Devoir surveillé n^{0}2

Mathématiques

Durée : 3 heures

CONSIGNES

- **Ce sujet est constitué de 2 exercices et d'un problème**
- **Tout matériel électronique est interdit.**
- **Les résultats doivent être soulignés ou $\boxed{\text{encadrés}}$.**

Exercice 1 — (**Applications du cours – Niveau 1**)

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(3x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

2/ Soient q un nombre réel, et n un entier naturel. Calculer la somme : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^{4k}$

3/ Soit N un entier naturel. On pose :

$$S_2 = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

a/ Déterminer deux réels a et b tels que pour tout entier n on a :

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3}$$

b/ A l'aide de la question précédente, calculer S_2.

4/ **Encore un peu de trigonométrie**.

a/ Soit x un nombre réel. Calculer de deux manières différentes $\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^3$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$

5/ **Pas si complexe !** On rappelle que le module $|z|$ d'un nombre complexe z est défini en posant :

$$|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$$

a/ Démontrer que pour tout couple (z, z') de complexes on a : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

b/ Soit z un nombre complexe. Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |z^n| = |z|^n$

6/ La *suite de Fibonacci* est la très célèbre suite (F_n) définie en posant :

$$\begin{cases} F_0 = 1; \quad F_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence double, établir que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n \geqslant n$

Exercice 2 — (Applications du cours - Level up)

Les questions **1**/ et **2**/ sont indépendantes.

1/ Une somme de référence.

Soit n un entier naturel. On a vu en cours une méthode pour calculer la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$, ainsi que la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$. L'objectif principal est ici de fournir une nouvelle méthode de calcul de la seconde somme.

a/ Soient n et p deux entiers naturels. Rappeler sans démonstration la formule donnant $\binom{n}{p}$.

b/ Soient n et p deux entiers naturels, avec $0 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

c/ En déduire que :

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$$

2/ Une propriété algébrique du réel $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$...

a/ Rappeler la formule d'addition et la formule de duplication pour le cosinus.

b/ Soit a un nombre réel. Exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos(a)$.

c/ En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution d'une équation polynomiale de degré 3 à coefficients entiers.

C'est à dire montrer qu'il existe 4 entiers a, b, c et d que l'on explicitera tels que

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \text{ est solution de l'équation } \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Problème — Sommes et coefficients binomiaux

Problématique. *L'objectif de ce problème est d'étudier les sommes* $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k^p$, *pour différentes valeurs de l'entier* p.

Ces sommes étaient déjà intervenues dans le DS précédent, mais on utilise ici une approche différente pour les calculer.

Vous connaissez déjà quelques valeurs de ces sommes, en particulier lorsque $p = 3$. *Dans ce cas en effet :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(3) = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Vous connaissez également la démonstration par récurrence de cette formule[*]. *Les deux premières parties de ce problème proposent deux autres démonstrations de ce résultat, en utilisant des propriétés des sommes et des coefficients binomiaux. La troisième partie est consacrée à une brève étude du cas général (calcul de* $S_n(p)$ *pour un entier* p *quelconque).*

Notation. Tout au long du problème, on note

$$\boldsymbol{\forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k^p}$$

Questions préliminaires

1/ En utilisant une formule du cours, développer $(k+1)^4$ (où k désigne un entier naturel).

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler sans justification les expressions de $S_n(0)$, $S_n(1)$ et $S_n(2)$.

Partie 1 - Calcul télescopique de $S_n(3)$

Dans la partie 1, n désigne un entier naturel. On pose :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$$

3/ En observant que U_n est une somme remarquable du cours, donner l'expression de U_n en fonction de n.

4/ Déterminer une seconde expression de U_n en fonction de n.

5/ A l'aide des deux questions précédentes, retrouver la formule donnant $S_n(3)$.

∗. Puisqu'elle était au programme de la colle 1.

Partie 2 - Calcul de $S_n(3)$ et relation de Pascal généralisée

6/ Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall \ell \in [\![0, k]\!], \ \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1}$$

7/ Soient ℓ et n deux entiers naturels tels que $\ell \leqslant n$. Montrer que :

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

Ceci est la relation de Pascal généralisée.

8/ Soit k un entier naturel. Expliciter les coefficients binomiaux $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$.

9/ Etablir qu'il existe trois entiers naturels a, b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1}$$

10/ En utilisant les résultats de la partie 2, retrouver la formule donnant $S_n(3)$ en fonction de n.

Partie 3 - Calcul de $S_n(p)$ pour $p \in \mathbb{N}$

On rappelle que pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a noté : $S_n(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$

Dans cette partie, n et p désignent deux entiers naturels quelconques.

11/ En calculant de deux manières la somme

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right]$$

établir que :

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_n(j)$$

12/ En déduire une expression de $S_n(p)$ en fonction des sommes $S_n(q)$ avec $q \in [\![0, p-1]\!]$

13/ En déduire explicitement $S_n(5)$ en fonction de $S_n(0)$, $S_n(1)$, $S_n(2)$, $S_n(3)$ et $S_n(4)$.