

COLLE 28 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1. — Propriété (trace d'un projecteur) : soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, tel que $p^2 = p$. On a : $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Preuve. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n , et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On peut affirmer que $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$ (cf propriétés des projecteurs). On choisit alors une base $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_r)$ de $\text{Im}(p)$ (l'entier r désignant le rang de p) et une base $\mathcal{B}'' = (w_1, \dots, w_{n-r})$ de $\ker(p)$, de telle sorte que $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est une base de E .

Par construction des vecteurs v_j , on a : $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $p(v_j) = v_j$, car $v_j \in \text{Im}(p)$, et $\text{Im}(p) = \ker(\text{id}_E - p)$ (re-cf propriétés des projecteurs).

Et par construction des vecteurs w_j , on a : $\forall j \in \llbracket 1, n-r \rrbracket$, $p(w_j) = 0$, car $w_j \in \ker(p)$.

Il s'ensuit que la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est : $M_{\mathcal{B}}(p) = J_r =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\text{tr}(M_{\mathcal{B}}(p)) = \text{tr}(J_r) = r$. Par suite : $\text{tr}(p) = r$. Ainsi : $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Conclusion. soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, tel que $p^2 = p$. On a : $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

QUESTION DE COURS 2. — Propriété — $\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}) \quad \text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$

Preuve. Supposons que $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ soit de rang r . Alors il existe deux matrices $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que : $PAQ = J_r$. On en déduit : $Q^T A^T P^T = J_r^T$. Or Q^T et P^T sont inversibles, et la matrice J_r^T est la matrice " J_r " de $M_{pn}(\mathbb{K})$.

Il s'ensuit que A^T est équivalente à J_r , et que $\text{rg}(A^T) = r$ d'après le théorème précédent. On a ainsi établi que si A est de rang r , alors sa transposée est de rang r .

QUESTION DE COURS 3. — La trace est un invariant de similitude dans $M_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ semblables. Alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

On a alors : $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}((P^{-1}A)P) = \text{tr}(P(P^{-1}A)) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr}(A)$.*

On en déduit que deux matrices semblables ont même trace.

QUESTION DE COURS 4. — Le rang est un invariant de similitude dans $M_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ semblables. Alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

En notant $f_{\bullet}$ les applications linéaires canoniquement associées aux matrices de cette égalité, on obtient :

$$f_B = f_P^{-1} \circ f_A \circ f_P$$

puis la conclusion en observant que le rang d'une application linéaire est invariant par composition à gauche ou à droite avec un isomorphisme.

Ainsi, deux matrices semblables ont même rang.

*. En utilise de manière essentielle la formule $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$, dont la démonstration est à savoir retrouver rapidement.

QUESTION DE COURS 5. — Le déterminant est un invariant de similitude dans $M_2(\mathbb{K})$ (en attendant de définir le déterminant dans $M_n(\mathbb{K})$, et de généraliser cette propriété).

Preuve. Mêmes notations que dans les 2 questions de cours précédentes. Grâce aux propriétés établies dans le chapitre 13 (calcul matriciel), on a :

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \det(A) \det(P) = \det(A)$$

Ainsi, deux matrices semblables ont même déterminant.

QUESTION DE COURS 6. — **Théorème (Formule du changement de base).** Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors : $M_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n ; $f \in \mathcal{L}(E)$; $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases base de E .

Notons : $M = M_{\mathcal{B}}(f)$ (resp. $M' = M_{\mathcal{B}'}(f)$) la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$).

Notons : $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, de telle sorte que $P^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Soit V un vecteur de E , dont on note $X_{\mathcal{B}}$ (resp. $X_{\mathcal{B}'}$) le n -uplet des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$).

On introduit encore $Y_{\mathcal{B}}$ (resp. $Y_{\mathcal{B}'}$) le n -uplet des coordonnées de $f(V)$ dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$).

On a alors : $Y_{\mathcal{B}'} = M' X_{\mathcal{B}'} \spadesuit$ (et $Y_{\mathcal{B}} = M X_{\mathcal{B}}$) (propriété de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée).

