

PROBLÈME DE LA SEMAINE 2

EXERCICE 1 — (Fonctions hyperboliques) On définit les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** (respectivement notées ch et sh) en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1/ **Questions préliminaires.**

a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x + e^{-x} \geq 0$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - e^{-x} \geq 0$.

2/ Etudier les fonctions ch et sh : ensemble de définition, éventuelle parité, dérivabilité, dérivée, limites aux bornes, tableau de variation, tangente au point d'abscisse 0, et position relative de la courbe représentative par rapport à cette tangente.

3/ Etudier la position relative des courbes représentatives des fonctions ch et sh .

4/ Sur un même graphique, donner l'allure des courbes de ch et sh (on n'oubliera pas de faire apparaître les tangentes au point d'abscisse 0).

5/ On définit la fonction **tangente hyperbolique** (notée th) en posant : $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

Etudier la fonction th : ensemble de définition, éventuelle parité, dérivabilité, dérivée, limites aux bornes, tableau de variation, tangente au point d'abscisse 0, asymptotes, et position relative de la courbe représentative par rapport à cette tangente.

6/ **Antécédents.**

a/ Soit λ un réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E_\lambda) \quad \operatorname{ch}(x) = \lambda$.

b/ Soit λ un réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(F_\lambda) \quad \operatorname{sh}(x) = \lambda$.