Exercices 1 — Logique et ensembles

Logique

Exercice 1. — Déterminer les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évolue x pour que les propositions ci-dessous soient vraies :

1/ $x > 0$ et $x < 1$

2/ $x > 0$ ou $x < 1$

3/ $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$

4/ $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 2$ et $x \neq 1$

Exercice 2. — Traduire avec des quantificateurs le fait qu'une suite $(u_n)_n$ est croissante ; puis le fait qu'elle n'est pas décroissante. Est-ce la même chose ?

Exercice 3. — Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes et leurs négations.

1/ Il existe un entier supérieur à tous les autres.

2/ Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

3/ Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

4/ Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 4. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. Traduire par des phrases les propositions suivantes :

1/ $\exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I,\ f(x) = C$

2/ $\forall\, x \in I,\ f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

3/ $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in I,\ f(x) = y$

4/ $\forall\, x, y \in I,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

Exercice 5. — Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1/ la fonction f ne prend jamais la valeur 1 ;

2/ f n'est pas une fonction constante ;

3/ f est bornée.

4/ f possède un minimum.

Exercice 6. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Exprimer les négations des assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

1/ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$

2/ $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$

3/ $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant M$

4/ $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

Ensembles

Exercice 7. — **Compréhension, extension**...

1/ Ecrire en compréhension et en extension l'ensemble $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$

2/ Ecrire en compréhension et en extension l'ensemble $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32 \ldots\}$

Exercice 8. — Citer les affirmations vraies ou corriger leur syntaxe :

a) $\pi \subset \mathbb{R}$	b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$	c) $-3 \in \mathbb{Q}$
d) $\{1, 2\} \cap 3 = \{\emptyset\}$	e) $\mathbb{N}^* \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$	f) $3 \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$

Raisonnement par récurrence

Exercice 9. — Soit q un nombre complexe différent de 1. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exercice 10. — **(Somme des entiers)**. Etablir que : $\forall\, n \in\ \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$

Exercice 11. — **(Somme des carrés)**. Etablir que : $\forall\, n \in\ \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

Exercice 12. — **(Somme des cubes)**. Etablir que : $\forall\, n \in\ \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Exercice 13. — Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence suivante : $\forall\, n \in\ \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que : $\forall\, n \in\ \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.

Exercice 14. — **(Suite de Wallis)**. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence suivante : $\forall\, n \in\ \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, u_n$. Etablir que : $\forall n \in\ \mathbb{N},\ u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

Exercices supplémentaires sur les ensembles, et extraits de DS

Exercice 15. — Soient A et B deux parties d'un même ensemble E.

1/ Prouver que : $[A \subset B] \Longleftrightarrow [A \cup B = B]$.

2/ Prouver que : $[A = B] \Longleftrightarrow [A \cap B = A \cup B]$.

Exercice 16. — Soient A, B et C trois parties d'un même ensemble E. Prouver que :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

(on pourra raisonner par double inclusion, sans que ce soit une obligation).

Exercice 17. — **(Quantificateurs)**. Dans cet exercice, (u_n) désigne une suite réelle quelconque.

1/ Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes (uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite en parenthèses).

a/ $\forall\, n \in\ \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ *(la suite u est croissante)*

b/ $\exists\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in\ \mathbb{N},\ u_{n+k} = u_n$ *(la suite u est périodique)*

c/ $\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_0] \Longrightarrow [|u_n - \ell| < \varepsilon]$ *(la suite u est convergente)*

2/ Ecrire la réciproque, la négation, et la contraposée de l'implication : $[u_n = u_p] \Longrightarrow [n = p]$

Exercice 18. — **(Récurrence double).**
On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 8$, $u_1 = 9$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3 \times (-2)^n + 5 \times 3^n$$