Par ailleurs : $Y_{\mathcal{B}'} = P^{-1} Y_{\mathcal{B}}$ (propriété de la matrice de passage). D'où : $Y_{\mathcal{B}'} = P^{-1} M X_{\mathcal{B}}$ et donc :

$$Y_{\mathcal{B}'} = P^{-1} M P X_{\mathcal{B}'} \clubsuit$$

D'après $\spadesuit$ et $\clubsuit$: $M' X_{\mathcal{B}'} = P^{-1} M P X_{\mathcal{B}'}$. Le vecteur V (et par suite le n -uplet $X_{\mathcal{B}'}$) étant arbitraire dans ce raisonnement, on a ainsi établi que :

$\forall X \in \mathbb{K}^n$, $M' X = P^{-1} M P X$ On en déduit que : $M' = P^{-1} M P$ en vertu du lemme suivant la conclusion.

Conclusion. $M_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Lemme. $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $[A = B] \iff [\forall X \in \mathbb{K}^n, AX = BX]$

La preuve du lemme est sur le principe du volontariat

Preuve. Notons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$.

Notons aussi, pour tout entier $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$ l'élément de $\mathbb{K}^n$ dont la j -ème coordonnée vaut 1 et toutes les autres sont nulles.

Supposons que $\forall X \in \mathbb{K}^n$, $AX = BX$. Alors en particulier : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Ae_j = Be_j$.

$$\text{Or : } Ae_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{ et } Be_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \text{ (le produit de } A \text{ par } e_j \text{ est égal à la } j\text{-ème colonne de la matrice } A\text{).}$$

On en déduit donc que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{ij} = b_{ij}$.

Puisqu'en outre l'entier j est arbitraire dans les calculs précédents, on a établi que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{ij} = b_{ij}$.

Ce qui signifie que $A = B$, et prouve donc l'implication "de la droite vers la gauche". Réciproque immédiate.

QUESTION DE COURS 7. — Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension p , et F un $\mathbb{K}$ -ev ; soit $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ une base de E . L'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow F^p \\ f &\longmapsto (f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_p)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Preuve. ➤ La linéarité de ψ est immédiate.

➤ **Injectivité.** Soient f et g deux applications linéaires de E dans F telles que : $\psi(f) = \psi(g)$.

Alors : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(\vec{v}_i) = g(\vec{v}_i)$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de E . Puisque B est une base de E : $\exists! (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \vec{u} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{v}_i$. On a alors, par hypothèse et par linéarité de f et de g :

$$f(\vec{u}) = f\left(\sum_{i=1}^p x_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^p x_i f(\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^p x_i g(\vec{v}_i) = g\left(\sum_{i=1}^p x_i \vec{v}_i\right) = g(\vec{u})$$

On en déduit que $f = g$, ce qui prouve l'injectivité de ψ .

➤ **Surjectivité.** Soit $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p) \in F^p$. On définit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ en posant : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$.

Ces hypothèses faites, f est définie sur E tout entier (mêmes calculs que plus haut), et vérifie par construction : $\psi(f) = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$. Ce qui prouve la surjectivité de ψ .

Conclusion. ψ est un isomorphisme.

Remarque. Cet énoncé est finalement crucial dans ce chapitre. En effet, il permet d'établir une correspondance entre applications linéaires et matrices en dimension finie. Un peu plus explicitement, il justifie qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie est uniquement définie par sa matrice, dans des bases de E et F fixées.

QUESTION DE COURS 8. — (Sur le principe du volontariat) Théorème : soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$. On a : $[\text{rg}(A) = r] \implies [A \equiv J_r]$

Preuve. Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, de rang r . Il revient au même de dire que l'application linéaire canoniquement associée $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est de rang r . Le noyau de f_A est donc de dimension $p - r$ (d'après le théorème du rang), et admet donc un supplémentaire dans E , que l'on note S et qui est de dimension r (d'après le théorème assurant l'existence d'un supplémentaire).

On construit alors une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_r, v_1, v_{p-r})$ de $\mathbb{K}^p$, de telle sorte que $(u_1, \dots, u_r)$ est une base de S , et $(v_1, \dots, v_{p-r})$ est une base de $\ker f_A$.

