

COLLE 24 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1 — Propriétés du degré. Soient F_1 et $F_2 \in \mathbb{K}(X)$. On a : $\deg(F_1 F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$ et $\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$.

PREUVE. Soient $F_1 = P_1/Q_1$ et $F_2 = P_2/Q_2$ deux fractions rationnelles.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \deg(F_1 F_2) &= \deg\left(\frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}\right) = \deg(P_1 P_2) - \deg(Q_1 Q_2) \\ &= (\deg(P_1) - \deg(Q_1)) + (\deg(P_2) - \deg(Q_2)) = \deg(F_1) + \deg(F_2) \end{aligned}$$

$$\text{Par ailleurs : } \deg(F_1 + F_2) = \deg\left(\frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}\right) = \deg(P_1 Q_2 + P_2 Q_1) - \deg(Q_1 Q_2)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \deg(F_1 + F_2) &= \deg(P_1 Q_2 + P_2 Q_1) - \deg(Q_1) - \deg(Q_2) \quad (\spadesuit) \text{ Or : } \deg(P_1 Q_2 + P_2 Q_1) \leq \\ &\max(\deg(P_1 Q_2), \deg(P_2 Q_1)) \end{aligned}$$

► **Premier cas** : si $\max(\deg(P_1 Q_2), \deg(P_2 Q_1)) = \deg(P_1 Q_2)$

$$\text{Alors d'après } (\spadesuit) : \deg(F_1 + F_2) = \deg(P_1) + \deg(Q_2) - \deg(Q_1) - \deg(Q_2) = \deg(P_1) - \deg(Q_1) = \deg(F_1)$$

► **Second cas** : si $\max(\deg(P_1 Q_2), \deg(P_2 Q_1)) = \deg(P_2 Q_1)$

$$\text{Alors d'après } (\spadesuit) : \deg(F_1 + F_2) = \deg(P_2) + \deg(Q_1) - \deg(Q_1) - \deg(Q_2) = \deg(P_2) - \deg(Q_2) = \deg(F_2)$$

On en déduit que : $\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$.

QUESTION DE COURS 2 — Propriété (partie entière, partie polaire) : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple (E, G) avec $E \in \mathbb{K}[X]$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ de degré < 0 tel que : $F = E + G$.

PREUVE. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (E, R) tel que : $P = EQ + R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$.

On en déduit : $F = E + \frac{R}{Q}$. En posant $G = R/Q$, on a établi l'existence d'un couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que : $F = E + G$. En outre, puisque $\deg(R) < \deg(Q)$, on a : $\deg(G) < 0$.

Etablissons son unicité. Supposons qu'il existe un autre couple (E_1, G_1) satisfaisant les mêmes conditions. Alors en particulier : $E - E_1 = G_1 - G$.

Supposons que $E - E_1 \neq 0$. Alors $\deg(E - E_1) \geq 0$ tandis que $\deg(G_1 - G) < 0$: contradiction.

On en déduit que $(E_1, G_1) = (E, G)$, ce qui établit l'unicité.

QUESTION DE COURS 3 — Propriété : soient $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible, et α un pôle simple de F . Dans ce contexte, on peut écrire : $F = G + \frac{\lambda}{X - \alpha}$, où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle, et $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$

PREUVE. Soient donc $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible et α un pôle simple de F . On peut écrire (d'après la question de cours précédente) :

$$F = G + \frac{\lambda}{X - \alpha} \quad (\spadesuit)$$

où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle.

Par ailleurs, il existe un polynôme Q_1 tel que : $Q = (X - \alpha) Q_1$ et $Q_1(\alpha) \neq 0$.

En multipliant l'identité $(\spadesuit)$ par $(X - \alpha)$ on obtient :

$$\frac{P}{Q_1} = (X - \alpha) G + \lambda$$

L'évaluation en α de cette relation donne : $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} \quad (\clubsuit)$.

Par ailleurs, puisque $Q = (X - \alpha) Q_1$, on a : $Q' = Q_1 + (X - \alpha)Q_1'$. D'où : $Q_1(\alpha) = Q'(\alpha)$.

