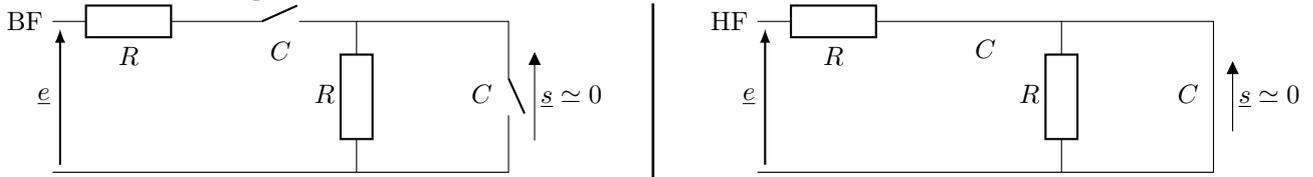


CB2 du 6/6 : Physique (4h)

Solution de l'exercice 1 : Filtre de Wien

Q.1 On trace les circuits équivalents :



C'est un filtre passe-bande.

Q.2 Calculons $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} + jC\omega$ et appliquons le pont diviseur de tension :

$$\underline{s} = \frac{Z_{eq}}{R + \frac{1}{jC\omega} + Z_{eq}} \underline{e} \implies \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{Z_{eq}}{R + \frac{1}{jC\omega} + Z_{eq}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Z_{eq}} \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right)}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)} \iff \underline{H} = \frac{1/3}{1 + j \frac{1}{3} \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)}$$

On identifie alors $H_0 = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$.

Q.3 On cherche le maximum de $|\underline{H}|$ pour $\omega = \omega_r$: $|\underline{H}(x)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$ maximum pour

$$x_r - \frac{1}{x_r} = 0 \iff x_r = 1 \implies S_r = H_0 E_m$$

Q.4 Soit $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log \left(\frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \right)$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = -\arctan \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

En BF : $\omega \ll \omega_0$

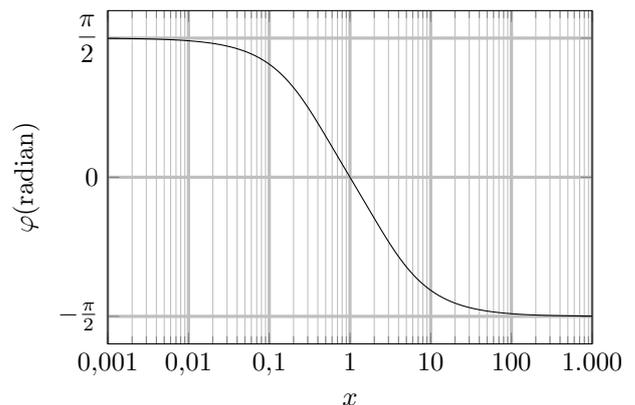
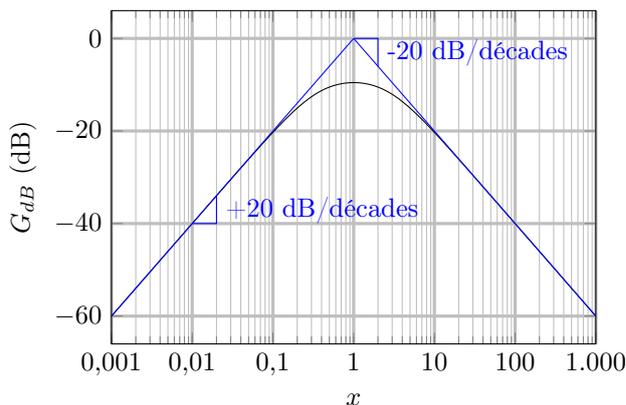
$$G_{dB} \simeq 20 \log \left(\frac{H_0}{Q} \right) + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \implies G_{dB} \simeq +20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad \varphi \simeq +\frac{\pi}{2}$$

En HF : $\omega \gg \omega_0$

$$G_{dB} \simeq 20 \log \left(\frac{H_0}{Q} \right) - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \implies G_{dB} \simeq -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad \varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$$

En $\omega = \omega_0$: $G_{dB} = 20 \log(H_0) \simeq -9,54 \text{ dB}$ et $\varphi = 0$

On trace le diagramme de Bode asymptotique :



Q.5 Cherchons ω_1 et ω_2 les deux pulsations de coupure tel que la bande passante soit définie par $\omega \in [\omega_1; \omega_2]$ qui vérifie :

$$|\underline{H}|(\omega) \geq \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

