Maths - Formulaire d'automne

I - Trigonométrie

II - Fonctions à valeurs réelles

II.1 - Généralités

II.2 - Fonctions usuelles

Valeur absolue

Fonction polynomiale de degré 2

Fonctions exponentielle et logarithme népérien

Fonctions cosinus, sinus et tangente

Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

Fonctions puissances

Fonctions exponentielles de base a

Fonctions arccosinus, arcsinus et arctangente

II.3 - Formulaire des dérivées

II.4 - Formulaire des DL à l'ordre 1 en 0

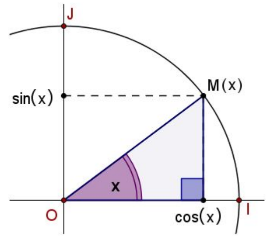
II.5 - Formulaire des primitives

II.6 - Formulaire des dérivées n-èmes

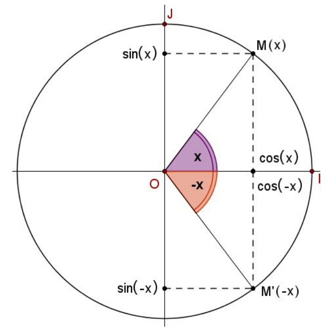
I - Trigonométrie

Note : les formules données sur cette page sont valables pour tout nombre réel x.

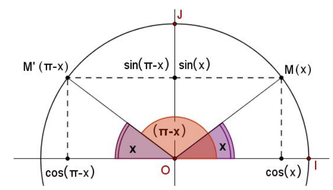
Relation fondamentale : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$



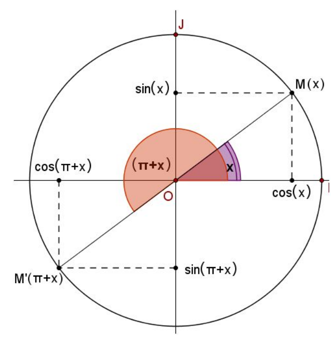
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$



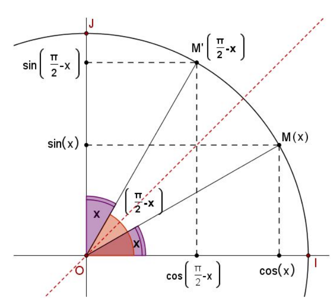
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$



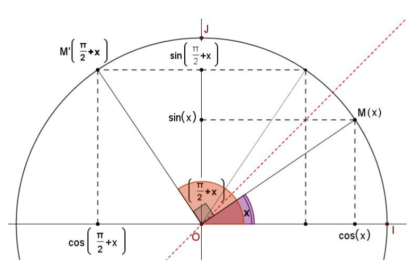
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$



Note : *sur cette page, a, b, p et q désignent des réels... raisonnables ! (attention à l'ensemble de définition de* tan*)*

Formules d'addition :
$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{cases}$$

Formules "de soustraction" :
$$\begin{cases} \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \\ \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{cases}$$

Formules de duplication :
$$\begin{cases} \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \\ \tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \end{cases}$$

Formules de linéarisation :
$$\begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \quad \text{d'où :} \quad \cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2} \\ \sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \quad \text{d'où :} \quad \sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2} \\ \sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} \quad \text{d'où :} \quad \sin(a)\cos(a) = \dfrac{\sin(2a)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \end{cases}$$

En posant $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$:
$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

II - Fonctions à valeurs réelles

II.1 Généralités, terminologie

1/ Une fonction f est **paire** si son ensemble de définition D est symétrique par rapport à zéro et si

$$\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$$

2/ Une fonction f est **impaire** si son ensemble de définition D est symétrique par rapport à zéro et si

$$\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x) \Longleftrightarrow \forall x \in D,\ f(x) + f(-x) = 0$$

3/ Une fonction f réalise une **bijection** de D dans E si elle est définie sur D, et si tout élément de E admet un unique antécédent par f dans D :

$$\forall y \in E,\ \exists!\, x \in D,\ y = f(x)$$

4/ Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est T**-périodique** si : $\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)$

Dans toutes les définitions ci-dessous, f désigne une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles. La fonction f est :

5/ **minorée sur** E si : $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ f(x) \geqslant m$

6/ **majorée sur** E si : $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ f(x) \leqslant M$

7/ **bornée sur** E si elle est minorée et majorée sur E.

