Problème de la semaine 1 (corrigé : 6/09/25)

Exercice 1 — (Logique)

Soient P et Q deux assertions logiques. **A l'aide d'une table de vérité**, démontrer que :

$$\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}} \equiv \overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$$

Exercice 2 — (Quantificateurs)

Dans cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Cette notation signifie que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles.

1/ Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes (uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite entre parenthèses).

a/ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f\,(x) \neq 0$ *(la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$)*

b/ $\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant M$ *(la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$)*

c/ $\forall\, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (|y - x| \leqslant \alpha) \Longrightarrow (|f(y) - f(x)| \leqslant \beta)$

(la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$)

2/ Dans cette question, x et y désignent deux nombres réels. Ecrire la réciproque, la contraposée, et la négation de l'implication

$$[y > x] \Longrightarrow [f(x) < f(y)]$$

Exercice 3 — (Récurrence)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n$.

Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

Exercice 4 — (A propos d'ensembles)

➢ **Notations et rappels**. Dans cet exercice, on considère un ensemble E quelconque.

On rappelle que, pour A et B deux parties de E, la différence de A par B est la partie de E définie par :

$$A \backslash B = \{x \in E, \ (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Il revient au même d'écrire : $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

➢ **Question**. Soient A, B et C trois parties de E. Démontrer que :

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

Exercice 5 — (Une équation fonctionnelle)

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur $\underline{\underline{\mathbb{N}}}$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall \ (n, m) \in \mathbb{N}^2, \ f(n+m) = f(n) + f(m) \qquad (\square)$$

Pour y parvenir, on se propose de faire un raisonnement par analyse-synthèse.

1/ **Analyse**. Tout au long de cette question, on suppose qu'il existe une solution au problème, c'est à dire qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition $(\square)$ énoncée ci-dessus.

a/ Etablir que $f(0) = 0$.

b/ Etablir que $f(2) = 2 \times f(1)$. Puis exprimer $f(3)$ en fonction de $f(1)$, en justifiant votre réponse.

c/ Etablir qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f(n) = \lambda n$$

2/ **Synthèse**. A l'aide de ce qui précède, déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition $(\square)$.