Colle 3 – Questions de cours

Question de cours n°1 — **Conjugaison et somme** :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ \overline{z_1+z_2+\cdots+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_n}$$

Notons, pour tout entier naturel non nul n, $P(n)$ l'assertion : $\forall\,(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}$

➤ **Initialisation**. L'assertion $P(1)$ est vraie puisque : $\forall\, z_1\in\mathbb{C},\ \overline{z_1}=\overline{z_1}$, wouaouh.

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n, et soit $(z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}$. On a :
$$\overline{\sum_{k=1}^{n+1} z_k}=\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k+z_{n+1}}=\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k}+\overline{z_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}+\overline{z_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n+1}\overline{z_k}$$
la première égalité provenant de la relation de Chasles pour les sommes, la seconde de la propriété $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$, la troisième de l'hypothèse de récurrence, et la dernière de la relation de Chasles pour les sommes à nouveau.

Finalement : $\overline{\sum_{k=1}^{n+1} z_k}=\sum_{k=1}^{n+1}\overline{z_k}$. D'où $P(n+1)$ est vraie.

➤ **Conclusion**. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ \overline{\sum_{k=1}^{n+1} z_k}=\sum_{k=1}^{n+1}\overline{z_k}$.

Question de cours n°2 — **2 propriétés des modules** :
$$\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2,\ |zz'|=|z|\times|z'| \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ |z^n|=|z|^n$$

Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$. On a : $|zz'|=\sqrt{z\times z'\times\overline{z\times z'}}=\sqrt{z\times z'\times\overline{z}\times\overline{z'}}=\sqrt{z\times\overline{z}\times z'\times\overline{z'}}=\sqrt{z\times\overline{z}}\times\sqrt{z'\times\overline{z'}}=|z|\times|z'|$

Ce qui prouve que : $\boxed{\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2,\ |zz'|=|z|\times|z'|}$

La deuxième s'en déduit par récurrence. Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion : $\forall\, z\in\mathbb{C},\ |z^n|=|z|^n$.

➤ **Initialisation**. L'assertion $P(0)$ est vraie puisque : $\forall\, z\in\mathbb{C},\ \left|z^0\right|=1=|z|^0$

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n, et soit $z\in\mathbb{C}$. On a :
$$\left|z^{n+1}\right|=|z^n\times z|=|z^n|\times|z|=|z|^n\times|z|=|z|^{n+1}$$
la deuxième égalité provenant de la propriété précédemment démontrée, et la troisième de l'hypothèse de récurrence.

En résumé : $\left|z^{n+1}\right|=|z|^{n+1}$. Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie.

➤ **Conclusion**. $\forall\, z\in\mathbb{C},\ \forall n\in\mathbb{N},\ |z^n|=|z|^n$

Question de cours n°3 — **Inégalité triangulaire généralisée** :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ |z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

Notons, pour tout entier naturel non nul n, $P(n)$ l'assertion : $\forall\,(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_k|$.

➤ **Initialisation**. L'assertion $P(1)$ est vraie puisque : $\forall\, z_1\in\mathbb{C},\ |z_1|\leqslant|z_1|$

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n, et soit $(z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}$.

D'après l'inégalité triangulaire "basique" ($|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$), on a :
$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right|=\left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)+z_{n+1}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|+|z_{n+1}|$$

D'où, par hypothèse de récurrence :
$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_k|+|z_{n+1}|\qquad\text{d'où : }\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}|z_k|$$

En résumé : $\forall\,(z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1},\ \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}|z_k|$. $P(n+1)$ est donc vraie.

➤ **Conclusion**. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_k|$.

Question de cours n^{0}4 — $(\mathbb{U}, \times)$ **est un groupe** : stabilité de $\mathbb{U}$ par multiplication et passage à l'inverse, existence d'un élément neutre. Explicitement :

$$\mathbf{1}/\ \forall (z,z') \in \mathbb{U}^2,\ z \times z' \in \mathbb{U} \qquad \mathbf{2}/\ 1 \in \mathbb{U} \qquad \mathbf{3}/\ \forall z \in \mathbb{U},\ \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$$

Rappelons que : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Il est donc déjà clair que $1 \in \mathbb{U}$, puisque $|1| = 1$.

Prouvons le point **1**/ : soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$. Alors : $|z \times z'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$.
Finalement : $|z \times z'| = 1$. D'où $z \times z' \in \mathbb{U}$. Ce qui achève la preuve de ce point.

Prouvons le point **3**/ : soit z un élément de $\mathbb{U}$. Alors : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Finalement : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$. D'où $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$. Ce qui achève la preuve de ce point, et de ces propriétés.

Nous aurons l'occasion de revoir, de préciser et d'approfondir la notion de groupe dans de nombreux chapitres cette année.

Question de cours n^{0}5 — **Propriété** : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)) = \left(\underbrace{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)}_{=\cos(x+y)}\right) + \mathrm{i}\left(\underbrace{\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)}_{=\sin(x+y)}\right)$$

Ainsi : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}$ **Conclusion**. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$

Question de cours n^{0}6 — **Formules d'Euler** : pour tout réel x on a : $\cos(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$

Soit x un réel. On a : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}}{2} = \dfrac{2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)}{2} = \cos(x)$

Et : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)}{2\mathrm{i}} = \sin(x)$

Question de cours n^{0}7 — **Formule de Moivre** : $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\quad (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$

Soit $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. On a : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, ce qui achève la preuve.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

Exercice 2. — Linéarisation de $\cos^3(\theta)$.

