

COLLE 25 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1 — Propriété. Soient $v_1, \dots, v_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

La famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est liée SSI il existe un entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$.

PREUVE. ► Sens direct. Supposons que la famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est liée.

Alors il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$. Puisque le n -uplet est non nul, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

tel que $\alpha_i \neq 0$.^{*} On peut alors écrire : $\alpha_i v_i = - \sum_{k=1, k \neq i}^n \alpha_k v_k$ d'où $v_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_i} \right) v_k$

Par suite : $v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$ ce qui prouve la première implication.

► Réciproque. Supposons qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$.[†] Alors il existe $(n-1)$ scalaires $\alpha_1, \dots, \widehat{\alpha_i}, \dots, \alpha_n$ tels que : $v_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \alpha_k v_k$. Il existe donc n scalaires $\beta_1, \dots, \beta_n$ non tous

nuls tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = 0_E$ (en ayant posé $\beta_k = \alpha_k$ pour tout $k \neq i$, et $\alpha_i = -1$). D'où la famille $\mathcal{F}$ est liée, ce qui achève la preuve de la seconde implication.

Conclusion. $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est liée SSI il existe un entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$.

QUESTION DE COURS 2 — Théorème (existence d'un supplémentaire en dimension finie).

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et F un sev de E . Il existe un sev G de E tel que : $E = F \oplus G$.

PREUVE. Notons $n = \dim E$, et considérons F un sev de E . F est de dimension finie (notons $p = \dim F$) et on a $0 \leq p \leq n$. Lorsque $p = 0$ ou $p = n$, la propriété est immédiate ($E = \{0_E\} \oplus E = E \oplus \{0_E\}$).

Par la suite, on peut donc supposer que : $1 \leq p \leq n-1$.

Puisque F est un espace vectoriel non nul, il admet une base : $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \dots, v_p\}$. Cette base est en particulier une famille libre de E ; d'après le théorème de la base incomplète, il existe $(n-p)$ vecteurs $w_1, \dots, w_{n-p}$ de E tels que la famille $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_{n-p}\}$ est une base de E .

Montrons que : $E = F \oplus G$ avec $G = \text{Vect}(w_1, \dots, w_{n-p})$.

► Observons que : $F + G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p) + \text{Vect}(w_1, \dots, w_{n-p})$ d'où :

$$F + G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_{n-p})$$

La famille $\mathcal{B}$ étant une base de E , elle est en particulier génératrice de E . D'où : $F + G = E$ (

► Soit $V \in F \cap G$. Alors il existe n scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{n-p}$ tels que : $V = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j w_j$.

On en déduit que : $\sum_{i=1}^p \alpha_i v_i - \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j w_j = 0_E$. Puisque $\mathcal{B}$ est en particulier une famille libre de E , on en

déduit que tous les α_i et tous les β_j sont nuls. Par suite : $V = 0_E$. D'où : $F \cap G = \{0_E\}$ (

► On déduit alors de (), () et de la caractérisation des sev supplémentaires que $E = F \oplus G$.

Conclusion. Tout sev d'un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie E admet un supplémentaire dans E .

*. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$, et achever la preuve avec cette hypothèse.

†. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $v_1 \in \text{Vect}(v_2, \dots, v_n)$, et achever la preuve avec cette hypothèse.

QUESTION DE COURS 3 — Théorème (des 4 dimensions). Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et F et G deux sev de E . Alors : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

PREUVE. ► Puisque F et G sont deux sev de E , et que E est de dimension finie, F et G sont également de dimension finie. L'intersection $F \cap G$ est donc elle aussi de dimension finie. Par suite $F \cap G$ admet un supplémentaire dans F que nous noterons H ; on a donc $\boxed{(F \cap G) \oplus H = F \quad (\spadesuit)}$.

► Montrons que H et G sont supplémentaires dans $F + G$

En premier lieu : $H + (F \cap G) = F$, d'où $H + (F \cap G) + G = F + G$. Or puisque $(F \cap G) \subset G$, on a : $H + (F \cap G) + G = H + G$. Par suite : $F + G = H + G$.