On déduit de cette dernière égalité et de $(\clubsuit)$ que : $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

QUESTION DE COURS 4 — Propriété : soit $F \in \mathbb{K}(X)$, et soit α un pôle de multiplicité p de F . Il existe un unique couple (R, G) avec $R \in \mathbb{K}[X]$ de degré $< p$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ n'admettant pas α pour pôle tel que :

$$F = G + \frac{R}{(X - \alpha)^p}$$

PREUVE. Notons $F = P/Q$ sous forme irréductible. Puisque par hypothèse α est un pôle de multiplicité p de F , α est racine de multiplicité p de Q . Il s'ensuit que :

$$\exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], [(Q = (X - \alpha)^p Q_1) \wedge (Q_1(\alpha) \neq 0)]$$

Les polynômes $(X - \alpha)^p$ et Q_1 sont premiers entre eux (puisque $(X - \alpha)$ ne divise pas Q_1). D'après le théorème de Bezout, il existe donc deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$U(X - \alpha)^p + VQ_1 = 1$$

On en déduit que :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PU(X - \alpha)^p + PVQ_1}{(X - \alpha)^p Q_1} = \frac{PU}{Q_1} + \frac{PV}{(X - \alpha)^p}$$

On effectue alors la division euclidienne de PV par $(X - \alpha)^p$ pour écrire :

$$\exists (S, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad PV = S(X - \alpha)^p + R \text{ avec } \deg(R) < p$$

On en déduit que :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PU}{Q_1} + S + \frac{R}{(X - \alpha)^p}$$

Finalement, on pose : $G = \frac{PU}{Q_1} + S = \frac{PU + SQ_1}{Q_1}$. Ainsi, G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle.

Conclusion. Si F est une fraction rationnelle admettant α pour pôle de multiplicité p , alors il existe un couple $(G, R) \in \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}[X]$ tel que G n'admet pas α pour pôle, R est de degré $< p$, et

$$F = G + \frac{R}{(X - \alpha)^p}$$

Reste à vérifier l'unicité : supposons qu'il existe deux couples (G_1, R_1) et (G_2, R_2) vérifiant les conditions de la conclusion ci-dessus. Alors en particulier :

$$G_1 - G_2 = \frac{R_2 - R_1}{(X - \alpha)^p}$$

Puisque α n'est pas un pôle de $G_1 - G_2$, on en déduit que α est racine de multiplicité au moins égale à p de $R_2 - R_1$. Or, les polynômes R_1 et R_2 étant de degré strictement inférieur ou égal à p , on a : $\deg(R_2 - R_1) < p$. Il s'ensuit que $R_2 - R_1 = 0$. Ce qui entraîne $(G_1, R_1) = (G_2, R_2)$, prouve l'unicité désirée, et achève la preuve de cette propriété.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1 — Décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^3 - X}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

EXERCICE 2 — Décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X(X-1)^2}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

EXERCICE 3 — Décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^3 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$.

EXERCICE 4 — Décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

EXERCICE 5 — On note φ l'application qui à toute fraction rationnelle dans $\mathbb{K}(X)$ associe sa partie polaire.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}(X)$; déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{im} \varphi$.

Pour information. Et comme vous avez été très sages durant ce chapitre, voici donc l'énoncé général du théorème de décomposition en éléments simples !

THÉORÈME (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES). Soit $F = P/Q \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle non nulle sous forme irréductible (avec Q unitaire).

➤ Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors : $F = E + \sum_{i=1}^n F_{\alpha_i} = E + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{ik}}{(X - \alpha_i)^{p_i-k}}$

où l'on a noté E la partie entière de F , et $\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{p_i}$ la décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$;

➤ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors : $F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{ik}}{(X - \alpha_i)^{p_i-k}} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{b_{jk}X + c_{jk}}{(X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{q_j-k}}$

où l'on a noté E la partie entière de F , et $\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{p_i} \prod_{j=1}^m (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{q_j}$ la décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque. Cet énoncé n'est certainement pas à apprendre dans sa forme générale. En revanche, il faut l'invoquer dans les calculs de décomposition en éléments simples, pour justifier l'existence et la forme de la DES recherchée (cf 4 premiers exos de la banque).

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1 — Décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^3 - X}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif ($\deg F = -3$), et elle possède exactement trois pôles simples, qui sont 0 et ± 1 . D'après le cours :

$$\exists! (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, \quad \frac{1}{X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1}$$

► **Valeur de a .** Puisque 0 est un pôle simple de F , on a : $a = \frac{P(0)}{Q'(0)}$, avec $P = 1$ et $Q' = 3X^2 - 1$. D'où : $a = -1$.

► **Valeur de b .** Puisque 1 est un pôle simple de F , on a : $b = \frac{P(1)}{Q'(1)}$. D'où : $b = \frac{1}{2}$.

► **Valeur de c .** Puisque -1 est un pôle simple de F , on a : $c = \frac{P(-1)}{Q'(-1)}$. D'où : $c = \frac{1}{2}$.