Exercice 3. — Linéarisation de $\cos^4(\theta)$.

Exercice 4. — Linéarisation de $\sin^5(\theta)$.

Exercice 5. — Délinéarisation de $\cos(4\theta)$.

Exercice 6. — Soit $\theta \in [0, \pi[$. Module et argument de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$?

Banque d'exercices — Corrigés

Exercice 1. — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

Soient n et k deux entiers naturels et θ un réel. On a : $\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)$ et $\sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)$.[*]

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right) \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right), \text{ et de façon analogue : } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)$$

Il “ne reste plus qu'à” calculer la somme entre parenthèses pour achever la question de cours. En effet, en posant :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}, \text{ on a donc : } \boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}(S_n) \quad (\spadesuit)} \text{ et } \boxed{\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \mathrm{Im}(S_n) \quad (\clubsuit)}$$

Or : $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \iff S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k$

S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On peut donc lui appliquer la formule que vous connaissez bien[†], sous réserve que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta \neq 0 \ [2\pi]$.

On suppose donc $\theta \neq 0 \ [2\pi]$. Alors :

$$S_n = \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \iff S_n = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \iff S_n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)} \quad \textit{(technique de “l'angle-moitié”)}$$

$$\iff S_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}\right)} \frac{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ d'où finalement : } \boxed{S_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (\heartsuit)}$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \theta \neq 0 \ [2\pi],\ \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

Dans le cas où $\theta = 0 \ [2\pi]$, on a $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$ d'où

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \theta = 0 \ [2\pi],\ \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = 0}.$$

Exercice 2. — Linéarisation de $\cos^3(\theta)$.

Soit θ un réel. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right) \qquad \text{d'où : } \cos^3(\theta) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)^3$$

Il s'ensuit[‡] que :

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,\theta}\right) = \frac{1}{8}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,\theta}}_{=2\cos(3\theta)} + \underbrace{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}_{=6\cos(\theta)}\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \cos^3(\theta) = \dfrac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}}$

∗. Puisqu'en général pour tout réel ☺, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}☺} = \cos(☺) + \mathrm{i}\sin(☺)$. Prendre ☺ $= k\theta$ dans la présente situation.

†. $\displaystyle\forall\, q \in \mathbb{C}\setminus\{1\},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

‡. D'après la formule du binôme de Newton : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Exercice 3. — Linéarisation de $\cos^4(\theta)$.

Soit θ un réel. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \qquad \text{d'où :} \quad \cos^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^4$$

Il s'ensuit [§] que :

$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right) = \frac{1}{16}\left(\underbrace{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}_{=2\cos(4\theta)} + \underbrace{4e^{2i\theta} + 4e^{-2i\theta}}_{=8\cos(\theta)} + 6\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \cos^4(\theta) = \dfrac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}}$

Exercice 4. — Linéarisation de $\sin^5(\theta)$.

Pour tout réel θ, on a : $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Il s'ensuit que [¶] :

$$\sin^5(\theta) = \frac{\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^5}{(2i)^5} = \frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}\right)$$

Donc :

$$\sin^5(\theta) = \frac{1}{32i}\left(\underbrace{e^{5i\theta} - e^{-5i\theta}}_{=2i\sin(5\theta)} - 5\left(\underbrace{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}_{=2i\sin(3\theta)}\right) + 10\left(\underbrace{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}_{=2i\sin(\theta)}\right)\right)$$

Par suite :

$$\sin^5(\theta) = \frac{1}{32i}\left(2i\sin(5\theta) - 10i\sin(3\theta) + 20i\sin(\theta)\right)$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \sin^5(\theta) = \dfrac{1}{16}\ \sin(5\theta) - \dfrac{5}{16}\ \sin(3\theta) + \dfrac{5}{8}\ \sin(\theta)}$

Exercice 5. — Délinéarisation de $\cos(4\theta)$.

Soit θ un réel. On a : $\cos(4\theta) = \operatorname{Re}\left(e^{4i\theta}\right) = \operatorname{Re}\left(\left[e^{i\theta}\right]^4\right)$.

Par suite [‖] : $\cos(4\theta) = \operatorname{Re}\left([\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^4\right) \qquad (\spadesuit)$

Or :

$$[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^4 = \cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \qquad (\clubsuit)$$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$$

D'où (en utilisant la relation fondamentale de la trigo) :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta))^2$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1}$

§. D'après la formule du binôme de Newton : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
¶. Essentiellement car : $2^5 = 32$; $i^5 = i$; et $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.
‖. On peut d'ailleurs se passer de la ligne précédente, en utilisant directement la formule de Moivre.

Exercice 6. — Soit $\theta \in [0, \pi[$. Module et argument de $1 + e^{i\theta}$?

Soit $\theta \in [0, \pi[$. En utilisant la technique de l'angle-moitié, on écrit :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(\frac{1}{e^{i\theta/2}} + \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta/2}}\right) = e^{i\theta/2}\underbrace{\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right)}_{=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$$

En résumé : $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$.

Il reste à observer que dans cette écriture :

- $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est un réel strictement positif, puisque $0 \leqslant \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$
- $e^{i\theta/2} \in \mathbb{U}$ (le nombre complexe $e^{i\theta/2}$ est de module 1)

On en déduit que : $\boxed{\left|1 + e^{i\theta}\right| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg\left(1 + e^{i\theta}\right) = \frac{\theta}{2}\ [2\pi]}$