8/ **croissante sur** E si : $\forall\, (x, y) \in E^2,\ [x \leqslant y] \Longrightarrow [f(x) \leqslant f(y)]$

9/ **décroissante sur** E si : $\forall\, (x, y) \in E^2,\ [x \leqslant y] \Longrightarrow [f(x) \geqslant f(y)]$

10/ **monotone sur** E si elle est croissante ou décroissante sur E.

11/ f admet un **maximum** en a, ou que $f(a)$ est le **maximum de** f **sur** E si :

$$\forall x \in E, \qquad f(x) \leqslant f(a)$$

12/ f admet un **minimum** en a, ou que $f(a)$ est le **minimum de** f **sur** E si :

$$\forall x \in E, \qquad f(x) \geqslant f(a)$$

13/ f admet un **extremum** en a, ou que $f(a)$ est un **extremum de** f **sur** E si $f(a)$ est le minimum ou le maximum de f sur E.

II.2 Fonctions usuelles

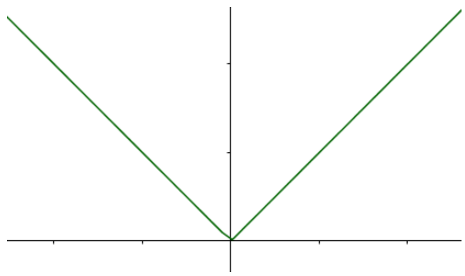
La fonction valeur absolue

➤ **Dérivabilité** : la fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas dérivable en 0

➤ **Continuité** : la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur sur $\mathbb{R}$

➤ **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$

➤ **Parité** : la fonction $x \longmapsto |x|$ est paire



Les fonctions polynomiales de degré 2

➤ **Hypothèse** : (a, b, c) triplet de réels avec $a \neq 0$

➤ **Définition** : pour tout réel x, $P_{a,b,c}(x) = ax^2 + bx + c$

➤ **Dérivabilité** : la fonction $P_{a,b,c}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

➤ **Sens de variation**.

Si $a > 0$: strictement décroissante sur $]-\infty, -b/2a[$, strictement croissante sur $]-b/2a, +\infty[$

Si $a < 0$: strictement croissante sur $]-\infty, -b/2a[$, strictement décroissante sur $]-b/2a, +\infty[$

➤ **Discriminant**. $\Delta = b^2 - 4ac$

➤ **Signe de** $P_{a,b,c}$.

Si $\Delta > 0$: $P_{a,b,c}$ possède exactement 2 racines réelles $x_{+,-} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; la fonction $P_{a,b,c}$ est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé à a entre les racines

Si $\Delta \leqslant 0$: $P_{a,b,c}$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, le signe de a

➤ **Limites aux bornes**.

$$\text{si } a > 0 : \lim_{x \to \pm\infty} P_{a,b,c}(x) = +\infty \qquad \text{si } a < 0 : \lim_{x \to \pm\infty} P_{a,b,c}(x) = -\infty$$

➤ **Convexité**. $P_{a,b,c}$ est convexe si $a > 0$, concave si $a < 0$

Fonctions logarithme népérien et exponentielle

La fonction logarithme népérien

➤ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}_+^*$

➤ **Dérivabilité** : la fonction $x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln' x = \frac{1}{x}$$

➤ **Sens de variation** : strict. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \ln x = -\infty$$

(asymptote verticale d'équation $x = 0$).

➤ **Tableau de variation** :

x	0		$+\infty$
$\ln x$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

➤ La fonction ln est une **bijection** de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$

➤ $\forall\,(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

➤ **Convexité**. ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

La fonction exponentielle

➤ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$

➤ **Dérivabilité** : la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}'(x) = \mathrm{e}^x$$

➤ **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

(asymptote horizontale d'équation $y = 0$).