En second lieu : $H \cap G = (H \cap F) \cap G$ car H est inclus dans F , ce qui implique : $(H \cap F) = H$. On en déduit, par associativité de l'intersection que : $H \cap G = H \cap (F \cap G)$. Or $H \cap (F \cap G) = \{0_E\}$ car H et $(F \cap G)$ sont supplémentaires dans F par hypothèse.

Donc : $\boxed{F + G = H \oplus G \quad (\clubsuit)}$.

On déduit de $(\spadesuit)^\dagger$ que : $\dim H = \dim F - \dim(F \cap G)$; et de $(\clubsuit)$ que : $\dim H = \dim(F + G) - \dim G$.

En identifiant ces deux expressions obtenues pour $\dim H$, on obtient :

$$\dim F - \dim(F \cap G) = \dim(F + G) - \dim G$$

puis la conclusion : $\boxed{\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$.

QUESTION DE COURS 4 — Propriété (caractérisation des supplémentaires en dimension finie).

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, F et G deux sev de E . Alors :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

PREUVE. La preuve présentée ci-dessous (par équivalences successives) est une variante de celle faite en classe (par double implication). Vous pouvez évidemment la présenter en colle, en justifiant bien à l'oral les trois équivalences.

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, F et G deux sev de E . On a :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim E = \dim(F + G) \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

La première équivalence provient de la caractérisation des sev supplémentaires (celle du chap 20) ; la seconde s'obtient en observant que E est l'unique sev de E de dimension $\dim E$; la dernière est une application du T4D, en utilisant le fait que $F \cap G = \{0_E\}$.

Conclusion. $E = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$

$\dagger$. Et de la formule donnant la dimension d'une somme directe : $\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.

QUESTION DE COURS 5 — Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , H un hyperplan de E et v un vecteur de E tel que $v \notin H$. Alors : $E = H \oplus \text{Vect}(v)$.

PREUVE. D'après le T4D : $\dim(H + \text{Vect}(v)) = \dim H + \dim \text{Vect}(v) - \dim(H \cap \text{Vect}(v))$.

Or $\dim H = n - 1$ (H étant un hyperplan de E), et $\dim \text{Vect}(v) = 1$ (puisque $v \neq 0_E$).

D'où : $\dim(H + \text{Vect}(v)) = n - \dim(H \cap \text{Vect}(v))$ (♠)

Par ailleurs : $\{0_E\} \subset (H \cap \text{Vect}(v)) \subset \text{Vect}(v)$. Il s'ensuit que : $0 \leq \dim(H \cap \text{Vect}(v)) \leq 1$.

Donc $\dim(H \cap \text{Vect}(v)) = 0$ ou $\dim(H \cap \text{Vect}(v)) = 1$.

Par l'absurde, supposons que : $\dim(H \cap \text{Vect}(v)) = 1$. Alors : $H \cap \text{Vect}(v) = \text{Vect}(v)$ puisque $H \cap \text{Vect}(v)$ est contenu dans $\text{Vect}(v)$, et que ces deux espaces auraient alors la même dimension. Cette égalité impliquerait $v \in H$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur v .

On en déduit que : $\dim(H \cap \text{Vect}(v)) = 0$, d'où : $H \cap \text{Vect}(v) = \{0_E\}$ (♣).

On déduit alors de (♠) et (♣) que : $E = H \oplus \text{Vect}(v)$

QUESTION DE COURS 6 — Théorème (classification des ev de dimension finie). Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

PREUVE. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n non nulle.[§] E admet une base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. On définit alors les applications

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^n &\longrightarrow E & \text{et} & & \psi : E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i & & & V &\longmapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

où l'on a noté $(x_1, \dots, x_n)$ le n -uplet des coordonnées du vecteur V dans la base $\mathcal{B}$.

Il est immédiat que φ et ψ sont linéaires, $\varphi \circ \psi = \text{id}_E$ et $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$. On en déduit que φ et ψ sont des isomorphismes, d'où la conclusion : tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Interprétation. A un isomorphisme près, $\mathbb{K}^n$ est l'unique $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

Interprétation libre... A un costume près, il existe un unique Manneken-Pis.