On cherche donc ω_1 et ω_2 solution de l'équation : $|\underline{H}|(\omega_c) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$

$$Q^2 \left(\frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^2 = 1 \implies \begin{cases} Q \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = -1 \\ Q \left(\frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} Q \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 - \frac{\omega_1}{\omega_0} - Q = 0 \\ Q \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} \right)^2 - \frac{\omega_2}{\omega_0} - Q = 0 \end{cases}$$

On calcule le discriminant commun : $\Delta = 1 + 4Q^2 > 0 \quad \forall Q > 0$

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0 \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \quad \omega_2 = +\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0 \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

On obtient alors une largeur de bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$

Q.6 On pose $e(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$ avec $\underline{e}_1 = E_m e^{j\omega t}$, $\underline{e}_2 = E_m e^{j10\omega t}$ et $\underline{e}_3 = E_m e^{j100\omega t}$ tel que

$$e(t) = \Re e(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$$

On pose $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$ avec $\underline{s}_1 = \underline{H}(\omega) E_m e^{j\omega t}$, $\underline{s}_2 = \underline{H}(10\omega) E_m e^{j10\omega t}$ et $\underline{s}_3 = \underline{H}(100\omega) E_m e^{j100\omega t}$ où

$$s(t) = \Re e(\underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \underline{s}_3)$$

Calculons alors \underline{s}_1 , \underline{s}_2 et \underline{s}_3 avec $\omega/\omega_0 = 1/10$:

$$\text{BF} : \underline{s}_1 \simeq \frac{1/3}{j\frac{1}{3}(-10)} E_m e^{j\omega t} \simeq \frac{E_m}{10} e^{j(\omega t + \pi/2)}$$

$$\underline{s}_2 = \frac{1/3}{1 + j\frac{1}{3}(1-1)} E_m e^{j10\omega t} = \frac{E_m}{3} e^{j(10\omega t)}$$

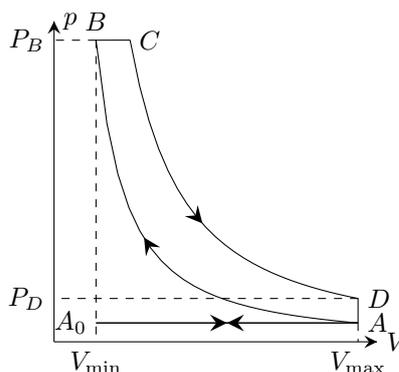
$$\text{HF} : \underline{s}_3 \simeq \frac{1/3}{1 + j\frac{1}{3}(10-0)} E_m e^{j100\omega t} \simeq \frac{E_m}{10} e^{j(100\omega t - \pi/2)}$$

On calcule alors la partie réelle et on obtient :

$$s(t) \simeq \frac{E_m}{10} \cos(\omega t + \pi/2) + \frac{E_m}{3} \cos(10\omega t) + \frac{E_m}{10} \cos(100\omega t - \pi/2)$$

Solution de l'exercice 2 : Le moteur Diesel

Q.1 Cycle dans le diagramme (P, V) :



Q.2 Loi de Laplace sur l'adiabatique réversible AB du gaz parfait : $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$ soit $P_{\text{atm}} V_{\text{max}}^\gamma = P_B V_{\text{min}}^\gamma \iff P_B = P_{\text{atm}} x^\gamma$

De même sur l'adiabatique réversible CD : $P_C V_C^\gamma = P_D V_D^\gamma$ soit $P_B V_C^\gamma = P_D V_{\text{max}}^\gamma \iff P_D = P_{\text{atm}} \left(\frac{x}{y} \right)^\gamma$

Q.3 Par définition du rendement d'un moteur thermique ditherme : $\eta = \frac{-W}{Q_c}$ avec ici $Q_c = Q_{BC} > 0$ le transfert thermique reçu par le fluide de la part de la source chaude lors de la phase d'injection-Combustion.

