

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ N⁰2

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 — (APPLICATIONS DU COURS — NIVEAU 1)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Selon le cours :

$$\cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} 3x = x + \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ ou \\ 3x = -x - \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ ou \\ 4x = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

CONCLUSION. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} [\pi] \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{12} \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

2/ Soient q un nombre réel, et n un entier naturel. Calculer la somme : $S_1 = \sum_{k=0}^n q^{4k}$

Soit $q \in \mathbb{R}$. Notons que : $S_1 = \sum_{k=0}^n (q^4)^k$. La somme S_1 est géométrique de raison q^4 .

Premier cas : $q^4 = 1 \iff q = \pm 1$ Dans ce cas : $S_1 = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$

Second cas : $q^4 \neq 1 \iff q \neq \pm 1$ Dans ce cas : $S_1 = \frac{1 - q^{4n+4}}{1 - q^4}$

CONCLUSION. $S_1 = \begin{cases} \frac{1 - q^{4n+4}}{1 - q^4} & \text{si } q \neq \pm 1 \\ n + 1 & \text{si } q = \pm 1 \end{cases}$

3/ Soit N un entier naturel. On pose :

$$S_2 = \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

a/ Déterminer deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3}$$

On cherche deux réels a et b tels que : $\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3}$ (♠)

► En multipliant (♠) par $(n+2)$, on obtient : $\frac{1}{n+3} = a + \frac{b(n+2)}{n+3}$

Par évaluation en (-2) on en déduit : $a = 1$.

► En multipliant (♠) par $(n+3)$, on obtient : $\frac{1}{n+2} = \frac{a(n+3)}{n+2} + b$

Par évaluation en (-3) on en déduit : $b = -1$.

Remarque. On peut aussi déterminer les valeurs de a et b par identification.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$

b/ A l'aide de la question précédente, calculer S_2 .

D'après la question précédente :

$$S_2 = \sum_{n=2}^N \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{N+3} \quad (\text{somme télescopique})$$

Ainsi :

CONCLUSION. $\forall N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $\sum_{n=2}^N \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{N+3}$

4/ Encore un peu de trigonométrie.

a/ Soit x un nombre réel. Calculer de deux manières différentes $(\cos^2(x) + \sin^2(x))^3$.

Soit x un nombre réel.

Selon la relation fondamentale de la trigonométrie, on a : $(\cos^2(x) + \sin^2(x))^3 = 1$.

Par ailleurs, selon le binôme de Newton :

$$(\cos^2(x) + \sin^2(x))^3 = \cos^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) + \sin^6(x)$$

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) + \sin^6(x) = 1$

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Selon la question précédente :

$$\begin{aligned}
 &\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1 \\
 \iff &\cos^6(x) + \sin^6(x) = \cos^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) + \sin^6(x) \\
 \iff &3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) = 0 \\
 \iff &\cos^2(x)\sin^2(x) \left(\underbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}_{=1} \right) = 0 \\
 \iff &\cos^2(x)\sin^2(x) = 0 \\
 \iff &\cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = 0 \\
 \iff &x = \frac{\pi}{2}[\pi] \quad \text{ou} \quad x = 0[\pi] \\
 \iff &x = 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]
 \end{aligned}$$

CONCLUSION. Soit x un nombre réel :

$$\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1 \iff x = 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

5/ Pas si complexe ! On rappelle que le module $|z|$ d'un nombre complexe z est défini en posant :

$$|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$$

a/ Démontrer que pour tout couple (z, z') de complexes on a : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Soient z et z' deux nombres complexes. Selon le cours :

$$|z \times z'| = \sqrt{zz' \times \overline{zz'}} = \sqrt{zz' \times \bar{z} \times \bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z}} \times \sqrt{z'\bar{z}'} = |z| \times |z'|$$

CONCLUSION. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \times z'| = |z| \times |z'|$

b/ Soit z un nombre complexe. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$

Soit z un nombre complexe. Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$ l'assertion : $|z^n| = |z|^n$

Il est immédiat que $P(0)$ est vraie.