➤ **Tableau de variation** :

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

➤ La fonction exp induit une **bijection** de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$

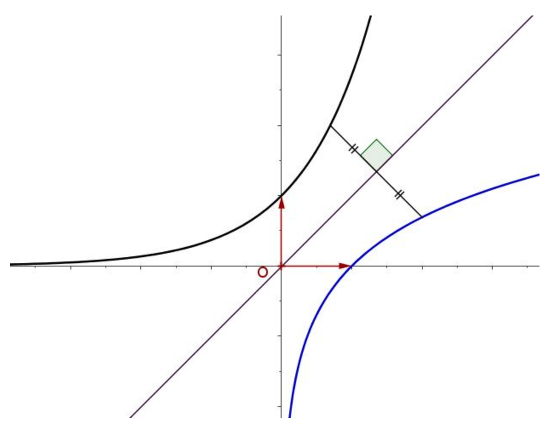
➤ $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$

➤ **Convexité**. exp est convexe sur $\mathbb{R}$

Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x$$

Dans un repère orthonormé du plan, les courbes représentatives de ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Cas particulier – Logarithme de base a. Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction **logarithme de base** a et on note $\log_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Fonctions trigonométriques

La fonction cosinus

➤ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$

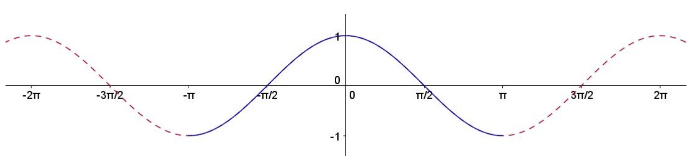
➤ **Dérivabilité** : la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos' x = -\sin x$$

➤ **Tableau de variation** :

x	$-\pi$		0		π
$\cos' x$		$+$	0	$-$	
$\cos$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

➤ **Courbe représentative** :



➤ **Convexité** : convexe sur $[-\pi/2, \pi/2]$, concave sur $[\pi/2, 3\pi/2]$

➤ **Bijection** : cos est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$

La fonction sinus

➤ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$

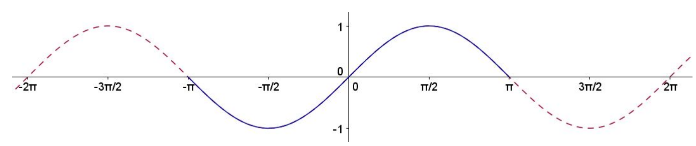
➤ **Dérivabilité** : la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin' x = \cos x$$

➤ **Tableau de variation** :

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$\sin' x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

➤ **Courbe représentative** :



➤ **Convexité** : concave sur $[0, \pi]$, convexe sur $[-\pi, \pi]$

➤ **Bijection** : sin bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.

La fonction tangente

➤ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

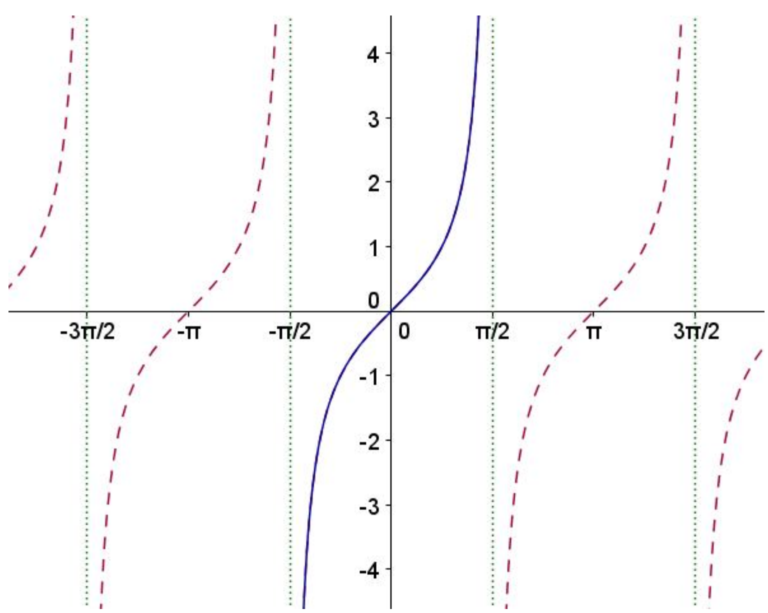
➤ **Dérivabilité** : la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi],\ \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

➤ **Tableau de variation** :

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$\tan' x$		$+$	
$\tan x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