Puisque $f|_S$ est injective (cf preuve du théorème du rang), la famille $(f(u_1), \dots, f(u_r))$ est libre. A son tour, elle peut être complétée en une base $\mathcal{B}' = (f(u_1), \dots, f(u_r), w_1, \dots, w_{n-r})$ de $\mathbb{K}^n$ (d'après le théorème de la base incomplète).

On a alors par construction : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f_A) = J_r$.

Par ailleurs, en notant P (resp. Q) la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^p$ (resp. à la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$), la formule du changement de base généralisée assure que :

$$J_r = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f_A) = QAP$$

Puisque P et Q sont inversibles (car toute matrice de passage l'est), cette dernière égalité signifie que A et J_r sont équivalentes. Ce qui prouve l'implication. (La réciproque, non demandée ici, est bien plus facile).

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Soit n un entier naturel non nul. On note $E = \mathbb{K}_{2n+1}[X]$.

A tout polynôme P de E , on associe l'élément noté $f(P)$ de $\mathbb{K}^{2n+2}$ défini par :

$$f(P) = (P(0), P(1), \dots, P(n), P'(0), P'(1), \dots, P'(n))$$

Etablir qu'il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$f(Q) = (1, 2, \dots, 2n+2)$$

EXERCICE 2. — On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est C .

1/ Calculer le rang de g .

2/ Déterminer une base de $\text{Im} g$, puis une base de $\ker g$.

EXERCICE 3. — Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ (avec a, b et $c \in \mathbb{K}$)

EXERCICE 4. — Calculer le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & m & 2 \end{pmatrix}$ en fonction du réel m .

EXERCICE 5. — (Existence d'un polynôme annulateur).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et soit u un endomorphisme de u .

Etablir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

EXERCICE 6. — On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{aligned}$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

1/ Ecrire la matrice $A = M_B(f)$ de f dans la base $B = \{1, X, X^2\}$.

2/ Calculer le rang de f . Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme f ?

BANQUE D'EXERCICES — CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Soit n un entier naturel non nul. On note $E = \mathbb{K}_{2n+1}[X]$.

A tout polynôme P de E , on associe l'élément noté $f(P)$ de $\mathbb{K}^{2n+2}$ défini par :

$$f(P) = (P(0), P(1), \dots, P(n), P'(0), P'(1), \dots, P'(n))$$

Etablir qu'il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$f(Q) = (1, 2, \dots, 2n+2)$$

Introduisons l'application f :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_{2n+1}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{2n+2} \\ P &\longmapsto (P(0), P(1), \dots, P(n), P'(0), P'(1), \dots, P'(n)) \end{aligned}$$

L'application f est linéaire. On peut également observer que : $\dim \mathbb{K}_{2n+1}[X] = \dim \mathbb{K}^{2n+2} = 2n+2$.

Montrons que f est injective. Soit $P \in \mathbb{K}_{2n+1}[X]$, tel que $f(P) = 0_{\mathbb{K}^{2n+2}}$. Alors P admet $0, 1, \dots, n$ comme racines de multiplicité au moins 2. On en déduit que :

$$\underbrace{X^2(X-1)^2 \dots (X-n)^2}_S \text{ divise } P$$

Or $\deg S = 2n+2$ tandis que $\deg P \leq 2n+1$. On en déduit que P est nul.

Ainsi : $\forall P \in \mathbb{K}_{2n+1}[X], f(P) = 0_{\mathbb{K}^{2n+2}} \implies P = 0_{\mathbb{K}_{2n+1}[X]}$. Donc f est injective.

Puisque f est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension, f est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{2n+1}[X]$ dans $\mathbb{K}^{2n+2}$.

En particulier f est bijective, et tout vecteur de $\mathbb{K}^{2n+2}$ admet donc un unique antécédent par f .

Conclusion. Le vecteur $(1, 2, \dots, 2n+2)$ admet un unique antécédent par f . En d'autres termes, il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$f(Q) = (1, 2, \dots, 2n+2)$$

EXERCICE 2. — On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est C .

1/ Calculer le rang de g .