Premier principe sur un cycle : $\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_c + Q_f$ or $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$ d'où $-W = Q_c + Q_f$

avec ici $Q_f = Q_{DA}$ et $Q_c = Q_{BC}$ on a : $\eta = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$

Premier principe lors de la transformation BC : $\Delta H_{BC} = Q_{BC}$ soit d'après la seconde loi de Joule $Q_{BC} = nC_{Pm}(T_C - T_B)$

Premier principe lors de la transformation DA : $\Delta U_{DA} = Q_{DA} + W_{DA}$ soit d'après la première loi de Joule $Q_{DA} = nC_{Vm}(T_A - T_D)$

On a alors : $\eta = 1 + \frac{C_{Vm} T_A - T_D}{C_{Pm} T_C - T_B}$ soit $\eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$

Q.4 Loi de Laplace AB : $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \iff T_A V_{\max}^{\gamma-1} = T_B V_{\min}^{\gamma-1} \implies T_B = T_A x^{\gamma-1}$

Loi de Laplace CD : $T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \iff T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_{\max}^{\gamma-1} \implies T_D = T_C \left(\frac{1}{y}\right)^{\gamma-1}$

Transformation BC du gaz parfait : $\frac{nRT_B}{V_{\min}} = \frac{nRT_C}{V_C} \implies T_C = T_B \frac{x}{y}$ soit $T_C = T_A = \frac{x^\gamma}{y}$

On a alors $T_D = T_A = \frac{x^\gamma}{y^\gamma}$ ce qui donne : $\eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{x^{-\gamma} - y^{-\gamma}}{y^{-1} - x^{-1}}\right)$

AN : $\eta \simeq 0,61$ bien supérieur au rendement observé de l'ordre de 0,45 différences :

- irréversibilité : frottements du piston
- pertes par échauffement des parois du cylindre
- cycle idéalisé.

Q.5 Démarche de résolution :

- Puissance mécanique moyenne locomotive : $P = \frac{-W}{\Delta t_{\text{cycle}}} = \eta \frac{Q_{BC}}{\Delta t_{\text{cycle}}}$

On a $\Delta t_{\text{cycle}} = \frac{1}{2000} \text{min} \simeq 30 \text{ms}$

$Q_{BC} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} (T_C - T_B) = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_{\text{atm}} V_{\max} T_{\text{atm}} \left(\frac{x^\gamma}{y} - x^{\gamma-1}\right)$ AN : $Q_{BC} \simeq 1,2 \times 10^5 \text{J}$

d'où avec $\eta = 0,45$: $P \simeq 1,9 \times 10^6 \text{W}$

- Consommation en gasoil pour 100 km : $Q_{\text{tot}} = N Q_{BC}$ avec N le nombre de cycle pour parcourir la distance

soit $N = \frac{\Delta t}{\Delta t_{\text{cycle}}} = \frac{d}{v \Delta t_{\text{cycle}}}$

puis la masse de carburant brûlée : $m = \frac{Q_{\text{tot}}}{\Delta h_{\text{comb}}} = \frac{d Q_{BC}}{v \Delta t_{\text{cycle}} \Delta h_{\text{comb}}}$

AN : $m \simeq 256 \text{kg}$

Solution de l'exercice 3 : Étude du mouvement d'un satellite

Q.1 Le référentiel géocentrique est centré sur le centre de masse de la Terre et dont les trois axes pointent vers 3 étoiles fixes.

Dans un référentiel galiléen, un point matériel isolé ou pseudo-isolé est en mouvement rectiligne uniforme. Tous les référentiels galiléens sont en mouvement de translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Q.2 La force d'interaction gravitationnelle est de la forme : $\vec{F}_g = -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{u}_r = \frac{K}{r^2} \vec{u}_r$

Q.3 Système : $\{M(m)\}$

Référentiel : géocentrique supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} \vec{u}_r$ soit $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

TMC : $\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{0} \implies \vec{\mathcal{L}}_O = \vec{C}^{te}$

Soit \mathcal{P} le plan passant par O et perpendiculaire à la direction constante de $\vec{\mathcal{L}}_O(M)_{/\mathcal{R}}$. Par définition, $\vec{\mathcal{L}}_O(M)_{/\mathcal{R}}$ est un vecteur \perp au plan contenant \vec{OM} et $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$. Le mouvement est donc plan, contenu dans le plan \mathcal{P} .

Q.4 La force gravitationnelle est une force conservative qui dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$\vec{F}_g = -\vec{\text{grad}}(\mathcal{E}_p) \implies \vec{F}_g = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{u}_r$$

En fixant $\mathcal{E}_p(r \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$ on intègre :

$$\mathcal{E}_p(r) = \int_{+\infty}^r -\frac{GM_T m}{r^2} dr \iff \mathcal{E}_p(r) = -\frac{GM_T m}{r}$$

Q.5 Par application du théorème de l'énergie mécanique au point M : $\Delta \mathcal{E}_m = 0$ car \vec{F}_g est conservative, on a $\mathcal{E}_m = C^{te}$.