CONCLUSION.
$$\frac{1}{X^3 - X} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2} \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{X + 1}$$

EXERCICE 2 — Décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X(X - 1)^2}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif ($\deg F = -3$), et elle possède exactement un pôle simple (qui est 0) et un pôle double (qui est 1). D'après le cours :

$$\exists! (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, \quad \frac{1}{X(X - 1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{(X - 1)^2}$$

► **Valeur de a .** Puisque 0 est un pôle simple de F , on a : $a = \frac{P(0)}{Q'(0)}$, avec $P = 1$ et $Q' = 3X^2 - 4X + 1$. D'où : $a = 1$.

► **Valeur de c .** Par multiplication (par $(X - 1)^2$) et évaluation (en 1), on obtient : $c = 1$.

► **Valeur de b .** Par multiplication (par $(X - 1)$) et passage à la limite (en $+\infty$), on obtient : $a + b = 0$. D'où : $b = -1$.

CONCLUSION.
$$\frac{1}{X(X - 1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2}$$

EXERCICE 3 — Décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^3 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$.

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif ($\deg F = -3$), et elle possède exactement trois pôles simples (dans $\mathbb{C}$), qui sont 1, j et $\bar{j}$. D'après le cours :

$$\exists! (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad \frac{1}{X^3 - 1} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X - j} + \frac{\bar{b}}{X - \bar{j}}$$

► **Valeur de a .** Puisque 1 est un pôle simple de $F : a = \frac{P(1)}{Q'(1)}$, avec $P = 1$ et $Q' = 3X^2$. D'où : $a = \frac{1}{3}$.

► **Valeur de b .** Puisque j est un pôle simple de F , on a : $b = \frac{P(j)}{Q'(j)}$. D'où : $b = \frac{1}{3j^2} = \frac{j}{3}$.

Conclusion 1. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$ est :

$$\frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X - 1} + \frac{j}{X - j} + \frac{\bar{j}}{X - \bar{j}} \right)$$

On somme les deux termes non-réels pour achever l'exercice.

Conclusion 2. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$\frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X - 1} - \frac{X + 2}{X^2 + X + 1} \right)$$

EXERCICE 4 — Décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

La fraction rationnelle $F = \frac{1}{X^n - 1}$ admet exactement n pôles simples dans $\mathbb{C}$, qui sont les racines n -ièmes de l'unité. Il existe donc un (unique) n -uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ de complexes tels que :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega^k} = \frac{\lambda_0}{X - 1} + \frac{\lambda_1}{X - \omega} + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{X - \omega^{n-1}}$$

où l'on a noté comme d'habitude : $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Soit k un entier compris entre 0 et $n - 1$. D'après le cours : $\lambda_k = \frac{1}{Q'(\omega^k)}$ avec $Q' = nX^{n-1}$

Or : $Q'(\omega^k) = n(\omega^k)^{n-1} = n\omega^{-k}$. Ainsi : $\lambda_k = \frac{1}{n} \omega^k$.

CONCLUSION. $\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{X - \omega^k}$

EXERCICE 5 — On note φ l'application qui à toute fraction rationnelle dans $\mathbb{K}(X)$ associe sa partie polaire.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}(X)$; déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{im} \varphi$.

Soient F_1 et F_2 dans $\mathbb{K}(X)$. D'après le cours :

$$\exists! (E_1, E_2, G_1, G_2) \in \mathbb{K}[X]^2 \times \mathbb{K}(X)^2, \quad F_i = E_i + G_i \quad \text{et} \quad \deg G_i < 0$$

Par définition de φ , on a : $\varphi(F_i) = G_i$.

Par ailleurs, pour tout couple de scalaires (λ, μ) , on a : $\lambda F_1 + \mu F_2 = (\lambda E_1 + \mu E_2) + (\lambda G_1 + \mu G_2)$.

Dans le terme de droite de cette égalité, notons que : $\lambda E_1 + \mu E_2$ est un polynôme, et $\lambda G_1 + \mu G_2$ une fraction rationnelle de degré strictement négatif (propriétés du degré dans $\mathbb{K}(X)$).

Il s'ensuit que $\lambda G_1 + \mu G_2$ est la partie polaire de $\lambda F_1 + \mu F_2$.

Avec les notations de l'énoncé, ceci signifie que : $\varphi(\lambda F_1 + \mu F_2) = \lambda\varphi(F_1) + \mu\varphi(F_2)$.

Donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}(X))$.

Il est aisé de voir (et de justifier) que $\ker \varphi = \mathbb{K}[X]$, et que $\operatorname{im} \varphi = \{F \in \mathbb{K}(X), \deg(F) < 0\}$.