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n . Alors :

$$|z^{n+1}| = |z^n \times z| \underbrace{=}_{\text{quest.a/}} |z^n| \times |z| \underbrace{=}_{\text{HR}} |z|^n \times |z| = |z|^{n+1}$$

Récurrence établie.

CONCLUSION. $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$

6/ La suite de Fibonacci est la très célèbre suite (F_n) définie en posant :

$$\begin{cases} F_0 = 1; & F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence double, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \geq n$

Pour tout entier naturel non-nul n , notons $P(n)$ l'assertion : $F_n \geq n$.

Selon l'énoncé, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies puisque $F_1 = 1 \geq 1$ et $F_2 = 2 \geq 2$.

Supposons à présent que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$F_{n+2} \underbrace{=}_{\text{énoncé}} F_{n+1} + F_n \underbrace{\geq}_{HR} n+1 + n = 2n+1$$

Puisque $2n+1 \geq n+2$ pour tout entier naturel non nul n , on a : $F_{n+2} \geq n+2$. Ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie, et achève la preuve de l'hérédité.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n \geq n$

EXERCICE 2 — (APPLICATIONS DU COURS - LEVEL UP)

Les questions 1/ et 2/ sont indépendantes.

1/ Une somme de référence.

Soit n un entier naturel. On a vu en cours une méthode pour calculer la somme $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$, ainsi que la somme $\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p}$. L'objectif principal est ici de fournir une nouvelle méthode de calcul de la seconde somme.

a/ Soient n et p deux entiers naturels. Rappeler sans démonstration la formule donnant $\binom{n}{p}$.

$$\text{D'après le cours : } \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{n!}{p! (n-p)!} & \text{si } p \in \llbracket 0, n \rrbracket \end{cases}$$

b/ Soient n et p deux entiers naturels, avec $0 \leq p \leq n$. Montrer que :

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

Soient n et p deux entiers naturels, avec $0 \leq p \leq n$. On a :

$$p \binom{n}{p} = p \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = n \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = n \binom{n-1}{p-1}$$

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$

c/ En déduire que :

$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n 2^{n-1}$$

Commençons par observer que $\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n p \binom{n}{p}$ (puisque le terme de rang $p=0$ est nul).

Par ailleurs, d'après la question précédente :

$$\sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n n \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = (1+1)^{n-1}$$

l'avant-dernière égalité provenant du changement d'indice $k = p - 1$ dans la somme, et la dernière provenant du binôme de Newton.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n 2^{n-1}$

2/ Une propriété algébrique du réel $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \dots$

a/ Rappeler la formule d'addition et la formule de duplication pour le cosinus.

Selon le cours :

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ (formule d'addition)

$$\text{et} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \cos(2a) \begin{cases} = \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ = 1 - 2\sin^2(a) \\ = 2\cos^2(a) - 1 \end{cases} \quad (\text{formules de duplication})$$

Remarque. Sur votre copie, il suffisait de donner l'une des trois formules de duplication (l'énoncé n'exigeait pas de les donner toutes).

b/ Soit a un nombre réel. Exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos(a)$.

Soit a un nombre réel. On a :

$$\cos(3a) = \cos(2a + a)$$

$$\iff \cos(3a) = \cos(2a) \cos(a) - \sin(2a) \sin(a)$$

$$\iff \cos(3a) = (2 \cos^2(a) - 1) \cos(a) - 2 \sin(a) \cos(a) \sin(a) \quad (\text{formule de duplication})$$

$$\iff \cos(3a) = 2 \cos^3(a) - \cos(a) - 2 \sin^2(a) \cos(a)$$

$$\iff \cos(3a) = 2 \cos^3(a) - \cos(a) - 2(1 - \cos^2(a)) \cos(a) \quad (\text{relation fondamentale})$$

$$\iff \cos(3a) = 2 \cos^3(a) - \cos(a) - 2 \cos(a) + 2 \cos^3(a)$$

$$\iff \cos(3a) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a)$$

CONCLUSION. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \cos(3a) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a)$

c/ En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution d'une équation polynomiale de degré 3 à coefficients entiers.

