

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°1 — 13 SEPTEMBRE 2025

- *La durée du devoir est d'une heure environ, les calculatrices sont interdites.*
- *Encadrez ou soulignez vos résultats, accordez du soin à la présentation et à la rédaction*

Barème indicatif : Ex1 : 6pts — Ex2 : 7pts — Ex3 : 8pts — Ex4 : 6pts

EXERCICE 1 — (APPLICATIONS DU COURS).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**, et absolument **in-ra-ta-bles !***

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 3$. Calculer la somme :

$$S_1 = \sum_{k=3}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right)$$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $x \in \mathbb{R}$. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{4kx} = 2^n e^{2nx} \operatorname{ch}^n(2x)$$

3/ Soient x un réel, et soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{4k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{4n+4}}{1+x^4}$$

EXERCICE 2 — (UNE CERTAINE SUITE).

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} u_n$$

1/ Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

Indication : faire une récurrence sur n .

2/ En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Indication : une récurrence sur n est très fortement déconseillée.

3/ En déduire que la suite (u_n) est convergente.

*. Sans vouloir vous mettre la pression, naturellement.

EXERCICE 3 — (CALCUL DE $\sum_{k=0}^N k^4$).

Dans cet exercice, N désigne un entier naturel non nul.

Par ailleurs, pour tout entier naturel p , on note S_p la somme suivante :

$$S_p = \sum_{k=1}^N k^p \quad \text{c'est-à-dire "avec des petits points"} : \quad S_p = 1^p + 2^p + \cdots + N^p$$

1/ Donner sans justification les valeurs de S_0 , S_1 , S_2 et S_3 en fonction de N .

2/ Calcul de S_4 .

On pose à présent :
$$U_N = \sum_{k=1}^N [(k+1)^5 - k^5]$$

a/ En reconnaissant une somme remarquable, donner l'expression de U_N en fonction de N .

b/ A l'aide du binôme de Newton, développer $(k+1)^5$.

c/ A l'aide de la question précédente, exprimer U_N en fonction de S_0 , S_1 , S_2 , S_3 et S_4 .

d/ Dédurre des questions précédentes l'expression de S_4 en fonction de S_0 , S_1 , S_2 , S_3 et N .

EXERCICE 4 — (MINIMUM ET MAXIMUM).

Pour tout couple de nombres réels (a, b) , on note $\min(a, b)$ le plus petit des deux nombres a et b , et on note $\max(a, b)$ le plus grand des deux nombres a et b .

Notons que dans le cas particulier où $a = b$, on a : $\min(a, b) = \max(a, b) = a = b$.

Tout au long de cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1/ Soit k un entier appartenant à $\llbracket 0, 2n \rrbracket$. Etablir que :

$$\min(k, n) + \max(k, n) = n + k$$

Indication : on pourra distinguer deux cas.

2/ Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{2n} [\min(k, n) + \max(k, n)] = 2n(2n+1)$$

3/ Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

Remarque : on peut déduire des 2 questions précédentes, mais on ne demande pas de le faire ici,

l'expression de la somme $\sum_{k=0}^{2n} \max(k, n)$ en fonction de n .