Comme le mouvement est plan on exprime en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) \end{cases}$$

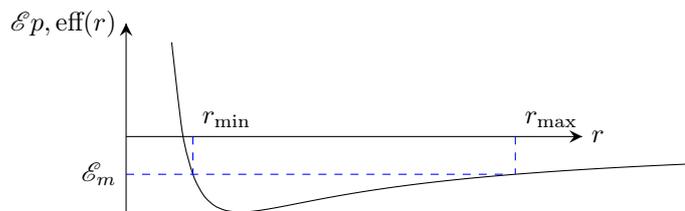
On a ainsi : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r\dot{\theta})^2 - \frac{GM_T m}{r} = C^{te}$

On exprime la norme du moment cinétique en coordonnées polaires : $\mathcal{L}_O \vec{u}_z = m \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$

Ce qui permet ainsi de réécrire : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \left(r \frac{\mathcal{L}_O}{m r^2} \right)^2 - \frac{GM_T m}{r} \iff \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_O^2}{m r^2} - \frac{GM_T m}{r}}_{\mathcal{E}_{p,eff}(r)}$

Q.6 Avec $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$ par définition, on a nécessairement $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p,eff}(r)$

Q.7 Cas où $\mathcal{E}_m < 0$: état lié (trajectoire elliptique)



La trajectoire du point M est bornée : $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$

Q.8 Dans le cas d'une trajectoire elliptique on a $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,eff}(r = r_{\min}) = \mathcal{E}_{p,eff}(r = r_{\max})$

Dans le cas où $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,effmin}$ on $r_{\min} = r_{\max} = r_0$ donc $r(t) = C^{te}$ le mouvement est circulaire (et uniforme grâce à la loi des aires).

Q.9 **Système** : $\{M(m)\}$ satellite altimétrique assimilé à un point matériel

Référentiel : géocentrique supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G} M_T m}{R^2} \vec{u}_r$ orbite circulaire de rayon R

PFD : $m \vec{a}(M)_{/R} = \vec{F}_g \implies -m R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{R^2} \vec{u}_r$

on projette sur \vec{u}_r : $R^2 \dot{\theta}^2 = \mathcal{G} \frac{M_T}{R} = V^2 \implies \boxed{V = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R}}}$

On en déduit alors : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{\mathcal{G} M_T m}{2R}$ d'où $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{G} M_T m}{2R} - \frac{\mathcal{G} M_T m}{R} \implies \boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G} M_T m}{2R} < 0}$

Q.10 Le mouvement est uniforme donc $V = \frac{2\pi R}{T} \implies \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R}} \implies \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_T}$

Q.11 À l'apogée A et au périégée P les rayons $r_A = R$ et $r_P = R_c$ sont solutions de :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,eff}(r = r_{A,P}) \iff \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_O^2}{m r_{A,P}^2} - \frac{GM_T m}{r_{A,P}}$$

Alors $r_{A,P}^2 + \frac{GM_T m}{E_m} r_{A,P} - \frac{\mathcal{L}_O^2}{2m E_m} = (r_{A,P} - R)(r_{A,P} - R_c) = 0$

Soit $r_A + r_P = R + R_c = -\frac{GM_T m}{E_m} \implies \boxed{E_m = -\frac{GM_T m}{R + R_c}} = \mathcal{E}_{m,tr}$ sur l'orbite de transfert elliptique

Q.12 On exprime ici : $\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,tr} - \mathcal{E}_{m,alt} = -GmM_T \left(\frac{1}{R + R_c} - \frac{1}{2R} \right)$

càd $\Delta \mathcal{E}_m = -GmM_T \frac{R - R_c}{2R(R + R_c)}$ avec $R > R_c$ on a $\Delta \mathcal{E}_m < 0$

Il y a diminution d'énergie mécanique au point A où il y a changement d'orbite.

Q.13 Même raisonnement au périégée P : $\Delta\mathcal{E}_{m2} = \mathcal{E}_{m,\text{cim}} - \mathcal{E}_{m,\text{tr}} = -GmM_T \left(\frac{1}{2R_c} - \frac{1}{R + R_c} \right)$

soit $\Delta\mathcal{E}_{m2} = -GmM_T \frac{R - R_c}{2R_c(R + R_c)} < 0$ avec $R > R_c$.

