Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}1 — 13 septembre 2025

Exercice 1 — (Applications du cours).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**, et absolument **in-ra-ta-bles !**[*]

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 3$. Calculer la somme :

$$S_1 = \sum_{k=3}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 3$. On a :

$$S_1 = \sum_{k=3}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=3}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=3}^{n} \left[\ln(k-1) - \ln(k)\right]$$

On reconnaît alors dans l'allégresse une somme télescopique, d'où : $S_1 = \ln(2) - \ln(n)$

Conclusion. $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3,\ \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2}{n}\right)$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $x \in \mathbb{R}$. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{4kx} = 2^n \mathrm{e}^{2nx} \mathrm{ch}^n(2x)$$

Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On a :

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{4kx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^k$$

Selon le binôme de Newton, on en déduit que : $S_2 = \left(\mathrm{e}^{4x} + 1\right)^n \quad (\spadesuit)$

Or :

$$\mathrm{e}^{4x} + 1 = \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) = 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{ch}(2x) \quad (\clubsuit) \qquad \textit{(technique de l'angle moitié)}$$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $S_2 = \left(2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{ch}(2x)\right)^n$

Conclusion. $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{4kx} = 2^n \mathrm{e}^{2nx} \mathrm{ch}^n(2x)$

---

[*] Sans vouloir vous mettre la pression, naturellement.

3/ Soient x un réel, et soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{4k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{4n+4}}{1+x^4}$$

Soient x un réel et n un entier naturel. On a :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{4k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-x^4\right)^k$$

La somme S_3 est géométrique de raison $(-x^4)$ (donc différente de 1, puisque x est réel). Selon le cours :

$$S_3 = \frac{1-(-x^4)^{n+1}}{1-(-x^4)} = \frac{1-(-1)^{n+1}(x^4)^{n+1}}{1+x^4} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{4n+4}}{1+x^4}$$

On a ainsi établi que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{4k} = \frac{1}{1+x^4} - \frac{(-1)^{n+1}x^{4n+4}}{1+x^4}$$

La conclusion s'ensuit immédiatement.

Conclusion. $\forall\,(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}, \quad \dfrac{1}{1+x^4} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{4k} + \dfrac{(-1)^{n+1}x^{4n+4}}{1+x^4}$

Exercice 2 — (Une certaine suite).

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\, u_n$$

1/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$

L'assertion $P(0)$ est vraie d'après l'énoncé.

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\, u_n =_{HR} \frac{2n+1}{2n+2}\, \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} = \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{2n+1}{2n+2}\, \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\,((n+1)!)^2}$$

Ce qui assure que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$

2/ En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Soit n un entier naturel. D'après la question précédente :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!\ 2^{2n}\,(n!)^2}{2^{2n+2}\,((n+1)!)^2\,(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2}$

3/ En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Il résulte de la question 1 que la suite (u_n) est (strictement) positive, et de la question 2 que la suite (u_n) est décroissante.
En d'autres termes, la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0). D'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

Conclusion. La suite (u_n) est convergente.

Exercice 3 — $\boxed{\textbf{(Calcul de } \sum_{k=0}^{N} k^4\textbf{).}}$

Dans cet exercice, N désigne un entier naturel non nul.

Par ailleurs, pour tout entier naturel p, on note S_p la somme suivante :

$$S_p = \sum_{k=1}^{N} k^p \qquad \text{c'est-à-dire “avec des petits points” :} \quad S_p = 1^p + 2^p + \cdots + N^p$$

1/ Donner sans justification les valeurs de S_0, S_1, S_2 et S_3 en fonction de N.

On a : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^0 = \sum_{k=1}^{N} 1$ d'où, selon le cours : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_0 = N}$.

On a : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^1 = \sum_{k=1}^{N} k$ d'où, selon le cours : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_1 = \dfrac{N(N+1)}{2}}$.

On a : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^2$ d'où, selon le cours : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_2 = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}}$.

On a : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^3$ d'où, selon le cours : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_3 = \dfrac{N^2(N+1)^2}{4}}$.

2/ Calcul de S_4.