De la même manière :

- l'espace vectoriel : $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$;
- l'espace vectoriel F des solutions (à valeurs réelles) de l'EDL2 $y'' - 3y' + 2y = 0$, càd : $F = \text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$;

➤ l'espace vectoriel $D_2(\mathbb{R}) = \text{Vect}(E_{11}, E_{22})$;

➤ l'espace vectoriel E des SRL2 $(u_n)_n$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, càd :

$$E = \text{Vect} \left(\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)$$

sont quatre costumes différents pour le même $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

[§]. Sinon $E = \{0_E\}$ et il n'y a pas grand chose à faire...

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1 — Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la famille $B' = \{L_0, L_1, L_3\}$, les polynômes $L_\heartsuit$ étant les polynômes interpolateurs de $\mathbb{R}_2[X]$ associés aux réels 0, 1 et 3.

1/ Ecrire la matrice de passage $P_{BB'}$, avec $B = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2/ Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Donner la formule permettant d'obtenir le triplet $X_{B'}$ des coordonnées de P dans la base B' , en fonction de $P_{BB'}$ et du triplet X_B des coordonnées de P dans la base B (on ne demandera pas d'effectuer ce calcul).

EXERCICE 2 — Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que l'application linéaire $\varphi : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto (P - P') \in \mathbb{K}_n[X]$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

EXERCICE 3 — Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble F des matrices dont la somme des coefficients est nulle.

Etablir que F est un hyperplan de E ; puis déterminer trois supplémentaires de F dans E .

EXERCICE 4 — Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, on considère $H = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(A) = 0\}$, et $D = \operatorname{Vect}(E_{22})$.

Etablir que $M_2(\mathbb{R}) = H \oplus D$.

EXERCICE 5 — Dans $E = \mathbb{K}_4[X]$, on considère $F = \{P \in E, 6 \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } \geq 2\}$, et $G = \operatorname{Vect}(1, 2X + 3)$.

Etablir que $\mathbb{K}_4[X] = F \oplus G$.

EXERCICE 6 — Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$, on considère le sev :

$$G = \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{X-1}, \frac{1}{X-2}\right)$$

1/ Justifier que la famille $B = \left\{\frac{1}{X}, \frac{1}{X-1}, \frac{1}{X-2}\right\}$ est une base de G .

2/ Soit $F = \frac{X+1}{X^3-3X^2+2X}$. Montrer que $F \in G$, et déterminer les coordonnées de F dans la base B .

EXERCICE 7 — Dans le $\mathbb{R}$ -ev $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère la famille :

$$B = \{\sin, \sin^2, \sin^3, \sin^4, \sin^5\}$$

1/ Etablir que la famille B est libre.

2/ On note $F = \operatorname{Vect}(B)$, et g la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(5x)$.

Montrer que $g \in F$, et déterminer les coordonnées de g dans la base B .

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1 — Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la famille $B' = \{L_0, L_1, L_3\}$, les polynômes $L_\heartsuit$ étant les polynômes interpolateurs de $\mathbb{R}_2[X]$ associés aux réels 0, 1 et 3.

1/ Ecrire la matrice de passage $P_{BB'}$, avec $B = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Déterminons les polynômes interpolateurs de Lagrange de $\mathbb{R}_2[X]$ associés aux réels 0, 1 et 3.

$$\text{Par définition : } L_0 = \frac{1}{3} (X - 1) (X - 3) = \frac{1}{3} X^2 - \frac{4}{3} X + 1$$

$$\text{Par définition : } L_1 = -\frac{1}{2} X (X - 3) = -\frac{1}{2} X^2 + \frac{3}{2} X$$

$$\text{Par définition : } L_3 = \frac{1}{6} X (X - 1) = \frac{1}{6} X^2 - \frac{1}{6} X$$

$$\text{CONCLUSION. La matrice de passage de la base } B \text{ à la base } B' \text{ est : } P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

2/ Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Donner la formule permettant d'obtenir le triplet $X_{B'}$ des coordonnées de P dans la base B' , en fonction de $P_{BB'}$ et du triplet X_B des coordonnées de P dans la base B (on ne demandera pas d'effectuer ce calcul).

D'après la formule du changement de base, on a : $X_{B'} = P_{B'B} X_B$.

$$\text{Or, selon l'énoncé } X_B = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}; \text{ et selon le cours : } P_{B'B} = P_{BB'}^{-1}.$$

$$\text{CONCLUSION. } X_{B'} = P_{BB'}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2 — Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que l'application linéaire $\varphi : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto (P - P') \in \mathbb{K}_n[X]$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

► L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ a pour base canonique $\mathcal{B} = (X^i)_{i \in [0, n]}$.