➤ **Courbe représentative** :



Cette courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère (cf parité). Pour obtenir la courbe complète, il suffit de la tracer sur $]-\pi/2;\pi/2[$ puis d'appliquer des translations de vecteur $k\pi\overrightarrow{i}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

➤ **Convexité** : convexe sur $[0,\pi/2[$, concave sur $]-\pi/2,0]$

➤ **Bijection** : tan bijective de $]-\pi/2,\pi/2[$ sur $\mathbb{R}$

Fonctions trigonométriques hyperboliques

La fonction cosinus hyperbolique

La fonction ch est **définie** sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

➤ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$

➤ **Parité** : ch est paire

➤ **Dérivabilité** : ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$

➤ **Sens de variation** : strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

➤ **Limites aux bornes** : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, et (par parité) : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$

➤ **Convexité** : ch est convexe sur $\mathbb{R}$

➤ **Bijection** : ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[1, +\infty[$

La fonction sinus hyperbolique

La fonction sh est **définie** sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$			$+$		
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

➤ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$

➤ **Parité** : sh est impaire

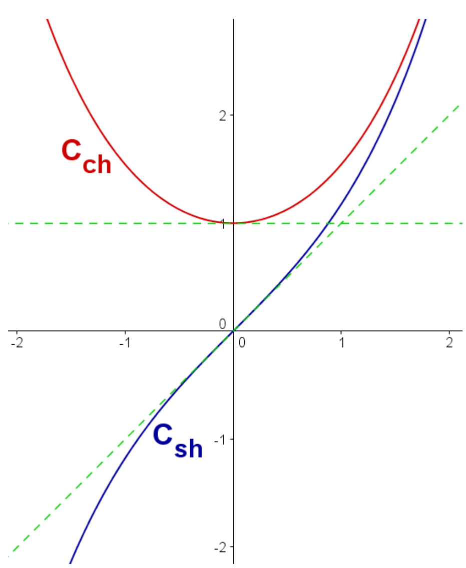
➤ **Dérivabilité** : sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$

➤ **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

➤ **Limites aux bornes** : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$

➤ **Convexité** : sh est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$

➤ **Bijection** : sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



FORMULE CLEF — $\forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R},\ a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$

LES FONCTIONS PUISSANCES

DÉFINITION. *Soit a un réel (quelconque). On appelle fonction* ***puissance d'exposant*** *a et nous noterons P_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie en posant :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\quad P_a(x) = x^a = \mathrm{e}^{a\ln x}$$

Etude de $x \mapsto x^a \quad (a > 0)$

➤ **Sens de variation** : strict. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

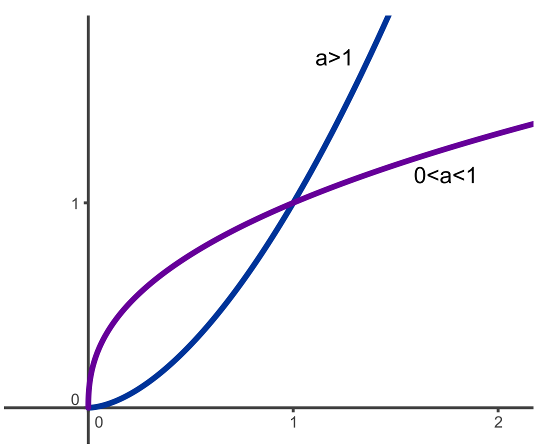
➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} x^a = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^a = +\infty$$

➤ **Tableau de variation** :

x	0		$+\infty$
$P'_a(x)$	‖	$+$	
x^a	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

➤ **Exemples de courbes représentatives** :



Etude de $x \mapsto x^a \quad (a < 0)$

➤ **Sens de variation** : strict. décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

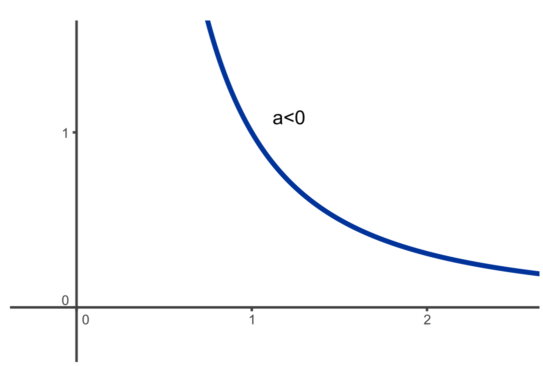
➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} x^a = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^a = 0$$

➤ **Tableau de variation** :

x	0		$+\infty$
$P'_a(x)$	‖	$-$	
x^a	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

➤ **Exemple de courbe représentative** :



Les fonctions exponentielles de base a

Définition. *Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction* ***exponentielle de base*** a *et on note* $\exp_a$ *fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *en posant :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$$

Remarque — En particulier : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a^x > 0$.

