscr{B})$ est une base de F.

On prouve ainsi l'énoncé :

"L'image d'une base par un isomorphisme est une base"

Exercice 13. — (Conséquence du "transport de bases"). Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.

On suppose que $\dim(E) = n$, et que E et F sont isomorphes (càd qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ de E dans F). Etablir que $\dim(F) = n$

On prouve ainsi l'énoncé :

"Deux ev de dimension finie isomorphes ont la même dimension."

Coordonnées dans une base, matrice de passage

Exercice 14. — (Familles échelonnée de polynômes). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans $\mathbb{K}[X]$, on considère n polynômes $P_1, \ldots, P_n$ tous non nuls. On suppose que :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$$

Montrer que la famille $\mathscr{F} = (P_1, \cdots, P_n)$ est libre.

On prouve ainsi l'énoncé :

"Toute famille échelonnée de polynômes est libre"

Exercice 15. — (Challenge). Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \longmapsto P + XP''$$

est bijective (on pourra admettre que f est linéaire).

Exercice 16. — (Une base classique de $\mathbb{K}_n[X]$). Soient n un entier naturel non nul, et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire quelconque.

On considère la famille

$$\mathscr{B} = \left\{1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \ldots, (X-\alpha)^n\right\}$$

On se propose de prouver de deux manières différentes que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1/ Justifier que $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2/ Justifier que $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 17. — (Une autre base classique de $\mathbb{K}_n[X]$ — Polynômes interpolateurs de Lagrange). Soit n un entier naturel non nul.

On considère $(n+1)$ scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts.
On note $L_0, \ldots, L_n$ les $(n+1)$ polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

1/ Question de cours : rappeler l'expression du polynôme L_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

2/ Etablir que la famille $\mathscr{B} = \{L_0, \ldots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 18. — (Supplémentaires). Dans cette partie, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.
On pose $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2)$, et on note G le sev des matrices de E de trace nulle.

1/ Déterminer la dimension de F et la dimension de G.

2/ Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 19. — (Supplémentaires bis). Dans $E = \mathbb{K}_2[X]$ on considère les sev

$$F = \mathrm{Vect}\,(X^2 + X + 1,\ 5X + 2) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(X^2 - X).$$

On pourra noter $P_1 = X^2 + X + 1$; $P_2 = 5X + 2$; $P_3 = X^2 - X$.

1/ Etablir que : $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{K}_2[X]}\right\}$.

2/ En déduire que : $\quad E = F \bigoplus G$.

3/ Justifier que $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 20. — Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère la partie F constituée des polynômes P tels que $P(1) = P(-1)$.

1/ Montrer que F est un sev de E, en déterminer une base, et en déduire la dimension de F.

2/ Soit $G = \mathrm{Vect}(X)$. Montrer que : $E = F \bigoplus G$.

Exercice 21. — (Très très classique). Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'endomorphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\longmapsto P - P' \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 22. — (Coordonnées dans $\mathbb{R}_3[X]$).

Quelles sont les coordonnées de $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$ dans :

1/ la base canonique $\mathscr{B}_1 = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$?

2/ la base $\mathscr{B}_2 = \left(1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$?

3/ la base $\mathscr{B}_3 = (L_0, L_1, L_2, L_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, où les L_1 désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels 0, 1, 2 et 3 ?

Exercice 23. — **(Matrice de passage).** On considère la famille $\mathrm{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ avec :

$$P_1 = X^2 - 1\,; \qquad P_2 = (X-1)^2\,; \qquad P_3 = (X+1)^2$$

1/ Etablir que la famille B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.

3/ Après avoir brièvement justifié que P est inversible, calculer P^{-1}.[*]

Exercice 24. — **(Changement de base)** Dans cet exercice, on considère l'espace vectoriel $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On rappelle que la **base canonique** de E est la base $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1/ On considère la famille $\mathscr{B}' = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, où l'on a posé :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

2/ Ecrire la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

3/ Justifier brièvement que P est inversible, et calculer P^{-1}.