Il s'ensuit que : $\text{im } \varphi = \text{Vect} \left((\varphi(X^i))_{i \in [0, n]} \right)$.

Or : $(\varphi(X^i))_{i \in [0, n]} = (X^i - iX^{i-1})_{i \in [0, n]}$. La famille des polynômes $X^i - iX^{i-1}$ est libre car échelonnée, et de cardinal $(n+1)$ égal à la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$. D'où : $\text{im } \varphi = \mathbb{K}_n[X]$. Donc l'endomorphisme φ est surjectif.

► Par ailleurs : $P \in \ker \varphi \iff \varphi(P) = \tilde{0} \iff P = P' \iff P = \tilde{0}$

On en déduit que : $\ker \varphi = \{\tilde{0}\}$. Donc l'endomorphisme φ est injectif.

Il s'ensuit que φ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

CONCLUSION. $\varphi \in \text{GL}(\mathbb{K}_n[X])$

Remarque. L'énoncé ne demandait pas de prouver la linéarité de φ , ni sa bonne définition. Si tel n'avait pas été le cas, il aurait fallu observer que l'application φ est bien définie, car pour tout polynôme P de degré au plus n , $P - P'$ est un polynôme de degré au plus n . En outre, un calcul aisé permet d'établir que φ est linéaire, c'est à dire que pour tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ on a : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$. Par suite : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$.

EXERCICE 3 — Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble F des matrices dont la somme des coefficients est nulle.

Etablir que F est un hyperplan de E ; puis déterminer trois supplémentaires de F dans E .

Soit $M \in E$. On a :

$$M \in F \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = a \underbrace{\begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & -E_{22} \end{pmatrix}}_{M_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & E_{12} \\ 0 & -E_{22} \end{pmatrix}}_{M_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{21} & -E_{22} \end{pmatrix}}_{M_3} \iff M \in \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$$

Ainsi : $F = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$

Ce qui assure que F est un sev de E , et que $B = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une famille génératrice de F .

Justifions que B est une famille libre. S'il existe trois réels a, b et c tels que $aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0_E$, alors :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit immédiatement que $a = b = c = 0$. Ce qui prouve que la famille B est libre.

Par suite B est une base de F . D'où : $\dim F = 3 = \dim E - 1$.

Ce qui prouve que F est un hyperplan de E .

D'après le cours, on peut alors affirmer que $E = F \oplus \text{Vect}(N)$, avec N une matrice quelconque de $M_2(\mathbb{R})$ n'appartenant pas à F .[¶] On a donc par exemple :

$$M_2(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(I_2) = F \oplus \text{Vect}(E_{11}) = F \oplus \text{Vect}(E_{12}) = F \oplus \text{Vect}(\text{diag}(2, 3)) \text{ etc. } \dots$$

EXERCICE 4 — Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, on considère $H = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \text{tr}(A) = 0\}$, et $D = \text{Vect}(E_{22})$.

Etablir que $M_2(\mathbb{R}) = H \oplus D$.

Soit $M \in E$. On a :

$$M \in H \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21} \iff M \in \text{Vect}(E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21})$$

$$\text{Ainsi : } H = \text{Vect}\left(\underbrace{E_{11} - E_{22}}_{M_1}, E_{12}, E_{21}\right)$$

Ce qui assure que H est un sev de E , et que $B = \{M_1, E_{12}, E_{21}\}$ est une famille génératrice de H .

[¶] Il suffit de choisir pour N une matrice dont la somme des coefficients n'est pas nulle.

Justifions que B est une famille libre. S'il existe trois réels a, b et c tels que $aM_1 + bE_{12} + cE_{21} = 0_E$, alors :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit immédiatement que $a = b = c = 0$. Ce qui prouve que la famille B est libre.

Par suite B est une base de H . D'où : $\dim H = 3 = \dim E - 1$.

Ce qui prouve que H est un hyperplan de E .