2/ Déterminer une base de $\text{Im} g$, puis une base de $\ker g$.

1/ Les coordonnées de $g(X)$ dans la base B sont données par la deuxième colonne de la matrice C . On en déduit que :

$$g(X) = -3X^3 + X^2 + 2$$

Les coordonnées de $g(X^2)$ dans la base B sont données par la troisième colonne de la matrice C . On en déduit que :

$$g(X^2) = X^3 + X^2 - X - 3$$

Par linéarité de g , on a $g(1+X) = g(1) + g(X)$. Les coordonnées de $g(1+X)$ dans la base B sont données par la somme des deux premières colonnes de la matrice C . On en déduit que :

$$g(1+X) = -X^3 - X^2 + X + 3$$

2/ Puisque $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, X^3)$, on a :

$$\text{Img} = \text{Vect}(g(1), g(X), g(X^2), g(X^3))$$

D'où :

$$\text{Img} = \text{Vect}(2X^3 - 2X^2 + X + 1, -3X^3 + X^2 + 2, X^3 + X^2 - X - 3, -6X^3 + 2X^2 + 4)$$

Il est clair que : $g(X^3) = 2g(X)$ (la quatrième colonne de C est le double de la seconde). Par suite :

$$\text{Img} = \text{Vect}(2X^3 - 2X^2 + X + 1, -3X^3 + X^2 + 2, X^3 + X^2 - X - 3)$$

Par ailleurs, d'après la question précédente : $g(X)^2 = -g(1) - g(X)$. Par suite :

$$\text{Img} = \text{Vect}(2X^3 - 2X^2 + X + 1, -3X^3 + X^2 + 2)$$

La famille $\{2X^3 - 2X^2 + X + 1, -3X^3 + X^2 + 2\}$ est génératrice de Img (trivial), et libre car constituée de deux polynômes non colinéaires. C'est donc une base de Img . On en déduit que :

$$\dim \text{Img} = 2 \quad \text{c'est à dire :} \quad \text{rg}(g) = 2$$

EXERCICE 3. — Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ (avec a, b et $c \in \mathbb{K}$)

$$\begin{aligned} \text{On a : } \text{rg}(A) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & 0 & (b-c)(a-c) \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ 0 & (b-c)(a-c) \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b = c \\ 3 & \text{si } a, b, c \text{ 2 à 2 distincts} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

EXERCICE 4. — Calculer le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & m & 2 \end{pmatrix}$ en fonction du réel m .

Puisque le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur ses lignes[†] :

$$\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & m & m-1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ m & m-1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$= 2 + \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ m-1 & 1-m \end{pmatrix} \quad \text{D'où : } \text{rg}(M) = \begin{cases} 3 & \text{si } m = 1 \\ 4 & \text{si } m \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{cases}$$

[†]. Et ses colonnes.

EXERCICE 5. — (Existence d'un polynôme annulateur).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et soit u un endomorphisme de u .

Etablir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Notons $n = \dim E$. D'après le cours : $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$.

La famille $\mathcal{F} = \{\text{id}_E, u, u^2, \dots, u^{n^2}\}$ est une famille de $\mathcal{L}(E)$, de cardinal strictement plus grand que la dimension de $\mathcal{L}(E)$: elle est donc liée.

Par suite : $\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1} \setminus \{\vec{0}_{\mathbb{K}^{n^2+1}}\}, \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Conclusion. Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$ est un polynôme non nul annulateur de u .

EXERCICE 6. — On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \longmapsto (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

1/ Ecrire la matrice $A = M_B(f)$ de f dans la base $B = \{1, X, X^2\}$.

Trois calculs aisés donnent $f(1) = 2X + 1$; $f(X) = X^2 + X + 1$ et $f(X^2) = X^2 + 2X$.

Conclusion. $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2/ Calculer le rang de f . Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme f ?

$$\text{On a : } \text{rg}(f) = \text{rg}(M_B(f)) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3^\ddagger$$

On déduit que la matrice $M_B(f)$ est inversible. Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Conclusion. $f \in \text{GL}(\mathbb{R}_2[X])$

‡. La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant -3 ; elle est donc inversible, donc de rang maximal (égal à 2).