

EXERCICES 24 — FONCTIONS CONVEXES

EXERCICE 1 — Justifier les affirmations suivantes, énoncées dans les notes relatives au chapitre 24.

- 1/ La fonction exponentielle, la fonction $x \mapsto x^{2n}$ et la fonction $\ln$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- 2/ La fonction logarithme népérien, la fonction racine carrée, et la fonction arctangente sont concaves sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 3/ La fonction $\cos$ est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, convexe sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- 4/ La fonction $\sin$ est concave sur $[0, \pi]$, convexe sur $[\pi, 2\pi]$.
- 5/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 2 — Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x \geq x + 1$

EXERCICE 3 — Etablir que pour tout réel $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$

EXERCICE 4 — Etablir que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

EXERCICE 5 — Etablir que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\frac{4}{\pi}x \leq \arctan x \leq x$

EXERCICE 6 — **Inégalité arithmético-géométrique**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que pour tous réels positifs $x_1, \dots, x_n$ on a :

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

EXERCICE 7 — **Inégalité de Hölder**

Soit p et q deux réels > 1 tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- 1/ Etablir que pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, on a :

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

- 2/ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ ($2n$) nombres réels strictement positifs.

On pose : $A = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$, $a_i = \frac{x_i}{A}$ et $b_i = \frac{y_i}{B}$.

Etablir que : $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$.

- 3/ En déduire l'inégalité de Holder : sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$$

EXERCICE 8 — Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ ($2n$) nombres réels positifs.

Etablir que :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

EXERCICE 9 — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . Etablir que :

$$[f \text{ est convexe et concave}] \iff [f \text{ est affine}]$$

EXERCICE 10 — Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction continue et strictement croissante. Etablir que f est convexe si et seulement si sa bijection réciproque f^{-1} est concave.

EXERCICE 11 — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1/ Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$, puis calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

2/ Etablir que f est deux fois dérivable en 0 et que $f''(0) = \frac{1}{6}$.

3/ Etablir que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

INDICATIONS ET ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1 — Selon les théorèmes généraux, les fonctions (usuelles) de cet exercice sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles concernés. En particulier, il s'agit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, et on pourra donc appliquer à répétition la propriété faisant le lien entre la convexité de f et le signe de f'' .

EXERCICES 2 À 5 — Le graphe d'une fonction convexe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes, et en-dessous de chacune de ses cordes.

Le graphe d'une fonction concave est situé en-dessous de chacune de ses tangentes, et au-dessus de chacune de ses cordes.

EXERCICE 6 — Après l'avoir brièvement justifiée, utiliser la concavité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 7 — 1/ Utiliser la convexité de la fonction exponentielle. 2/ Utiliser la question 1 et sommer... 3/ RAS.

EXERCICE 8 — Ecrire l'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$.

EXERCICE 9 — Utiliser le lien entre convexité et signe de la dérivée seconde.

EXERCICE 10 — Montrer l'implication f convexe $\implies f^{-1}$ concave, en utilisant la définition de convexité. La réciproque s'en déduit immédiatement.

EXERCICE 11 — 1/ RAS. 2/ Montrer que f est dérivable en 0, puis que f' est dérivable en 0. Pour les différentes limites que l'on est conduits à calculer, on peut utiliser des DL.