➤ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$

➤ **Dérivabilité** : dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (\exp_a)'(x) = (\ln a) \times a^x$

➤ **Convexité** : convexe sur $\mathbb{R}$

Etude de $x \mapsto a^x \quad (0 < a < 1)$

➤ **Sens de variation** : strict. décroissante sur $\mathbb{R}$.

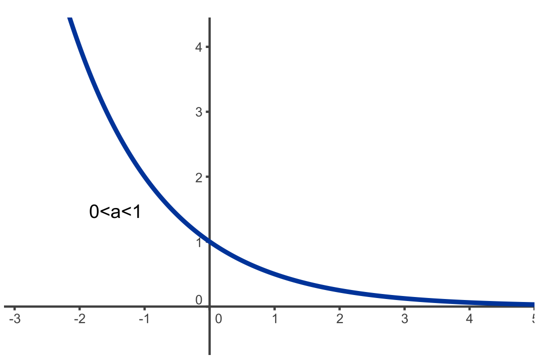
➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

➤ **Tableau de variation** :

x	$-\infty$		$+\infty$
$(\exp_a)'$			
a^x	$+\infty$	$\searrow$	0

➤ **Exemple de courbe représentative** :



Etude de $x \mapsto a^x \quad (a > 1)$

➤ **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

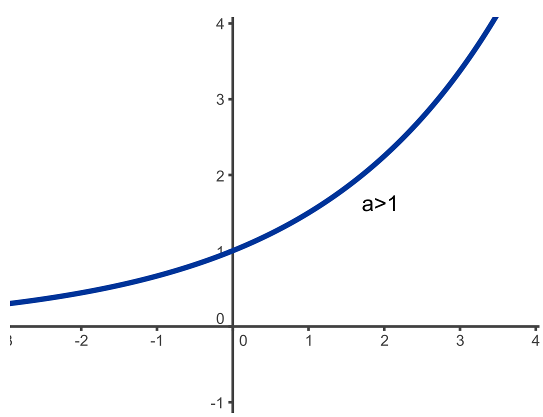
➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

➤ **Tableau de variation** :

x	$-\infty$		$+\infty$
$(\exp_a)'$			
a^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

➤ **Exemple de courbe représentative** :



Pour tout réel a (strictement positif et $\neq 1$), la fonction exponentielle de base a réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, et "transforme les sommes en produits".

Fonctions trigonométriques réciproques

La fonction arccosinus

arccos est **définie** sur $[-1;1]$ par : $\begin{array}{rcl} \arccos : [-1;1] & \longrightarrow & [0;\pi] \\ x & \longmapsto & \mathrm{y} \end{array}$ (où y : unique solution dans $[0;\pi]$ de $\cos(y) = x$).

La fonction arccos est **dérivable** (et même de classe $\mathscr{C}^1$) sur $]-1;1[$, et **n'est pas dérivable** en 1, ni en -1.

De plus : $\forall\, x \in\ ]-1;1[\,,\ \arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1;1]$.

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\text{arccos}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \dfrac{\pi}{2} - x$, et $\mathscr{C}_{\text{arccos}}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $[-1;0]$ (*resp.* sur $[0;1]$).

x	-1		1
$\arccos' x$	$\Vert$	$-$	$\Vert$
$\arccos\ x$	π	$\searrow$	0

La fonction arcsinus

arcsin est **définie** sur $[-1;1]$ par : $\begin{array}{rcl} \arcsin : [-1;1] & \longrightarrow & \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \mathrm{y} \end{array}$ (où y : unique solution dans $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ de $\sin(y) = x$).