C'est à dire montrer qu'il existe 4 entiers a, b, c et d que l'on explicitera tels que

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \text{ est solution de l'équation } ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

En appliquant la propriété de la question précédente avec $a = \pi/9$, il vient :

$$\cos\left(3 \times \frac{\pi}{9}\right) = 4 \cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

On en déduit que :

$$4 \cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$8 \cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 6 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1$$

CONCLUSION. Le réel $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution de l'équation $8x^3 + -6x + 1 = 0$.

Remarque. On pourrait utiliser ce résultat pour établir que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est irrationnel.

————— **PROBLÈME** ——— **SOMMES ET COEFFICIENTS BINOMIAUX** —————

NOTATION. Tout au long du problème, on note

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad S_n(p) = \sum_{k=0}^n k^p$$

Questions préliminaires

1/ En utilisant une formule du cours, développer $(k+1)^4$ (où k désigne un entier naturel).

Selon le binôme de Newton : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler sans justification les expressions de $S_n(0)$, $S_n(1)$ et $S_n(2)$.

Selon le cours, pour tout entier naturel n :

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^n k^0 = n+1; \quad S_n(1) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad S_n(2) = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Partie 1 - Calcul télescopique de $S_n(3)$

Dans la partie 1, n désigne un entier naturel. On pose :

$$U_n = \sum_{k=0}^n [(k+1)^4 - k^4]$$

3/ En observant que U_n est une somme remarquable du cours, donner l'expression de U_n en fonction de n .

La somme U_n étant télescopique, on a d'après le cours : $U_n = (n+1)^4$.

4/ Déterminer une seconde expression de U_n en fonction de n .

D'après la question 1 : $U_n = \sum_{k=0}^n 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

Par linéarité de la somme : $U_n = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$

CONCLUSION. $U_n = 4S_n(3) + 6S_n(2) + 4S_n(1) + S_n(0)$

5/ A l'aide des deux questions précédentes, retrouver la formule donnant $S_n(3)$.

D'après les questions 3 et 4, on a : $(n+1)^4 = 4S_n(3) + 6S_n(2) + 4S_n(1) + S_n(0)$

Ainsi : $4S_n(3) = (n+1)^4 - 6S_n(2) - 4S_n(1) - S_n(0)$

D'après la question 2, on a donc : $4S_n(3) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$

D'où : $4S_n(3) = (n+1)[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1]$

D'où : $4S_n(3) = (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1)$

D'où : $4S_n(3) = (n+1)(n^3 + n^2) = (n+1)n^2(n+1) = n^2(n+1)^2$

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Partie 2 - Calcul de $S_n(3)$ et relation de Pascal généralisée

6/ Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, k \rrbracket, \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{\ell}{\ell+1}$$

Voir preuve de la relation de Pascal faite en classe.

7/ Soient ℓ et n deux entiers naturels tels que $\ell \leq n$. Montrer que :

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

Soient ℓ et n deux entiers naturels tels que $\ell \leq n$. D'après la question précédente :

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^n \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1} \underbrace{=}_{\text{teles.}} \binom{n+1}{\ell+1} - \underbrace{\binom{\ell}{\ell+1}}_{=0}$$

CONCLUSION. $\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$

8/ Soit k un entier naturel. Expliciter les coefficients binomiaux $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$.

Soit k un entier naturel. Selon le cours :

$$\binom{k}{1} = k; \quad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}; \quad \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

9/ Etablir qu'il existe trois entiers naturels a , b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$k^3 = a \binom{k}{3} + b \binom{k}{2} + c \binom{k}{1}$$

Soient a , b et c trois entiers naturels. On a :

$$\begin{aligned} k^3 &= a \binom{k}{3} + b \binom{k}{2} + c \binom{k}{1} \\ \iff k^3 &= a \frac{k(k-1)(k-2)}{6} + b \binom{k(k-1)}{2} + ck \quad (d'après la question 8) \\ \iff 6k^3 &= ak(k-1)(k-2) + 3bk(k-1) + 6ck \\ \iff 6k^3 &= ak^3 + (3b-3a)k^2 + (2a-3b+6c)k \\ \iff \begin{cases} a = 6 \\ 3b-3a = 0 \\ 2a-3b+6c = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} a = 6 \\ b = 6 \\ c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

CONCLUSION. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = 6 \binom{k}{3} + 6 \binom{k}{2} + \binom{k}{1}$

10/ En utilisant les résultats de la partie 2, retrouver la formule donnant $S_n(3)$ en fonction de n .