Par ailleurs, $E_{22} \in E \setminus H$, puisque $\text{tr}(E_{22}) \neq 0$. D'après le cours : $E = H \oplus \text{Vect}(E_{22})$.

CONCLUSION. $M_2(\mathbb{R}) = H \oplus \text{Vect}(E_{22})$

EXERCICE 5 — Dans $E = \mathbb{K}_4[X]$, on considère $F = \{P \in E, 6 \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } \geq 2\}$, et $G = \text{Vect}(1, 2X + 3)$.

Etablir que $\mathbb{K}_4[X] = F \oplus G$.

► *Dimension de F .* Soit $P \in \mathbb{K}_4[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in F &\iff (X-6)^2 | P \iff \exists Q \in \mathbb{K}_2[X], P = (X-6)^2 Q \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, P = (X-6)^2(aX^2 + bX + c) \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, P = aX^2(X-6)^2 + bX(X-6)^2 + c(X-6)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que : $F = \text{Vect}((X-6)^2, X(X-6)^2, X^2(X-6)^2)$.

La famille $B = \{(X-6)^2, X(X-6)^2, X^2(X-6)^2\}$ est génératrice de F (c'est écrit au-dessus!), et libre car échelonnée. Donc B est une base de F . Il s'ensuit que : $\dim F = 3$ (♠)

► *Dimension de G .* Selon l'énoncé, la famille $B' = \{1, 2X + 3\}$ est génératrice de G , et libre car échelonnée. Donc B' est une base de G . Il s'ensuit que : $\dim G = 2$ (♣)

► *Intersection de F et de G .* Soit $P \in \mathbb{K}_4[X]$. On a :

$$P \in F \cap G \iff \exists (a, b, c, d, e) \in \mathbb{K}^5, P = \underbrace{a(X-6)^2 + bX(X-6)^2 + cX^2(X-6)^2}_{P_1} = d + e(2X + 3)$$

Cette égalité implique très clairement que $a = b = c = d = e = 0$.^{||}

On en déduit que $F \cap G = \{\tilde{0}\}$ (♡)

► D'après (♠), (♣) et (♡) : $\begin{cases} \dim F + \dim G = 5 = \dim \mathbb{K}_4[X] \\ F \cap G = \{\tilde{0}\} \end{cases}$

CONCLUSION. $\mathbb{K}_4[X] = F \oplus G$

^{||}. Si l'un des réels a, b ou c est non nul, le degré de P_1 est strictement supérieur à celui de $d + e(2X + 3)$. D'où $a = b = c = 0$, et $d + e(2X + 3) = \tilde{0}$: d'où $d = e = 0$.

EXERCICE 6 — Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$, on considère le sev :

$$G = \text{Vect} \left(\frac{1}{X}, \frac{1}{X-1}, \frac{1}{X-2} \right)$$

1/ Justifier que la famille $B = \left\{ \frac{1}{X}, \frac{1}{X-1}, \frac{1}{X-2} \right\}$ est une base de G .

La famille B est génératrice de G suivant l'énoncé. S'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$\frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2} = 0_{\mathbb{K}(X)}$$

alors $a = b = c = 0$, car la fraction rationnelle nulle n'admet aucun pôle... D'où B est libre.

CONCLUSION. B est une base de G .

2/ Soit $F = \frac{X+1}{X^3-3X^2+2X}$. Montrer que $F \in G$, et déterminer les coordonnées de F dans la base B .

C'est une autre façon de demander une décomposition en éléments simples...

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif ($\deg F = -2$), et elle possède exactement trois pôles simples, qui sont 0, 1 et 2 puisque $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$.

D'après le TDES dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\exists! (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \frac{X+1}{X^3-3X^2+2X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2}$$

► **Valeur de a .** Puisque 0 est un pôle simple de F , on a : $a = \frac{P(0)}{Q'(0)}$, avec $P = X+1$ et

$$Q' = 3X^2 - 6X + 2. \text{ D'où : } a = \frac{1}{2}.$$

► **Valeur de b .** Puisque 1 est un pôle simple de F , on a : $b = \frac{P(1)}{Q'(1)}$, avec $P = X+1$ et

$$Q' = 3X^2 - 6X + 2. \text{ D'où : } b = -2.$$

► **Valeur de c .** Puisque 2 est un pôle simple de F , on a : $c = \frac{P(2)}{Q'(2)}$, avec $P = X+1$ et

$$Q' = 3X^2 - 6X + 2. \text{ D'où : } c = \frac{3}{2}.$$

Ainsi :

$$F = \frac{1}{2} \times \frac{1}{X} - 2 \times \frac{1}{X-1} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{X-2}$$