Exercice 25. — Dans cet exercice, on note $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients réels.

On note $\mathbf{B} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ la base canonique de E ; et I_2 la matrice identité de E.

Enfin, on note :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ On considère le sev :

$$F = \mathrm{Vect}\,(M_1, M_2, M_3)$$

Montrer que la famille $\mathbf{B}_1 = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de F.

2/ On pose : $G = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2)$. Etablir que F et G sont supplémentaires dans E.

3/ On introduit à présent la famille :

$$\mathbf{B'} = \{M_1, M_2, M_3, \mathrm{I}_2\}$$

Etablir que **B'** est une base de E.

4/ Ecrire la matrice de passage P de la base **B** à la base **B'**.

5/ Donner les coordonnées de la matrice $\mathbf{E}_{11}$ dans la base **B**, ainsi que dans la base **B'**.

6/ On note p_F la projection sur F parallèlement à G. Déterminer $p_F(\mathbf{E}_{11})$, $p_F(\mathrm{I}_2)$ et $p_F\left(\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{12} + \mathbf{E}_{21}\right)$

---

[*] On pourra vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{4} R$, où $R \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients appartiennent à $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Exercice 26. — (Racines carrées de l'identité de $\mathbb{K}_2[X]$) Dans cet exercice, $\mathbf{E}_1$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathbf{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbf{E}_1$.

On note : $P_1 = X(X-1)$; $P_2 = X(X-2)$; et $P_3 = (X-1)(X-2)$.

Enfin, on note : $F = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(P_3)$.

1/ Etablir que **B'** $= \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbf{E}_1$.

2/ Etablir que : $\mathbf{E}_1 = F \bigoplus G$.

3/ Ecrire la matrice de passage $P_{\mathbf{BB'}}$ de la base **B** à la base **B'**.

4/ **Etude d'une symétrie**. On note s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On rappelle que s_F est un endomorphisme de $\mathbf{E}_1$.

a/ Etablir que : $(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E}_1)}$

b/ Justifier brièvement que : $\forall\, Q \in \mathbf{E}_1,\ \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

c/ Calculer $s_F(P_1)$, $s_F(P_2)$ et $s_F(P_3)$.

d/ Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$. A l'aide de la question précédente, calculer : $s_F\,(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3)$.

e/ Montrer que $\ker\,(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1})$ est un sev de $\mathbf{E}_1$, de dimension 2 ; et que $\ker\,(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1})$ est un sev de $\mathbf{E}_1$, de dimension 1.

Remarque : à l'issue de cet exo, on peut observer que : $\mathbf{E}_1 = \ker\,(s_F + id_{\mathbf{E}_1}) \bigoplus \ker\,(s_F - id_{\mathbf{E}_1})$

Exercice 27. — (Racines cubiques de l'identité de $\mathbb{C}_2[X]$) Dans cet exercice, on note $\mathbf{E}_2 = \mathbb{C}_2[X]$, et on considère l'application

$$f : \mathbf{E}_2 \longrightarrow \mathbf{E}_2 \qquad \text{avec } \mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$$

$$aX^2 + bX + c \longmapsto a\mathrm{j}^2X^2 + b\mathrm{j}X + c$$

Il revient au même de dire que l'application f envoie le polynôme $P(X)$ sur le polynôme $P\,(\mathrm{j}X)$.

1/ Etablir que f est un endomorphisme de $\mathbf{E}_2$.

2/ Etablir que : $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}$

3/ Montrer que $\ker\,(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2})$ est le sev de $\mathbf{E}_2$ constitué des polynômes constants.

4/ Pour tout $P \in \mathbf{E}_2$, calculer $f^2(P) + f(P) + P$. En déduire que : $\ker\,(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$.

Remarque : à l'issue de cet exo, on peut observer que : $\mathbf{E}_2 = \ker\,(f^2 + f + id_{\mathbf{E}_2}) \bigoplus \ker\,(f - id_{\mathbf{E}_2})$