Par définition $\Delta\mathcal{E}_{m2} = \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_p$ au point P le changement de vitesse se fait sans changement d'altitude :

$$\Delta\mathcal{E}_p = 0 \implies \mathcal{E}_{m2} = \Delta\mathcal{E}_c < 0 \implies v_{P,\text{cim}} < v_{P,\text{tr}}$$

le satellite doit être freiné lors de cette seconde phase.

Solution de l'exercice 4 : Chute d'arbres

Q.1 On note $\Gamma_g = \mathcal{M}_{Oy}(\vec{P})$ le moment du poids de l'arbre par rapport à l'axe (Oy) qui s'exprime selon :

$$\Gamma_g = \pm d \|\vec{P}\| \quad \text{où } d = a \text{ le bras de levier du poids qui s'applique en } G \quad \boxed{\Gamma_g = -aMg}$$

Q.2 **Système** : $\{B(m)\}$ le bûcheron assimilé à un point B

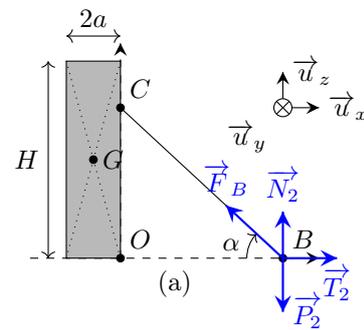
Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

- $\vec{P}_2 = -mg\vec{u}_z$
- $\vec{R}_2 = N_2\vec{u}_z + T_2\vec{u}_x$
- $\vec{F}_B = -\vec{F}$ l'opposé de la force exercée par le câble sur l'arbre (équilibre du câble).

Condition d'équilibre mécanique :

$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 - \vec{F} = \vec{0}$$



selon (Ox) : $-F \cos(\alpha) + T_2 = 0$ soit $T_2 = F \cos(\alpha)$

selon (Oy) : $F \sin(\alpha) + N_2 - mg = 0$ soit $N_2 = mg - F \sin(\alpha)$

Condition d'adhérence : $T_2 < fN_2$ (lois de Coulomb) soit $F = \frac{T_2}{\cos(\alpha)} < \frac{fN_2}{\cos(\alpha)}$

soit $F < \frac{f}{\cos(\alpha)}(mg - F \sin(\alpha))$ càd $\boxed{F < \frac{fmg}{\cos(\alpha) + f \sin(\alpha)}}$

On pose alors $F_{\text{max}} = \frac{fmg}{\cos(\alpha) + f \sin(\alpha)}$

Q.3 **Système** : $\{\text{Arbre de centre de masse } G(M)\}$

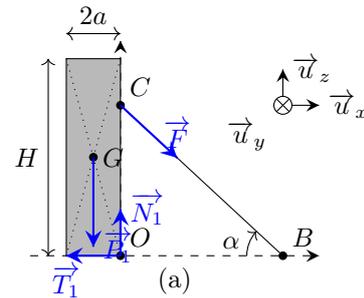
Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

- $\vec{P}_1 = -Mg\vec{u}_z$
- $\vec{R}_1 = N_1\vec{u}_z + T_1\vec{u}_x$
- \vec{F}

Condition d'équilibre mécanique :

$$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F} = \vec{0}$$



selon (Ox) : $F \cos(\alpha) + T_1 = 0$ soit $T_1 = -F \cos(\alpha)$

selon (Oy) : $-F \sin(\alpha) + N_1 - Mg = 0$ soit $N_1 = Mg + F \sin(\alpha)$

Hypothèse de glissement : $|T_1| = f|N_1|$ (lois de Coulomb) avec $T_1 < 0, N_1 > 0$ et $F = F'$

soit $-T_1 = fN_2 \iff F' \cos(\alpha) = Mg + F' \sin(\alpha)$

càd $\boxed{F' = \frac{fMg}{\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)}}$

Comme $F' > F_{\text{max}}$ on reste dans la condition d'adhérence tant que $0 \leq F \leq F_{\text{max}}$

Q.4 **Système** : $\{\text{Arbre } (J)\}$ solide en rotation autour de (Oy)

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des actions mécaniques :

- $\Gamma_g = -aMg$
- $\mathcal{M}_{Oy}(\vec{R}_1) = 0$ car le bras de levier est nul.
- $\Gamma_B = (\vec{OC} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_y$ avec $\vec{OC} = l \sin(\alpha) \vec{u}_z$ et $\vec{F} = F(\cos(\alpha) \vec{u}_x - \sin(\alpha) \vec{u}_z)$ soit $\Gamma_B = Fl \cos(\alpha) \sin(\alpha)$

