MPSI – Colle 24 (28 avril au 2 mai 2025) : Fractions rationnelles & Espaces vectoriels et appli. linéaires

(EXERCICES SEULEMENT)

Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires

1 – Espaces vectoriels

2 – Sous-espaces vectoriels

3 – Combinaisons linéaires (finies), familles génératrices

4 – Applications linéaires

5 – Noyau et image d'une application linéaire

6 – Isomorphismes et automorphismes

7 – Sommes directes et sev supplémentaires

8 – Projecteurs (et symétries)

NB2. Le but de cette répétition (l'algèbre linéaire était déjà au programme de la colle 23) est de faire en sorte que vous maîtrisiez complètement les méthodes "incontournables" du chapitre 20. Les exos de la colle 24 porteront donc exclusivement sur le chapitre 20, pour insister sur les méthodes décrites dans le programme précédent.

Chapitre 21 : Fractions rationnelles

(QUESTION DE COURS + EXO DE LA BANQUE SEULEMENT)

Dans ce chapitre encore, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 – Généralités

Définition de fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note : $\mathbb{K}(X) = \left\{ \dfrac{P}{Q} \ , \ (P,Q) \in \mathbb{K}[X], \ Q \neq 0 \right\}$. La fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est irréductible lorsque $P \wedge Q = 1$.

Le degré de la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ est : $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$. Le degré dans $\mathbb{K}(X)$ possède les mêmes propriétés que le degré dans $\mathbb{K}[X]$ (principalement : le degré d'un produit est la somme des degrés ; le degré d'une somme est majoré par le max).

Somme et produit de deux fractions rationnelles. $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps (le corps des fractions rationnelles...).

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible. Un zéro de F est un scalaire α qui est racine de P. Un pôle de F est un scalaire de F qui est racine de Q. Définitions de zéro et de pôle de multiplicité p.

2 – Partie entière et partie polaire d'une fraction rationnelle

Théorème : pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$, il existe un unique couple (E, G) avec $E \in \mathbb{K}[X]$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ de degré < 0 tel que : $F = E + G$.

Définitions : le polynôme E du théorème est alors appelé partie entière de F, et la fraction rationnelle G partie polaire de F.

3 – Décomposition en éléments simples

Au-delà des théorèmes assurant l'existence et l'unicité d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ ou de $\mathbb{R}(X)$, il faut surtout retenir les méthodes pratiques pour obtenir de telles décompositions : méthodes d'identification (à utiliser exceptionnellement, ou in articulo mortis), de "multiplication-évaluation", de "multiplication-limite", et la propriété ci-dessous à utiliser pour les pôles simples.

Propriété : soient $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible, et α un pôle <u>simple</u> de F. Dans ce contexte, on peut écrire : $F = G + \dfrac{\lambda}{X - \alpha}$, où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle, et $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$

QUESTIONS DE COURS

➤ **Propriétés du degré**. Soient F_1 et $F_2 \in \mathbb{K}(X)$. On a : $\deg(F_1F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$ et $\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$.

➤ **Propriété (partie entière, partie polaire)**. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple (E, G) avec $E \in \mathbb{K}[X]$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ de degré < 0 tel que : $F = E + G$.

➤ **Propriété**. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, et soit α un pôle de multiplicité p de F. Il existe un unique couple (R, G) avec $R \in \mathbb{K}[X]$ de degré $< p$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ n'admettant pas α pour pôle tel que :

$$F = G + \frac{R}{(X-\alpha)^p}$$

➤ **Propriété**. Soient $F = P/Q$ une fraction rationnelle, et α un pôle simple de F. Dans ce contexte, on peut écrire : $F = G + \dfrac{\lambda}{X-\alpha}$, où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle, et $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$

Pour mémoire, et pour les exos de cette semaine :

MÉTHODES ESSENTIELLES DU CHAPITRE 20

1. Montrer que "quelquechose" est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E :

- **a.** En utilisant les axiomes "(SEVx)" (exo 1 de la banque 22)
- **b.** En utilisant "un Vect" (exo 2 de la banque 22)
- **c.** En utilisant "un ker" (exo 3 de la banque 22)

2. Déterminer une famille génératrice d'un sev (répétition du point 1.b, exo 4 de la banque 22)

3. Montrer qu'une application est linéaire (ou est un endomorphisme) (exo 5 de la banque 22)

4. Déterminer le noyau d'une application linéaire (résolution de $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$, exo 6 de la banque 22)

5. Déterminer l'image d'une application linéaire

(en utilisant : $f\left(\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_n\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(f(\overrightarrow{v}_1), \dots, f(\overrightarrow{v}_n)\right)$, exo 7 de la banque 22)

6. Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme/automorphisme (exo 8 de la banque 22)

7. Montrer que deux sev sont supplémentaires dans un ev E (exo 9 de la banque 22)