

PREUVE DU LEMME “Routine”

On a achevé le cours de ce matin par l’énoncé suivant :

Théorème (fondamental) : dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Ce résultat va permettre de définir la dimension d’un ev de dimension finie, comme le cardinal d’une quelconque de ses bases : ce sera le point de départ du cours de demain matin.

Comme vous avez pu le constater, la preuve de ce théorème repose essentiellement sur le résultat ci-dessous (appelé lemme 2 dans le cours de ce matin) :

Lemme-clef : dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, le cardinal d’une famille libre est majoré par n .

Formulation équivalente du lemme : dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de vecteurs de E de cardinal $(n + 1)$ est liée.

Autre formulation équivalente du lemme : dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de vecteurs de E de cardinal p avec $p > n$ est liée.

► **PREUVE DU LEMME.** Pour établir le lemme, il suffit donc de prouver que dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal $(n + 1)$ est liée.

Posons donc $\mathcal{P}(n)$ l’assertion : “dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal $(n + 1)$ est liée”, et démontrons $\mathcal{P}(n)$ par récurrence sur n .

Initialisation ($n = 0$). Soit E un espace vectoriel engendré par 0 vecteur... Alors $E = \{0\}$, et toute famille de cardinal 1 est liée, puisqu’une telle famille ne peut contenir que le vecteur nul. Cette brillante démonstration permet d’affirmer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité*. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n , et démontrons qu’elle est vraie au rang $(n + 1)$.

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_{n+1})$ une famille génératrice de E , et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_{n+2})$ une famille de vecteurs de E de cardinal $(n + 2)$. Il s’agit de prouver que $\mathcal{F}$ est liée.

Introduisons le sev F de E engendré par les n premiers vecteurs de $\mathcal{G}$: $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

Soit i un entier compris entre 1 et $n + 2$. Puisque $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E , il existe $(n + 1)$ scalaires $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i,n+1}$ tels que :

$$u_i = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{ik} v_k = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} v_k \right)}_{\in F} + \alpha_{i,n+1} v_{n+1}$$

En renommant $w_i = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} v_k \right)$ et $\alpha_i = \alpha_{i,n+1}$, on peut conclure que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n + 2 \rrbracket, \exists w_i \in F, \exists \alpha_i \in \mathbb{K}, u_i = w_i + \alpha_i v_{n+1} \quad (\spadesuit)$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

► Premier cas : tous les α_i sont nuls. Alors : $\forall i \in \llbracket 1, n + 2 \rrbracket, \exists w_i \in F, u_i = w_i$. Ainsi la famille $(w_1, \dots, w_{n+2})$ est une famille de cardinal $(n + 2)$ dans F , qui est engendré par n vecteurs. Par hypothèse de récurrence, elle est liée.[†]

► Second cas : les α_i ne sont pas tous nuls. Alors il existe $i \in \llbracket 1, n + 2 \rrbracket$ tel que $\alpha_i \neq 0$. Qui à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $\alpha_{n+2} \neq 0$.

On introduit alors la nouvelle famille de vecteurs $(U_1, \dots, U_{n+1})$ en posant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, U_i = u_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}} u_{n+2}$$

On a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, U_i = w_i + \alpha_i v_{n+1} - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}} (w_{n+2} + \alpha_{n+2} v_{n+1})$$

D’où : $\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, U_i = w_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}} w_{n+2}$. En particulier : $\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, U_i \in F$.

*. Accrochez vos ceintures !

†. Cette affirmation s’obtient “en deux coups” ; l’hypothèse de récurrence permet seulement d’affirmer que la famille $(w_1, \dots, w_{n+1})$ est liée. A fortiori, la famille $(w_1, \dots, w_{n+2})$, qui la contient, est liée.

La famille $(U_1, \dots, U_{n+1})$ est ainsi une famille de $(n+1)$ vecteurs de F . Puisque F est engendré par n vecteurs (par construction), l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que cette famille est liée. Il existe donc $(n+1)$ scalaires $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i U_i = 0 \text{ d'où : } \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \left(u_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}} u_{n+2} \right) = 0 \text{ d'où : } \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i u_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_{n+2}} \right) u_{n+2} = 0$$

En posant : $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\gamma_i = \beta_i$ et $\gamma_{n+2} = - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_{n+2}}$,

on peut conclure qu'il existe $(n+2)$ scalaires $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+2}$ non tous nuls[‡] tels que : $\sum_{i=1}^{n+2} \gamma_i u_i = 0$. Il s'ensuit que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_{n+2})$ est liée.

➤ Dans les deux cas, la famille $\mathcal{F}$ est liée, ce qui prouve que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, fournit l'hérédité, et achève donc la preuve du lemme (ouf!).

Conclusion. Dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, le cardinal d'une famille libre est majoré par n .



Une fois le lemme établi, la preuve du théorème n'est plus qu'une formalité (qui a clôturé le cours de ce matin).

➤ **PREUVE DU THÉORÈME.** Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Notons n et p les cardinaux respectifs de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Puisque $\mathcal{B}$ est une base, c'est en particulier une famille libre de E , qui est engendré par p vecteurs puisque $\mathcal{B}'$ est génératrice. D'après le lemme, on en déduit que : $n \leq p$.

En permutant les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ dans le court raisonnement ci-dessus, on obtient : $p \leq n$.

Finalement $n = p$, ce qui permet de conclure : deux bases d'un même $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie ont même cardinal.

[‡]. Puisque les β_i sont non tous nuls.