Théorème du moment cinétique scalaire : $J\ddot{\theta} = \Gamma_g + \Gamma_B$

Avec un arbre initialement immobile, l'arbre commence à basculer dès que $\ddot{\theta} > 0$

soit $\Gamma_B > -\Gamma_g \iff \Gamma_B > aMg$

Q.5 A norme de force F fixé, le moment Γ_B sera maximal lorsque $\cos(\alpha) \sin(\alpha)$ sera maximal c'ad lorsque $\sin(2\alpha)/2$ sera maximal donc pour $\alpha_m = 45^\circ$

Q.6 Dans le cas où $F = F_{\max}$, on réécrit le couple Γ_B :

$$\Gamma_B = F_{\max} l \cos(\alpha) \sin(\alpha) = \frac{fmg}{\cos(\alpha) + f \sin(\alpha)} l \cos(\alpha) \sin(\alpha) \iff \Gamma_B = \frac{mgl}{\frac{1}{f \sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}} = \frac{mgl}{\phi(\alpha)}$$

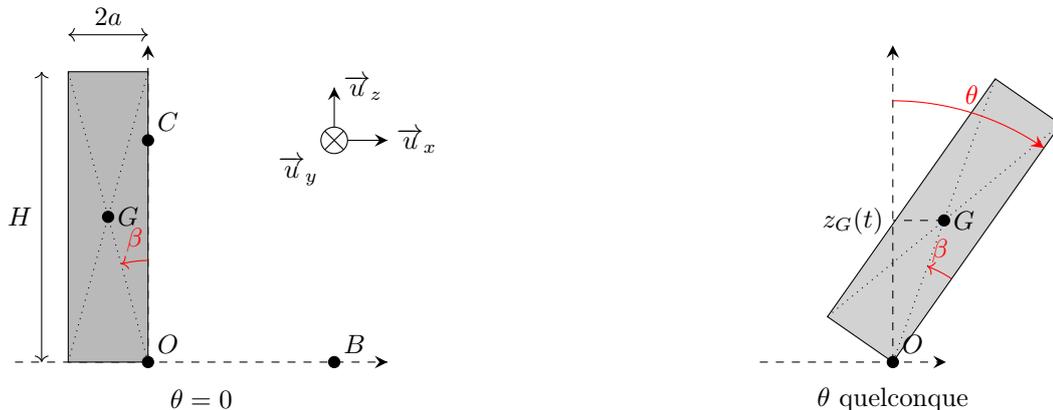
Le moment Γ_B est maximal lorsque la fonction $\phi(\alpha)$ est minimale, c'ad on cherche α_m tel que $\frac{d\phi}{d\alpha}(\alpha = \alpha_m) = 0$

soit $\frac{1}{f} \left(-\frac{\cos(\alpha_m)}{\sin^2(\alpha_m)} \right) + \frac{\sin(\alpha_m)}{\cos^2(\alpha_m)} = 0 \iff \frac{1}{f} \cos^3(\alpha_m) = \sin^3(\alpha_m)$ soit $f = \frac{1}{\tan^3(\alpha_m)}$

On a alors : $\alpha_m = \arctan\left(\frac{1}{f^{1/3}}\right)$ avec AN : si $f = 1$ alors $\alpha_m = 45^\circ$.

Q.7 AN : $F_{\max} \simeq 693 \text{ N}$ et $\frac{l}{2} \sin(2\alpha) F_{\max} > aMg \iff l > \frac{2aMg}{\sin(2\alpha) F_{\max}} \simeq 13,8 \text{ m}$

Q.8 Schéma de la situation à 2 instants différents :



On exprime l'énergie potentielle de pesanteur de l'arbre : $\mathcal{E}_p = Mg z_G(t)$

avec $z_G(t) = OG \cos(\theta(t) - \beta)$ où $\beta = \arctan\left(\frac{2a}{H}\right)$ et $OG = \sqrt{a^2 + \frac{H^2}{4}}$

Finalement : $\mathcal{E}_p(\theta) = Mg \sqrt{a^2 + \frac{H^2}{4}} \cos\left(\theta - \arctan\left(\frac{2a}{H}\right)\right)$

Maximale pour $\theta_s = \arctan\left(\frac{2a}{H}\right)$ au delà de cette valeur, l'arbre va chuter. C'est donc une position d'équilibre instable, pour $\theta < \theta_s$ l'arbre revient à sa position $\theta = 0$ et pour une position $\theta > \theta_s$ l'arbre chute jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$.

