Exercices 25 — Applications linéaires en dimension finie

Rang d'une application linéaire

Exercice 1. — 1/ Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+y, x-y) \end{array}$. On admet que $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^3\right)$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

2/ Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P - X^2 P'' \end{array}$. On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

3/ Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A - \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2 \end{array}$. On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 2. — **(Forme linéaire)**. Soit f l'application définie en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K}),\ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a+b+c+d$$

On admet que f est linéaire. Déterminer le rang de f ; puis déterminer le noyau de f (base et dimension).

Exercice 3. — Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P' + P'' \end{array}$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (on pourra admettre que f est linéaire).

Exercice 4. — Dans cet exercice, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_{2024}[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2025.
On note $G = \mathrm{Vect}(X^{450} + X^7 - 1)$ le sev de E engendré par le polynôme $Q = X^{450} + X^7 - 1$.
Enfin, on note F la partie de E suivante : $F = \{P \in E \,/\, P(0) = P(1)\}$.

1/ Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Préciser la dimension de F.

2/ Etablir que $E = F \bigoplus G$.

3/ On note p_F la projection sur F parallèlement à G. Quel est le rang de p_F ?

Exercice 5. — Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$\left[\mathrm{im}\left(f^2\right) = \mathrm{im} f\right] \Longleftrightarrow \left[\ker\left(f^2\right) = \ker f\right]$$

Exercice 6. — Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$\left[E = \ker f \bigoplus \mathrm{im} f\right] \Longleftrightarrow \left[E = \ker f + \mathrm{im} f\right]$$

Exercice 7. — Soit n un entier naturel non nul. On note $E = \mathbb{K}_{2n+1}[X]$.

A tout polynôme P de E, on associe l'élément noté $f(P)$ de $\mathbb{K}^{2n+2}$ défini par :

$$f(P) = (P(0), P(1), \ldots, P(n), P'(0), P'(1), \ldots, P'(n))$$

Etablir qu'il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$f(Q) = (1, 2, \ldots, 2n+2)$$

Exercice 8. — (e3a MP 2017). Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les applications

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \qquad \text{et} \qquad \Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

On admet que φ et Δ sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

1/ Déterminer le rang de Δ.

2/ Etablir que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3/ A l'aide de la question précédente :

a/ Etablir qu'il existe une unique famille de polynômes S_0, S_1,…, S_n de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :

$$\forall\, i \in [\![\, 0, n \,]\!],\ \varphi\,(S_i) = \frac{1}{i!}\, X^i$$

b/ Etablir que la famille $\mathscr{B} = \{S_0, \ldots, S_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4/ Dans cette question, on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$. Etablir que :

$$(\mathrm{id} - \Delta) \circ (\mathrm{id} + \Delta + \cdots + \Delta^n) = \mathrm{id}$$

5/ En déduire l'expression de S_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![\, 0, n \,]\!]$.

Matrice d'une application linéaire

Exercice 9. — On considère l'endomorphisme : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 10. — On considère l'application linéaire : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + y - z, y - z - t, x - z) \end{array}$

Ecrire sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

Exercice 11. — On considère l'endomorphisme : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y + 4z, y + 3z, z) \end{array}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12. — On considère l'endomorphisme : $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A - \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2 \end{array}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer “sans calculs” l'image et le noyau de f.

Exercice 14. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer “sans calculs” l'image et le noyau de f.

Exercice 15. — On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ canoniquement associé à la matrice C.
En d'autres termes, C est la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, à savoir $B = \left(1, X, X^2, X^3\right)$.

1/ A l'aide de la matrice C, déterminer $g(X)$, $g\left(X^2\right)$ et $g(1+X)$.

2/ Calculer le rang de g.

3/ Déterminer une base de $\text{im}g$, puis une base de $\ker g$.

Rang d'une matrice / Rang d'une application linéaire

Exercice 16. — Calculer le rang des matrices suivantes :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3/ $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17. — Calculer le rang des matrices suivantes :

1/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix}$

3/ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \\ a & a \end{pmatrix}$ (a et b scalaires qcques)

Exercice 18. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1/ Déterminer le rang de f. En déduire la dimension de $\ker f$.

2/ Déterminer une base de $\text{im}f$, puis une base de $\ker f$.

Exercice 19. — On considère l'application : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (9x - 4y,\ 12x - 5y)$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1/ Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2/ Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Donner l'expression de l'automorphisme réciproque f^{-1}.

3/ On considère à présent la famille $B' = (u, v)$, où u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées dans la base canonique : $u = (1, 2)$ et $v = (2, 3)$.

   a/ Justifier que B' est une base de $\mathbb{R}^2$.

   b/ Ecrire la matrice de passage de la base B à la base B'. Dans la suite de l'exercice, on pourra noter P cette matrice.

   c/ Calculer la matrice A' de l'application linéaire f dans la base B' (on vérifiera que A' est une matrice diagonale).

   d/ Calculer pour tout entier naturel n la matrice A'^n ; puis la matrice A^n.

Exercice 20. — On note $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et id l'identité de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer le rang de f. Que peut-on en déduire pour f ?

2/ Déterminer $\ker(f - \mathrm{id})$, ainsi que sa dimension. Vérifier que $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ appartient à ce sous-espace vectoriel.

3/ On pose : $\overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_3}$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4/ Déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Calculer P^{-1}.

5/ Soit A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

a/ Après avoir rappelé la relation liant les matrices A et A', calculer A'.

b/ Pour tout entier naturel n, déterminer A^n.