La fonction arcsin est **impaire**, **dérivable** (et même de classe $\mathscr{C}^1$) sur $]-1;1[$, et **n'est pas dérivable** en 1, ni en -1.

De plus : $\forall\, x \in\ ]-1;1[\,,\ \arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1;1]$.

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\text{arcsin}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$, et $\mathscr{C}_{\text{arccos}}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $[0;1]$ (*resp.* sur $[-1;0]$).

x	-1	0	1
$\arcsin' x$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
$\arcsin\ x$	$-\pi/2$	$\nearrow\ 0$	$\pi/2$

La fonction arctangente

arctan est **définie** sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{array}{rcl} \arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \mathrm{y} \end{array}$ (où y : unique solution dans $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ de $\tan(y) = x$).

La fonction arctan est **impaire**, **dérivable** (et même de classe $\mathscr{C}^1$) sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\forall\, x \in\ \mathbb{R},\ \arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus elle est **bornée**.

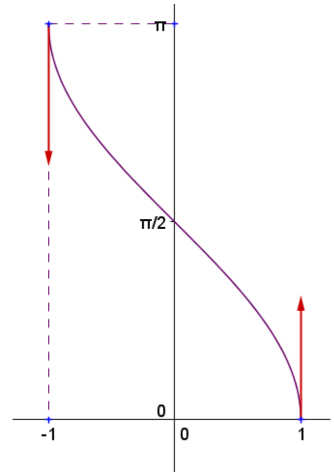
La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\text{arctan}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$, et $\mathscr{C}_{\text{arctan}}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $\mathbb{R}_-$ (*resp.* sur $\mathbb{R}_+$).

La courbe $\mathscr{C}_{\text{arctan}}$ admet au voisinage de $+\infty$ (*resp.* de $-\infty$) une asymptote horizontale d'équation $y = \pi/2$ (*resp.* $y = -\pi/2$).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\arctan' x$		0	
$\arctan\ x$	$-\pi/2$	$\nearrow\ 0$	$+\pi/2$

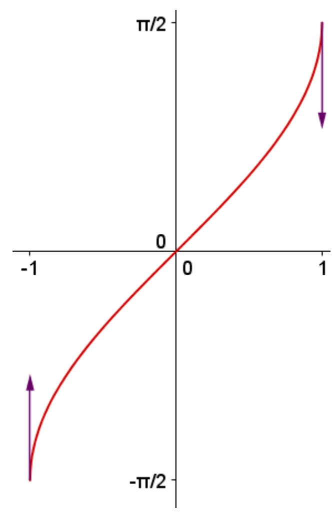
Arccosinus (arccos)

x	-1		1
$\arccos' x$	$\Vert$	$-$	$\Vert$
$\arccos\ x$	π	$\searrow$	0



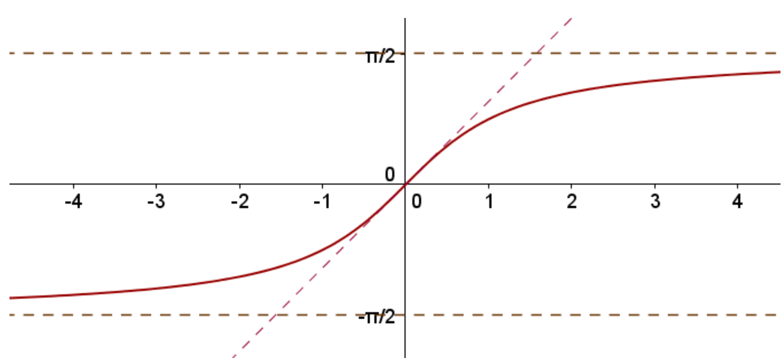
Arcsinus (arcsin)

x	-1	0	1
$\arcsin' x$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
$\arcsin\ x$	$-\pi/2$	$\nearrow 0 \nearrow$	$\pi/2$



Arctangente (arctan)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\arctan' x$		0	
$\arctan\ x$	$-\pi/2$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\pi/2$