CONCLUSION. F appartient à G , et les coordonnées de F dans la base B sont : $X_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 7 — Dans le $\mathbb{R}$ -ev $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère la famille :

$$B = \{\sin, \sin^2, \sin^3, \sin^4, \sin^5\}$$

1/ Etablir que la famille B est libre.

Supposons qu'il existe 5 réels $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ tels que : $\alpha_1 \sin + \alpha_2 \sin^2 + \dots + \alpha_5 \sin^5 = 0_E$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 \sin^2(x) + \alpha_3 \sin^3(x) + \alpha_4 \sin^4(x) + \alpha_5 \sin^5(x) = 0$

Le DL à l'ordre 1 en 0 du terme de gauche donne : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 x + o(x) = 0$. D'où $\alpha_1 = 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_2 \sin^2(x) + \alpha_3 \sin^3(x) + \alpha_4 \sin^4(x) + \alpha_5 \sin^5(x) = 0$

Le DL à l'ordre 2 en 0 du terme de gauche donne : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_2 x^2 + o(x^2) = 0$. D'où $\alpha_2 = 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_3 \sin^3(x) + \alpha_4 \sin^4(x) + \alpha_5 \sin^5(x) = 0$

Le DL à l'ordre 3 en 0 du terme de gauche donne : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_3 x^3 + o(x^3) = 0$. D'où $\alpha_3 = 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_4 \sin^4(x) + \alpha_5 \sin^5(x) = 0$

Le DL à l'ordre 4 en 0 du terme de gauche donne : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_4 x^4 + o(x^4) = 0$. D'où $\alpha_4 = 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_5 \sin^5(x) = 0$

L'évaluation en $\pi/2$ de cette relation donne $\alpha_5 = 0$.

CONCLUSION. La famille B est libre.

Remarque 1. Le colleur bienveillant pourra autoriser le candidat à ne pas détailler toutes les justifications dans le raisonnement précédent !

Remarque 2. Plus généralement, on peut établir par récurrence que la famille $\{\sin, \sin^2, \dots, \sin^n\}$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}^$, toujours en utilisant les DL.*

Remarque 3. On peut déduire de la remarque précédente que $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ contient des familles libres de cardinal arbitrairement grand. L'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est donc pas de dimension finie.

2/ On note $F = \text{Vect}(B)$, et g la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(5x)$.

Montrer que $g \in F$, et déterminer les coordonnées de g dans la base B .

C'est une autre manière de demander une délinéarisation, et cela faisait une éternité!...

Pour tout réel x on a :

$$\sin(5x) = \text{im} (e^{5ix})$$

$$\iff \sin(5x) = \text{im} \left((e^{ix})^5 \right) \quad (\text{formule de Moivre})$$

$$\iff \sin(5x) = \text{im} ((\cos(x) + i \sin(x))^5)$$

$$\iff \sin(5x) = \text{im} (\cos^5(x) + 5i \cos^4(x) \sin(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x)$$

$$- 10i \cos^2(x) \sin^3(x) + 5 \cos(x) \sin^4(x) + i \sin^5(x))$$

$$\Longleftrightarrow \sin(5x) = 5 \cos^4(x) \sin(x) - 10 \cos^2(x) \sin^3(x) + \sin^5(x)$$

$$\Longleftrightarrow \sin(5x) = 5(1 - \sin^2(x))^2 \sin(x) - 10(1 - \sin^2(x)) \sin^3(x) + \sin^5(x)$$

$$\Longleftrightarrow \sin(5x) = 5 \sin(x) - 10 \sin^3(x) + 5 \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) + 10 \sin^5(x) + \sin^5(x)$$

$$\Longleftrightarrow \sin(5x) = 5 \sin(x) - 20 \sin^3(x) + 16 \sin^5(x)$$

CONCLUSION. $g \in F$, et les coordonnées de g dans la base B sont $X_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$