PB des vacances de printemps — 6 mai 2025

Problème 1 — (Arithmétique et probabilités, merci Monsieur LEMAIRE !).

Notations et rappels de vocabulaire.

On appelle espace probabilisé (Ω, P) la donnée d'un ensemble Ω (appelé univers) et d'une probabilité P sur $\mathscr{P}(\Omega)$. Les éléments de Ω sont appelés issues, et les parties de Ω évènements.

Un évènement A étant donné, on note $\Omega \backslash A$ (plutôt que $\overline{A}$) l'évènement contraire de A.

Deux évènements A et B sont dits indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Cette définition admet la généralisation suivante.

> Définition. Soit n un entier $\geqslant 2$, et soit $A_1, \ldots, A_n$ une famille de n évènements.
> Les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si pour tout entier j compris entre 2 et n, et pour toute famille d'indices deux à deux distincts $i_1, \ldots, i_j$ dans $[\![1, n]\!]$ on a :
>
> $$P\left(\bigcap_{k=1}^{j} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{j} P\left(A_{i_k}\right)$$

Partie I — Probabilités

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

1. Soient A et B deux évènements (deux parties de Ω).

a. Etablir que : $A \cap (\Omega \backslash B) = A \backslash (A \cap B)$.

b. Etablir que A et B sont indépendants si et seulement si A et $\Omega \backslash B$ sont indépendants.

c. En déduire que A et B sont indépendants si et seulement si $\Omega \backslash A$ et $\Omega \backslash B$ sont indépendants.

2. Soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de n évènements (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) mutuellement indépendants.

a. Etablir que les évènements $\Omega \backslash A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ sont mutuellement indépendants.

b. En déduire que les évènements $\Omega \backslash A_1, \Omega \backslash A_2, \ldots, \Omega \backslash A_n$ sont mutuellement indépendants.

Partie II — Indicatrice d'Euler

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. On choisit de manière équiprobable un entier compris entre 1 et n.

Soient p un diviseur positif de n, et A_p l'évènement : "l'entier choisi est divisible par p".

3. Calculer $P\left(A_p\right)$.*

4. On note $p_1, \ldots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

a. Soit m un entier naturel. Etablir que $[\forall\, i \in [\![\, 1, r \,]\!],\ p_i | m\ ] \Longleftrightarrow \left[\left(\prod_{i=1}^{r} p_i\right) | m\ \right]$

b. Etablir que les évènements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

5. On note $\varphi(n)$ (l'indicatrice d'Euler) le nombre d'entiers compris entre 1 et $(n-1)$ qui sont premiers avec n :

$$\varphi(n) = \operatorname{Card}\left\{k \in [\![\, 1, n-1 \,]\!]\,,\ k \wedge n = 1\right\}$$

On note désormais A l'évènement "l'entier choisi est premier avec n".

Calculer $P(A)$, et en déduire que : $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

6. Dans cette ultime question, n et m désignent deux entiers $\geqslant 2$.

Etablir que : $[n \wedge m = 1] \Longrightarrow [\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)]$

$*$. C'est à dire calculer la probabilité qu'un entier choisi au hasard entre 1 et n soit multiple de p.