Une nouvelle méthode pour le calcul du rang

Le rang d'une matrice peut en général être deviné facilement lorsque cette matrice est carrée de taille 2 ou 3. Néanmoins, pour des matrices de taille supérieure, ce n'est pas toujours une opération aussi évidente, et il est un peu lourd de systématiquement revenir à la caractérisation de famille libre pour déterminer si les colonnes d'une telle matrice sont liées ou non.

Une méthode alternative pour calculer le rang d'une matrice consiste à rendre cette matrice triangulaire supérieure, exactement comme nous l'avons décrit dans l'algorithme du pivot de Gauss : le rang de la matrice obtenue sera alors égal au nombre de coefficients non nuls sur la "diagonale".

Les opérations laissant invariant le rang d'une matrice sont les suivantes :

- multiplication d'une colonne (ou d'une ligne) par un scalaire non nul ;
- permutation de colonnes (ou de lignes) ;
- somme de deux colonnes (ou de deux lignes).

Ci-dessous, quatre exemples illustrant cette méthode :

➢ Exemple 1

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = 3$

➢ Exemple 2

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix}$

On a : $\quad \text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$

➢ Exemple 3

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a : $\quad \text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

➢ Exemple 4

Calculer le rang de $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

On a : $\quad \text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -7 & 7 & -14 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Exercice 21. — En vous inspirant des exemples précédents, déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

3/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (avec $\alpha \in \mathbb{K}$)

4/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ (avec a, b et $c \in \mathbb{K}$)

Exercice 22. — Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & m & 2 \end{pmatrix}$.

1/ Déterminer le rang de M en fonction de m.

2/ Dans cette question, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice M. On suppose en outre que : $m = 1$.

a/ Préciser le rang de f, ainsi que la dimension du noyau de f.

b/ Déterminer une base de l'image de f, ainsi qu'une base de son noyau.

c/ $\ker f$ et $\text{im} f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 23. — (Calcul du rang). Calculer le rang de chacune des matrices suivantes.

1/ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2/ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3/ $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4/ $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5/ $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6/ $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7/ $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quelques exercices de synthèse sur l'algèbre linéaire

Exercice 24. — (Existence d'un polynôme annulateur, question de cours classique).

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et soit u un endomorphisme de u.

Etablir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 25. — (Oral Centrale PSI). Soit n un entier naturel $\geqslant 5$. Etablir qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que :

$$P + XP'' = X^n - 5X^4 + 1$$

Exercice 26. — Une propriété des endomorphismes nilpotents. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie non nulle. On note : $n = \dim E$.

Soit f un endomorphisme non nul et nilpotent de E ; on suppose donc qu'il existe un entier naturel $m \geqslant 2$ tel que $f^m = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

L'objectif de cette question est d'établir que : $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1/ Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2/ Montrer qu'il existe un vecteur V de E tel que la famille : $\left\{V, f(V), f^2(V), \ldots, f^{p-1}(V)\right\}$ est libre.

Indication : utiliser le fait que $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

3/ En déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Remarque. La traduction matricielle de cette propriété sera qu'une matrice nilpotente A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiera nécessairement (au pire) $A^n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$.

EXERCICE 27. — (Extrait de Concours)

Dans ce problème, on note $\mathrm{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note également : $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

➤ **PARTIE A - Etude d'un endomorphisme.**

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \longmapsto (2X+1)\,P - \left(X^2-1\right)P'$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

1/ Ecrire la matrice $A = \mathrm{M}_{\mathrm{B}}(f)$ de f dans la base B.

2/ Calculer le rang de f. Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme f ?

3/ Etablir que l'équation

$$(\mathrm{E}) : \qquad P + P' = X^2 P' - 2XP$$

admet comme unique solution dans $\mathbb{R}_2[X]$ le polynôme nul.

➤ **PARTIE B - Changement de base.**

On considère la famille $\mathrm{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ avec :

$$P_1 = X^2 - 1\,; \qquad P_2 = (X-1)^2\,; \qquad P_3 = (X+1)^2$$

4/ Etablir que la famille B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.

6/ Après avoir brièvement justifié que P est inversible, calculer P^{-1}.*

7/ Ecrire la matrice $A' = \mathrm{M}_{\mathrm{B}'}(f)$ de f dans la base B'.†

8/ En déduire qu'il existe (au moins) un polynôme $S \in \mathbb{R}_2[X]$ non nul, tel que $f(S) = 3S$. Donner un exemple d'un tel polynôme S.

9/ Soit n un entier naturel. Préciser l'expression de A'^n, ainsi que le lien entre A^n et A'^n.

EXERCICE 28. — (Inversibilité $\longleftrightarrow$ Rang maximal).

Pour toute matrice carrée A, il est équivalent de dire que A est inversible ou que le rang de A est égal à n. Formellement ‡ :

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad [A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})] \Longleftrightarrow [\mathrm{rg}(A) = n]$$

Cette observation faite, on propose ci-dessous de prouver que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ de quatre manières différentes.

∗. On pourra vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{4}R$, où $R \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients appartiennent à $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

†. On pourra vérifier que A' est une matrice diagonale.

‡. C'est une conséquence du théorème du rang : l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A est surjectif (càd $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = n$) SSI il est bijectif (càd $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).

1/ Résoudre le système "$AX = B$". En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

2/ Calculer $(A + \mathrm{I}_3)^3$. En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

3/ Calculer le rang de A. En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

4/ Montrer que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.