On pose à présent : $$U_N = \sum_{k=1}^{N} \left[(k+1)^5 - k^5\right]$$

a/ En reconnaissant une somme remarquable, donner l'expression de U_N en fonction de N.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La somme $U_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left[(k+1)^5 - k^5\right]$ est une superbe somme télescopique ; le cours permet de la calculer.

Conclusion. $\forall N \in \mathbb{N}^*, U_N = (N+1)^5 - 1$

b/ A l'aide du binôme de Newton, développer $(k+1)^5$.

D'après le binôme de Newton : $\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$

c/ A l'aide de la question précédente, exprimer U_N en fonction de S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé :

$$U_N = \sum_{k=1}^{N} \left[(k+1)^5 - k^5\right] = \sum_{k=1}^{N} \left[k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k^5\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left[5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\right] = 5\sum_{k=1}^{N} k^4 + 10\sum_{k=1}^{N} k^3 + 10\sum_{k=1}^{N} k^2 + 5\sum_{k=1}^{N} k + \sum_{k=1}^{N} 1$$

Conclusion. D'après les calculs précédents : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ U_N = 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + S_0$

d/ Déduire des questions précédentes l'expression de S_4 en fonction de S_0, S_1, S_2, S_3 et N.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après les deux questions précédentes, on a : $5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + S_0 = (N+1)^5 - 1$.

Conclusion. On en déduit que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_4 = \sum_{k=1}^{N} k^4 = \frac{(N+1)^5 - 1 - 5S_4 - 10S_3 - 10S_2 - 5S_1 - S_0}{5}$$

Remarque : ce procédé fournit donc une méthode pour calculer itérativement les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^p$ en fonction de N. Le tout est de s'armer de patience, et d'aimer les développements et factorisations. A titre indicatif, la formule ci-dessus donne (une fois simplifiée) :

$$S_4 = \sum_{k=1}^{N} k^4 = \frac{N(N+1)(6N^3 + 9N^2 + N - 1)}{30}.$$

Exercice 4 — **(Minimum et maximum).**

Pour tout couple de nombres réels (a, b), on note $\min(a, b)$ le plus petit des deux nombres a et b, et on note $\max(a, b)$ le plus grand des deux nombres a et b.

Notons que dans le cas particulier où $a = b$, on a : $\min(a, b) = \max(a, b) = a = b$.

Tout au long de cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1/ Soit k un entier appartenant à $[\![0, 2n]\!]$. Etablir que :

$$\min(k, n) + \max(k, n) = n + k$$

Soit k un entier appartenant à $[\![0, 2n]\!]$.

Dans le cas où $k \leqslant n$, on a : $\min(k, n) = k$ et $\max(k, n) = n$.

Sinon, $k > n$ et alors : $\min(k, n) = n$ et $\max(k, n) = k$.

Dans les deux cas : $\min(k, n) + \max(k, n) = n + k$

Conclusion. $\forall\, k \in [\![0, 2n]\!], \quad \min(k, n) + \max(k, n) = n + k$

2/ Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{2n} [\min(k, n) + \max(k, n)] = 2n\,(2n + 1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a : $\min(k, n) + \max(k, n) = k + n$.

Par suite :

$$\sum_{k=0}^{2n} [\min(k, n) + \max(k, n)] = \sum_{k=0}^{2n} (k + n) = \sum_{k=0}^{2n} k + \sum_{k=0}^{2n} n = \frac{2n(2n + 1)}{2} + n(2n + 1) = 2n(2n + 1)$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} [\min(k, n) + \max(k, n)] = 2n\,(2n + 1)$

3/ Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n) = \frac{n\,(3n + 1)}{2}$$

Remarque : *on peut déduire des 2 questions précédentes, mais on ne demande pas de le faire ici, l'expression de la somme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \max(k, n)$ *en fonction de* n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de Chasles pour les sommes, on a :

$$\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n) = \sum_{k=0}^{n} \min(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k, n) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n + 1)}{2} + n^2 = \frac{n\,(3n + 1)}{2}$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n) = \frac{n\,(3n + 1)}{2}$