

EXERCICES 5 : FONCTIONS À VALEURS RÉELLES

GÉNÉRALITÉS

EXERCICE 1. — Résoudre l'équation : $\ln^2(x) - \ln(x) - 30 = 0$.

EXERCICE 2. — Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

EXERCICE 3. — Résoudre les inéquations suivantes, et représenter les ensembles des solutions sur la droite réelle.

$$\text{a/ } |x-1| \leq 2 \quad \text{b/ } |x+2| > 1 \quad \text{c/ } |x-3| = 2 \quad \text{d/ } |x-1| < \alpha \text{ (avec } \alpha > 0)$$

EXERCICE 4. — Résoudre les inéquations

$$\text{a/ } |2x-1| \leq 1 \quad \text{b/ } |3x+2| \geq 4 \quad \text{c/ } |2x-1| \geq |x+2|$$

DÉRIVABILITÉ, APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

EXERCICE 5. — Dans chacun des exemples suivants, calculer la dérivée de f (lorsque cette dérivée existe).

$$1/ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(\varphi - x) \text{ (avec } \varphi \in \mathbb{R})$$

$$2/ \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = e^{1/x}$$

$$3/ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ch}(x^3 - 2x)$$

$$4/ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ax+b} \cos(x) \text{ (avec } a, b \in \mathbb{R})$$

$$5/ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin^5(x)$$

$$6/ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$7/ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos^n(x) \text{ (avec } n \in \mathbb{N}^*)$$

$$8/ \forall x > 0, f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$$

EXERCICE 6. — Prouver que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\sin(x) \leq x$.

EXERCICE 7. — Montrer que pour tout réel x positif on a : $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$. Est-ce vrai pour tout réel x ?

EXERCICE 8. — Prouver que pour tout réel $x \in]0; \pi/2[$, on a : $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$

EXERCICE 9. —

1/ Démontrer que pour tout réel $u > -1$, on a : $\ln(1+u) \leq u$.

2/ A l'aide de la question précédente, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

EXERCICE 10. — (**Dérivation et parité**) — Soit f une fonction dérivable sur une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à zéro. Que peut-on dire de f' si f est paire ? Si f est impaire ?

EXERCICE 11. — Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ est-elle définie ? Dérivable ? Donner l'expression de sa dérivée.

EXERCICE 12. — Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|^2$. Prouver que f est constante.

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

EXERCICE 13. — Montrer que pour tout réel x on a : $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$

EXERCICE 14. — Montrer que $\operatorname{ch}(\ln(2))$ est un nombre rationnel, que l'on explicitera.

EXERCICE 15. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\operatorname{ch}(x) = 2$. Puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\operatorname{ch}(x) = -2$.

EXERCICE 16. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{ch}(x) - 6 = 0$

EXERCICE 17. — Montrer que pour tout couple de réels (a, b) on a : $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a) \operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a) \operatorname{sh}(b)$

EXERCICE 18. — Soit y un réel strictement supérieur à 1. Etablir que l'équation $\operatorname{ch}(x) = y$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, et que ces solutions sont opposées.

EXERCICE 19. — Etablir que, pour tout entier naturel n et pour tout réel non nul x , on a :

$$\sum_{k=0}^n e^{kx} = e^{nx/2} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

EXERCICE 20. — Etablir que pour tout entier naturel n , et pour tout réel x , on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx} = 2^n e^{nx/2} \operatorname{ch}^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

EXERCICE 21. — **Linéarisation.** Soit x un réel quelconque. Linéariser $\operatorname{ch}^4(x)$, puis linéariser $\operatorname{sh}^3(x)$.

EXERCICE 22. — **Délinéarisation.** Exprimer $\operatorname{ch}(3x)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$ pour tout réel x .

EXERCICE 23. — **“Angle-moitié”.** Soit x un nombre réel. Etablir que :

$$1 - e^x = \lambda e^{x/2} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

où λ est un réel dont la valeur est à préciser.

UTILISATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

EXERCICE 24. — Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} \quad \text{b/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} \quad \text{c/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{3x} \quad \text{d/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$$

EXERCICE 25. — Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{b/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{c/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{d/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \left(e^{1/n} - 1\right)$$

EXERCICE 26. — Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \ln(n)) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$$

EXERCICE 27. — Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

DÉRIVÉES D'ORDRES SUPÉRIEURS

EXERCICE 28. — Calculer la dérivée n -ième de f dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{l|l|l} 1/ f(x) = (2x-1)e^{ax+b} & 3/ f(x) = \sin(x)\cos(x) & 5/ f(x) = \cos^3(x) \\ 2/ f(x) = 4x\sin(x) & 4/ f(x) = (x^2+1)e^x & 6/ f(x) = x\operatorname{ch}(x) \end{array}$$

EXERCICE 29. — Calculer la dérivée n -ième de chacune des fonctions f , g et h respectivement définies par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad g(x) = \frac{1}{1+x} \quad h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

EXERCICE 30. — Soient a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{ch}(ax+b)$$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(2n)}(x) = a^{2n}g(x)$.

EXERCICE 31. — 1/ Calculer de deux façons la dérivée n -ième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{2n}$.

2/ En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

FONCTIONS PUISSANCES, (IN)ÉQUATIONS...

EXERCICE 32. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-2x} (\ln x)^5$.

EXERCICE 33. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2026^x}{x^{2026}}$.

EXERCICE 34. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

EXERCICE 35. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x$.

EXERCICE 36. — Résoudre l'équation suivante (d'inconnue réelle x) : $3^{2x} - 5 \times 3^x + 6 = 0$.

EXERCICE 37. — Résoudre l'équation suivante (d'inconnue réelle x) : $4^x - 2^{x+1} = 8$.

EXERCICE 38. — Déterminer les valeurs du réel x telles que : $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

EXERCICE 39. — Montrer que pour tout x dans $]0; 1[$: $x^x (1-x)^{(1-x)} \geq \frac{1}{2}$

EXERCICE 40. — Soit a un réel strictement positif. Résoudre l'inéquation : $a^{(x^2)} < (\sqrt{a})^{7x-3}$

EXERCICE 41. — Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $x^{(2x^2)} = (\sqrt{x})^{12x-8}$

EXERCICE 42. — Etudier la fonction $f : x \mapsto x^{1/x}$ (*ensemble de définition, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, limites aux bornes*).

EXERCICE 43. — Déterminer : $\max_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n}$

EXTRAITS DE DS

EXERCICE 44. — **(INÉQUATION).** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation : $x^{3x^2+3x} \leq \sqrt{x}^{2x+2}$.

EXERCICE 45. — **(LIMITE).** Soit α un nombre réel. On pose, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Déterminer en fonction de α la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n$.

EXERCICE 46. — (AUTOUR DE LA FONCTION SH).

On rappelle que la fonction sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1/ Questions préliminaires.

- a/ Rappeler brièvement la dérivée, le sens de variation, la parité, les limites en $\pm\infty$ et le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction sh (*aucune justification n'est nécessaire*).
- b/ Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$.
- c/ Montrer que pour tout réel y , on a : $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ et $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$.
- d/ Soit y un réel arbitraire. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_y) : \operatorname{sh}(x) = y$ (*on établira l'existence et l'unicité d'une solution*).

2/ Introduction et étude d'une nouvelle fonction.

On définit une fonction F en posant : $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

- a/ Justifier que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$. Puis établir que F est impaire.
- b/ On admet que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- c/ Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction F .
- d/ Déterminer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x}}$.

EXERCICE 47. — (SOMMES). Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel non-nul x , on pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k e^{kx} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^n e^{2kx}$$

1/ Etablir que pour tout réel non-nul x on a :

$$g(x) = e^{nx} \frac{\operatorname{sh}((n+1)x)}{\operatorname{sh}(x)}$$

2/ Montrer que pour tout réel non-nul x on a :

$$f(x) = (1 - e^x) g(x)$$