Problème de la semaine 4
(corrigé en ligne mardi 7/10)

Exercice 1 — **(Croissances comparées)** L'objet de cet exercice est de (re-)démontrer des résultats de Terminale concernant certaines limites, et de les généraliser.

1/ Etablir que : $\forall x \geqslant 0,\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

2/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

3/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

4/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$.

5/ Soient α et β deux réels strictement positifs.

a/ Etablir que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.

b/ Etablir que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$.

Exercice 2 — **(Incontournable)**

Soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Exercice 3 — **(Linéarisation).** Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, et θ un réel quelconque.

1/ Etablir que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}$$

2/ En déduire que :

$$\sin^{2n+1}(\theta) = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \sin\left((2n-2k+1)\,\theta\right)$$

Exercice 4 — **(Inéquation).** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$x^{\left(2x^2\right)} > \left(\sqrt{x}\right)^{9x-2}$$