Exercices 1 — Logique et ensembles

Corrigés des exercices 11 à 13

Exercice 11. — (Somme des carrés). Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

➤ Initialisation $(n=0)$. D'une part : $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$. D'autre part : $\dfrac{0\,(0+1)\,(2\times 0+1)}{6} = 0\ldots$ Donc $P(0)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\,[n\,(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)\,(2n^2+7n+6)}{6} \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs : $\dfrac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6} = \dfrac{(n+1)\,(2n^2+7n+6)}{6}$ $(\clubsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6}$. Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

Exercice 12. — (Somme des cubes). Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.

➤ **Initialisation** : pour $n=0$, on a d'une part $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$, et d'autre part $\dfrac{0^2\,(0+1)^2}{4} = 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

➤ **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (hypothèse de récurrence). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2 + 4\,(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2\,\left(n^2+4n+4\right)}{4}$$

Soit finalement : $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$. Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Exercice 13. — Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.

Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = 2^n + 1$.

➤ Initialisation ($n = 0$ et $n = 1$). On a : $u_0 = 2$ (énoncé) et $2^0 + 1 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part : $u_1 = 3$ (énoncé) et d'autre part $2^1 + 1 = 3$. Donc $P(1)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n. On a alors :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \qquad \text{(selon l'énoncé)}$$

$$\iff u_{n+2} = 3\left(2^{n+1} + 1\right) - 2\left(2^n + 1\right) \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$\iff u_{n+2} = 6 \times 2^n + 3 - 2 \times 2^n - 2$$

$$\iff u_{n+2} = 4 \times 2^n + 1$$

$$\iff u_{n+2} = 2^{n+2} + 1$$

Ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$