II.3 Formulaire des dérivées

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$f(x)$	$f'(x)$
$(v \circ u)(x)$	$v'(u(x)) \times u'(x)$
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$
$\frac{1}{v(x)}$	$-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$
$u^\alpha(x)\ \ (\alpha \neq 0)$	$\alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x)$
$u^2(x)$	$2u(x)u'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\mathrm{e}^{u(x)}$	$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\mathrm{ch}(u(x))$	$u'(x)\mathrm{sh}(u(x))$
$\mathrm{sh}(u(x))$	$u'(x)\mathrm{ch}(u(x))$
$\arccos(u(x))$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arcsin(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arctan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

II.4 Formulaire des développements limités à l'ordre 1 usuels

Théorème : f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε définie au voisinage de zéro tels que :
$$\forall\, h \in \mathbb{R},\ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Ainsi, lorsque f est dérivable en a, on a :

$$\boldsymbol{f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)}$$

1/ $\boxed{e^h = 1 + h + h\varepsilon(h)}$

2/ $\boxed{\sin(h) = h + h\varepsilon(h)}$

3/ $\boxed{\tan(h) = h + h\varepsilon(h)}$

4/ $\boxed{\mathrm{sh}(h) = h + h\varepsilon(h)}$

5/ $\boxed{\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)}$

6/ $\boxed{\cos(h) = 1 + h\varepsilon(h)}$

7/ $\boxed{\mathrm{ch}(h) = 1 + h\varepsilon(h)}$

8/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{(1+h)^n = 1 + nh + h\varepsilon(h)}$$

9/ Et même, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + h\varepsilon(h)}$$

10/ En particulier, pour $\alpha = 1/2$,
$$\boxed{\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon(h)}$$

11/ En particulier (bis), pour $\alpha = -1$,
$$\boxed{\frac{1}{1+h} = 1 - h + h\varepsilon(h)}$$

12/ $\boxed{\dfrac{1}{1-h} = 1 + h + h\varepsilon(h)}$

13/ $\boxed{\arccos(h) = \dfrac{\pi}{2} - h + h\varepsilon(h)}$

14/ $\boxed{\arcsin(h) = h + h\varepsilon(h)}$

15/ $\boxed{\arctan(h) = h + h\varepsilon(h)}$

➤**Conséquences**

1/ $\boxed{e^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon(\dfrac{1}{n})}$

(avec $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$)

2/ $\boxed{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

3/ $\boxed{\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

4/ $\boxed{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

5/ $\boxed{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

6/ *Etc...*

II.5 Formulaire des primitives

Fonction f	Primitives F
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{x^n} \ (n \neq 1)$	$\frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
e^x	$\mathrm{e}^x + c$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + c$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x) + c$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x) + c$

Fonction f	Primitives F
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
$u'(x)\,u(x)$	$\frac{1}{2}u^2(x) + c$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + c$
$u'(x)\,u^\alpha(x)$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) + c$
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)} + c$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$
$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$	$\tan(u(x)) + c$
$u'(x)\,\mathrm{ch}(u(x))$	$\mathrm{sh}(u(x)) + c$
$u'(x)\,\mathrm{sh}(u(x))$	$\mathrm{ch}(u(x)) + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$\arcsin(u(x)) + c$
$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$\arccos(u(x)) + c$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\arctan(u(x)) + c$

II.6 Formulaire des dérivées n-èmes

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
e^x	e^x
e^{ax+b}	$a^n \mathrm{e}^{ax+b}$
$\cos(x)$	$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin(x)$	$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\dfrac{\mathrm{e}^x + (-1)^n \mathrm{e}^{-x}}{2} = \begin{cases} \mathrm{ch}(x) \text{ si } n \text{ est pair} \\ \mathrm{sh}(x) \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$
$\mathrm{sh}\,(x)$	$\dfrac{\mathrm{e}^x + (-1)^{n+1} \mathrm{e}^{-x}}{2} = \begin{cases} \mathrm{ch}(x) \text{ si } n \text{ est impair} \\ \mathrm{sh}(x) \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$
$\dfrac{1}{x}$	$(-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$
$\ln(x)$	$(-1)^{n+1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$)
$x^N \quad (N \in \mathbb{N})$	$\begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!} x^{N-n} \text{ si } n \leqslant N \\ 0 \text{ si } n > N \end{cases}$
$f(ax+b)$	$a^n f^{(n)}(ax+b)$

A SUIVRE !!!