AN : $\theta_s = 3^\circ$

Q.9 Pour un vent violent, on peut proposer une vitesse de l'ordre de $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ soit $U \simeq 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

De plus : $[dF_v] = [a][C_x][\rho_a][U]^2[dz] = L \times 1 \times (ML^{-3}) \times (LT^{-1})^2 \times L = MLT^{-2}$ homogène à une force.

Q.10 Pour la tranche d'arbre comprise entre z et $z + dz$, on a :

$$d\Gamma_v = (\vec{OM} \wedge d\vec{F}_v) \cdot \vec{u}_y = 2az C_x \rho_a U^2 dz$$

On intègre alors entre $z = 0$ et $z = H$:

$$\Gamma_v = \int_0^H d\Gamma_v = \int_0^H 2az C_x \rho_a U^2 dz = 2a C_x \rho_a U^2 \frac{H^2}{2}$$

soit $\Gamma_v = aC_x\rho_a U^2 H^2$ lorsque l'arbre reste vertical.

Q.11 Lorsque l'arbre commence à pencher, il y a modification :

- du bras de levier : $z = r \cos(\theta)$ par tranche située entre r et $r + dr$.
- dans l'expression de la force $dz = dr \times \cos(\theta)$

Par conséquent, la fonction $\Gamma_v(\theta)$ varie en $\cos^2(\theta)$ ($n = 2$).

Q.12 D'après l'énoncé :

- $\Gamma_r(0) = \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0(\beta + 0 + 0) = \Gamma_0$ soit $\beta = 1$, graphiquement $\Gamma_0 = -9000 \text{ N} \cdot \text{m}$
- $\Gamma_r(\theta_c) = 0 \rightarrow$ graphiquement $\theta_c = 10^\circ$

On vérifie ensuite l'angle θ_m tel que $\frac{d\Gamma_r}{d\theta}(\theta = \theta_m) = 0$:

$$\Gamma_0 \left(\frac{4}{\theta_c} - 10 \frac{\theta_m}{\theta_c^2} \right) = 0 \iff \theta_m = \frac{2}{5} \theta_c \quad \underline{\text{AN : } \theta_m \simeq 4^\circ} \quad \text{Valeur cohérente avec le graphique}$$

On vérifie ensuite le minimum : $\Gamma_m = \Gamma_r(\theta = \theta_m)$.

$$\Gamma_m = \Gamma_0 \left(1 + 4 \times \frac{2}{5} - 5 \times \frac{4}{25} \right) \iff \Gamma_m = \frac{9}{5} \Gamma_0 \quad \underline{\text{AN : } \Gamma_m \simeq -16\,000 \text{ N} \cdot \text{m}} \quad \text{cohérent avec le graphique}$$

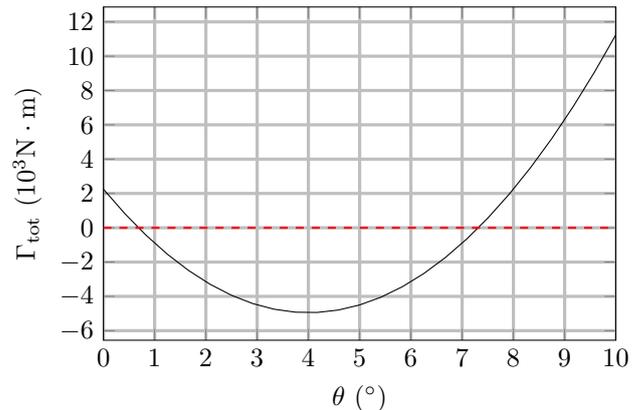
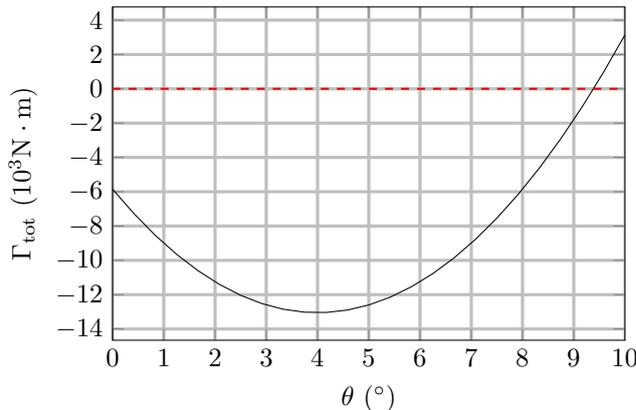
Q.13 Application du TMC scalaire : $J\ddot{\theta} = \Gamma_v + \Gamma_r(\theta)$ soit $J\ddot{\theta} = \Gamma_v + \Gamma_0 \left(1 + 4 \frac{\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right)$

