

Chapitre 23 : Probabilités et variables aléatoires réelles

Tout au long de ce chapitre, on se place dans la situation où l'univers de l'expérience aléatoire est *fini*.

1 – Expérience aléatoire et univers

Définitions d'expérience aléatoire, d'issue (ou éventualité). L'univers (souvent noté Ω) d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues. Un évènement est une partie de l'univers. L'évènement certain (resp. impossible) est Ω (resp. $\emptyset$).

2 – Opérations sur les évènements pour A et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, définitions de $\bar{A}$ (évènement contraire de A), $A \cup B$ (union des évènements A et B), $A \cap B$ (intersection des évènements A et B); faire le lien avec les définitions déjà rencontrées en début d'année dans le cadre de la théorie des ensembles. Deux évènements A et B sont incompatibles (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

Définition : soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Un système complet d'évènements (en abrégé SCE; on dit aussi partition) est une famille $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ d'évènements deux à deux disjoints tels que $\bigcup_{i=1,\dots,n} A_i = \Omega$.

Exemple fondamental : pour tout évènement A , la famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'évènements.

3 – Probabilités

Définition : une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$; et si A et B sont deux parties disjointes de Ω , alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Remarque : il résulte de la définition que pour tout évènement A , le réel $\mathbb{P}(A)$ est compris entre 0 et 1.

Propriétés : 1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$; 2) $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$; 3) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Remarque : le point-clef de la démonstration du 3) est $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Théorème (formule des probabilités totales) : si A est un évènement, et $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'évènements, alors : $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i)$.

Cas important d'application : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$.

Situation d'équiprobabilité : notons $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, et notons pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$. Dans le cas particulier où chaque p_i est égal à $1/n$,

on parle alors d'équiprobabilité. Dans cette situation, on a pour tout évènement $A : \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$ (où $\text{card } A$ désigne le cardinal de A , c'est-à-dire son nombre d'éléments); cette formule correspond au quotient "nombre de cas favorables / nombre de cas possibles".

4 – Probabilités conditionnelles et évènements indépendants

Définition : soient A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A (c-à-d sachant que A est réalisé) est $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$.

Remarque : il résulte de la définition que $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)$.

Propriétés : 1) Pour tout évènement $B : \mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$. 2) Pour tout couple (B_1, B_2) d'évènements : $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$.

Définition : deux évènements A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. Lorsque c'est le cas, on a : $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Théorème (formule des probabilités totales, revisitée) : soit A un évènement, et soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'évènements, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque : cette formule justifie la méthode consistant à calculer des probabilités à l'aide d'un arbre pondéré, où l'on "ajoute les probas correspondant aux différents chemins, et où l'on multiplie les probas correspondant aux branches successives".

Cas important d'application : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(A) \times \mathbb{P}(\bar{B})$

5 – Variables aléatoires réelles

Définition : un espace probabilisé est un couple $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est un univers et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω .

Définition : une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple : gain lors d'un jeu.

► Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition : soit X une VAR. L'espérance mathématique de X , notée $E(X)$ est le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad (\text{ou } E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(X = \omega))$$

Remarque : dans le cas où Ω est fini, on peut noter $x_1, \dots, x_n$ les différentes valeurs prises par X , et $p_1, \dots, p_n$ les probabilités correspondantes. Avec ces notations, l'espérance de X est le réel $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

Remarque : on dit souvent *espérance* pour désigner l'espérance mathématique de X . De plus, l'espérance est également appelée **valeur moyenne** de X .

Propriétés de l'espérance : soient X et Y deux VAR sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors : 1) $E(\lambda X) = \lambda E(X)$; 2) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

► **Variance d'une variable aléatoire réelle**

Définition : soit X une VAR. La **variance** de X est le réel noté $V(X)$ et défini en posant

$$V(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) (X(\omega) - E(X))^2 \text{ (ou } V(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 p_i).$$

Théorème (formule de Koenig-Huygens) : avec les mêmes notations que ci-dessus, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Propriété (inégalité de Markov) : soit X une VAR positive. Alors :
 $\forall a \in \mathbb{R}_+, a\mathbb{P}(X \geq a) \leq E(X)$.

Théorème (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) : soit X une VAR. Alors :
 $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

6 – Variables aléatoires réelles : lois usuelles

a – Loi uniforme

Définition : soient m et n deux entiers naturels, avec $n < m$. Une VAR X suit la **loi uniforme** sur $\llbracket n, m \rrbracket$ si X peut prendre toutes les valeurs de $\llbracket n, m \rrbracket$ avec la probabilité $1/(m - n + 1)$.

b – Loi de Bernoulli

Définition : une VAR X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si X peut prendre les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives p et $1 - p$.

Si tel est le cas, on a : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

c – Loi binomiale

Définition : soient n un entier naturel et p un réel de $[0; 1]$. Une VAR. X suit la **loi binomiale de taille n et de paramètre p** (X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$) si X est la somme de n VAR indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p .

Il revient alors au même de dire que X est égale au nombre de succès au cours de n expériences indépendantes ne pouvant conduire qu'à deux issues : "succès" avec la probabilité p , ou "échec" avec la probabilité $(1 - p)$.

Théorème : X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ alors

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Remarque : dans ce cadre, on obtient $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$ comme conséquence du binôme de Newton (vérifiez que vous savez le justifier!).

Théorème : si X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p , alors :
 $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p) = npq$ (avec $q = 1 - p$).

QUESTIONS DE COURS

► **Propriété** : Si A et B sont deux événements d'un univers Ω , alors : $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$

► **(Propriétés des probabilités)** Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω .

1/ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2/ Pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

3/ Pour tout couple (A, B) d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

► **Théorème (formule des probabilités totales)** : soit A un événement, et soit $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ un système complet d'événements, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$$

► **Théorème (formule de Koenig-Huygens)** : soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est fini. On a : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

► **Propriétés de l'espérance et de la variance** Soit X une VAR, et soient a et b deux réels. On a : $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

► **Propriété (espérance de la loi binomiale)** : si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.