D'après la question précédente :

$$S_n(3) = \sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=0}^n \left[6 \binom{k}{3} + 6 \binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right]$$

Par linéarité de la somme, on en déduit que :

$$S_n(3) = 6 \sum_{k=0}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=0}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=0}^n \binom{k}{1}$$

D'où :

$$S_n(3) = 6 \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{k}{1}$$

Donc, d'après la question 7 :

$$\begin{aligned} S_n(3) &= 6 \binom{n+1}{4} + 6 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ \iff S_n(3) &= 6 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} + 6 \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ \iff S_n(3) &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + \frac{4(n+1)n(n-1)}{4} + \frac{2n(n+1)}{4} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow S_n(3) = \frac{(n+1)n[(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2]}{4}$$

$$\Leftrightarrow S_n(3) = \frac{(n+1)n[n^2 - 3n + 2 + 4n - 4 + 2]}{4}$$

$$\Leftrightarrow S_n(3) = \frac{(n+1)n \left[\underbrace{n^2 + n}_{=n(n+1)} \right]}{4}$$

$$\Leftrightarrow S_n(3) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$$

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(3) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$

Partie 3 - Calcul de $S_n(p)$ pour $p \in \mathbb{N}$

On rappelle que pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a noté : $S_n(p) = \sum_{k=0}^n k^p$

Dans cette partie, n et p désignent deux entiers naturels quelconques.

11/ En calculant de deux manières la somme

$$U_n = \sum_{k=0}^n [(k+1)^{p+1} - k^{p+1}]$$

établir que :

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_n(j)$$

D'une part : $U_n = \sum_{k=0}^n [(k+1)^{p+1} - k^{p+1}] = (n+1)^{p+1} \quad (\spadesuit) \text{ (somme télescopique)}$

D'autre part, selon le binôme de Newton : $U_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j$

D'où : $U_n = \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^n \binom{p+1}{j} k^j = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} \sum_{k=0}^n k^j = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_n(j) \quad (\clubsuit)$

CONCLUSION. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a : $(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_n(j)$

12/ En déduire une expression de $S_n(p)$ en fonction des sommes $S_n(q)$ avec $q \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$

D'après la question précédente :

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_n(j) \iff (n+1)^{p+1} = \binom{p+1}{p} S_n(p) + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_n(j)$$

CONCLUSION. $S_n(p) = \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_n(j) \right]$

13/ En déduire explicitement $S_n(5)$ en fonction de $S_n(0)$, $S_n(1)$, $S_n(2)$, $S_n(3)$ et $S_n(4)$.

D'après la question précédente :

$$S_n(5) = \frac{1}{6} \left[(n+1)^6 - \sum_{j=0}^4 \binom{6}{j} S_n(j) \right]$$

D'où :

$$S_n(5) = \frac{1}{6} \left[(n+1)^6 - \binom{6}{0} S_n(0) - \binom{6}{1} S_n(1) - \binom{6}{2} S_n(2) - \binom{6}{3} S_n(3) - \binom{6}{4} S_n(4) \right]$$

Finalement :

$$S_n(5) = \frac{1}{6} \left[(n+1)^6 - S_n(0) - 6S_n(1) - 15S_n(2) - 20S_n(3) - 15S_n(4) \right]$$

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(5) = \frac{1}{6} \left[(n+1)^6 - S_n(0) - 6S_n(1) - 15S_n(2) - 20S_n(3) - 15S_n(4) \right]$