Les positions d'équilibre vérifient l'équation : $\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_v + \Gamma_r(\theta_{\text{eq}}) = 0$

On translate donc la courbe de $\Gamma_r(\theta)$ de la quantité $\Gamma_v = p|\Gamma_0|$ pour obtenir la courbe de Γ_{tot} :

$p < 1$

$p > 1$



Cas $p < 1$: on voit qu'il existe une seule position d'équilibre $\theta_{\text{eq}} > \theta_m$ qui sera instable car pour $\theta < \theta_{\text{eq}}$ on a $\Gamma_{\text{tot}} < 0$ donc l'arbre est ramené vers la borne $\theta = 0$ qui est donc une **position stable** et pour $\theta > \theta_{\text{eq}}$ on a $\Gamma_{\text{tot}} > 0$ donc l'arbre continue de chuter pour s'écartier de θ_{eq} .

Cas $p > 1$: on voit qu'il existe deux positions d'équilibre :

- $\theta_{\text{eq1}} < \theta_m$ qui sera stable car pour $\theta < \theta_{\text{eq1}}$ on a $\Gamma_{\text{tot}} > 0$ donc l'arbre est ramené vers $\theta = \theta_{\text{eq1}}$ et pour $\theta > \theta_{\text{eq1}}$ on a $\Gamma_{\text{tot}} < 0$ donc l'arbre est ramené vers $\theta = \theta_{\text{eq1}}$.
- $\theta_{\text{eq2}} > \theta_m$ qui sera instable car pour $\theta < \theta_{\text{eq2}}$ on a $\Gamma_{\text{tot}} < 0$ donc l'arbre est ramené vers la position de stabilité $\theta = 0$ et pour $\theta > \theta_{\text{eq2}}$ on a $\Gamma_{\text{tot}} > 0$ donc l'arbre continue de chuter pour s'écartier de θ_{eq2} .

La position $\theta = 0$ est donc **instable**.

Q.14 Application du théorème énergie cinétique :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \int_0^\theta \Gamma_v - |\Gamma_0| \left(1 + \frac{4\theta'}{\theta_c} - 5 \frac{\theta'^2}{\theta_c^2} \right) d\theta' \iff \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = (\Gamma_v - |\Gamma_0|) \theta - 4 \frac{|\Gamma_0|}{\theta_c} \frac{\theta^2}{2} + 5 \frac{|\Gamma_0|}{\theta_c^2} \frac{\theta^3}{3}$$

Soit $\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = |\Gamma_0| \theta \underbrace{\left(p - 1 - 2u + \frac{5}{3} u^2 \right)}_{P(u)}$

L'arbre sera déraciné si $\dot{\theta}(t) > 0 \quad \forall \theta \in [0, \theta_c]$:

$$\dot{\theta}(t) > 0 \iff P(u) > 0$$

On cherche le minimum du polynôme $P(u) = \frac{5}{3}u^2 - 2u + p - 1$ soit $P'(u_m) = \frac{10}{3}u_m - 2 = 0$

$$u_m = \frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad P_{\min} = P(u_m) = p - \frac{8}{5} \quad \Longrightarrow \quad p > p_c = \frac{8}{5} = 1,6$$

On en déduit alors : $\Gamma_v > p_c |\Gamma_0| \iff aC_x \rho_a U^2 H^2 > p_c |\Gamma_0|$

soit $U > U_c = \sqrt{\frac{p_c |\Gamma_0|}{aC_x \rho_a H^2}}$ AN : $U_c \simeq 11,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Q.15 On cherche alors la plus petite racine du polynôme $P(u)$ avec $p = \frac{4}{3}$: $u_m = \frac{1}{5}$ ce qui correspond à un angle de 2° .
Défaut du modèle : analyse principale en régime statique et pas de prise en compte du poids de l'arbre sur la stabilité.

... **FIN** ...