Colle 5 — Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — Dérivée n-ème de cos.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{P}(n)$ l'assertion : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

➤ **Initialisation ($n = 0$).** Pour tout réel x : $\cos^{(0)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + \dfrac{0 \times \pi}{2}\right)$. $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

➤ **Hérédité.** Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

On en déduit que $\cos^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left[\cos^{(n)}\right]'(x) = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

Par suite : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{(n+1)\pi}{2}\right) \qquad$ Ce qui signifie que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

Question de cours n^{0}2 — Soit f la fonction définie sur $I = \left]1, +\infty\right[$ en posant : $\forall x > 1,\ f(x) = 1/(1-x)$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et : $\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

L'initialisation (vérification de $P(0)$) consiste à observer que f est continue (de classe $\mathscr{C}^0$) sur I, et à effectuer une vérification immédiate ; passons à l'hérédité.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Alors : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. En particulier $f^{(n)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = -\frac{-n!(n+1)\,(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie, établit l'hérédité, achève cette récurrence et fournit la propriété désirée.

Question de cours n^{0}3 — Soit N un entier naturel, et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^N$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!}x^{N-n} & \text{si } n \in [\![0, N]\!] \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$

Preuve par récurrence <u>**finie**</u>* pour la partie non-triviale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{N!}{(N-n)!}x^{N-n}$.

➤<u>**Initialisation**</u>. Pour $n = 0$, et pour tout réel x on a : $f^{(0)}(x) = f(x) = x^N = \dfrac{N!}{(N-0)!}x^{N-0}$

On déduit de cette remarquable observation que $P(0)$ est vraie.

➤<u>**Hérédité**</u>. **Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \in [\![0, N-1]\!]$.**

Sous cette hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{N!}{(N-n)!}x^{N-n}$.

Donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \dfrac{N!}{(N-n)!}(N-n)x^{N-n-1} = \dfrac{N!}{(N-(n+1))!}x^{N-(n+1)}$

Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie.

➤<u>**Conclusion**</u>. On a établi que $P(0)$ est vraie, et : $\forall n \in [\![0, N-1]\!],\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

On en déduit que : $\forall n \in [\![0, N]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{N!}{(N-n)!}x^{N-n}$

En particulier, $f^{(N)}$ est constante égale à $N!$. Il s'ensuit que $f^{(N+1)}$ est nulle, et plus généralement toutes les dérivées $f^{(p)}$ avec p strictement supérieur à N le sont.

---

*. Une rareté !

Question de cours n^{0}4 — **Théorème (formule de Leibniz)** : Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors (fg) l'est également et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{ou} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Prouvons le théorème par récurrence sur l'entier naturel n.

Posons $\mathrm{P}(n)$: $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (où f et g désignent deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I).

➤**Initialisation** : pour $n=0$, on a $(fg)^{(0)} = fg$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg$. $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

➤**Hérédité** : on suppose $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Alors :

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right] + f^{(0)} g^{(n+1)}$$

D'où, en appliquant la relation de Pascal † : $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

Cette relation assure que la propriété $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, et pour tout couple de fonctions (f,g) de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Question de cours n^{0}5 — **Croissances comparées**.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty\,; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0\,; \quad \forall\,(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons : $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (selon les TG).

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$. On en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}_+$, puisque la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ (et même sur $\mathbb{R}$).

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme en outre $f(0)=0$, on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$. En particulier : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$

On en déduit par comparaison que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \qquad (\spadesuit)$

Par le biais du changement de variable $X = \ln(x)$, on obtient : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X}$.

On en déduit avec $(\spadesuit)$ que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad (\clubsuit)$

Enfin, soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\mathrm{e}^{\beta \ln(x)}} = \mathrm{e}^{\alpha x - \beta \ln(x)} = \mathrm{e}^{x\left(\alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x}\right)}$$

D'après $(\clubsuit)$, on a : $\lim_{x\to+\infty} \alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x} = \alpha > 0$. D'où : $\lim_{x\to+\infty} x\left(\alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$.

On en déduit que : $\forall\,(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$

†. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, k \in [\![\, 0, n \,]\!],\ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Banque d'exercices

Exercice 1. — Calculer la dérivée n-ième de f, définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{ax+b}$

Exercice 2. — Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8}$

Exercice 3. — Déterminer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2025^x}{x^{2025}}$

Exercice 4. — Etudier la fonction $f : x \longmapsto x^{1/x}$ *(ensemble de définition, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, limites aux bornes).*

Exercice 5. — **(Racines carrées dans $\mathbb{C}$, méthode 1)**. Déterminer les racines carrées de $\omega_1 = 4+4\mathrm{i}$.

Exercice 6. — **(Racines carrées dans $\mathbb{C}$, méthode 2)**. Déterminer les racines carrées de $\omega_2 = 2+4\mathrm{i}$.

Exercice 7. — **(Somme des racines n-èmes de l'unité, très classique)**.
Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On a :

$$\sum_{\omega\in\,\mathbb{U}_n} \omega = 0$$

Un mot sur les Théorèmes Généraux

Théorème général 1.
Soit $\bullet \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.
Les fonctions usuelles sont de classe $\mathscr{C}^\bullet$ partout où il est raisonnable qu'elles le soient.

Théorème général 2.
Soit $\bullet \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.
Tout cocktail (somme, produit, quotient, composée, combinaison linéaire) de fonctions de classe $\mathscr{C}^\bullet$ est de classe $\mathscr{C}^\bullet$ partout où cela est raisonnable.

Exemples d'application.

1/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sin(\mathrm{e}^x) + (x-1)\ln\left(1+x^2\right)}{\mathrm{ch}^3(x)+1}$. Selon les théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+\setminus\{1\},\ f(x) = \dfrac{\cos(2x-\pi)\sqrt{x}}{x-1}$. Selon les théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$.

Banque d'exercices — Corrigés

Exercice 1. — Calculer la dérivée n-ième de f, définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{ax+b}$

Selon les TG, les fonctions $g : x \longmapsto 2x-1$ et $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $f = gh$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f^{(n)} = (gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$$

En observant que $g^{(k)}$ est nulle dès que $k \geqslant 2$, on peut écrire : $f^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$

D'où, pour tout réel x :

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}(2x-1)a^n\mathrm{e}^{ax+b} + \binom{n}{1}2a^{n-1}\mathrm{e}^{ax+b} = (2x-1)a^n\mathrm{e}^{ax+b} + 2na^{n-1}\mathrm{e}^{ax+b} = \left[a(2x-1)+2n\right]a^{n-1}\mathrm{e}^{ax+b}$$

Exercice 2. — Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8}$

Soit x un réel strictement positif. On a :

$$\begin{aligned}
& x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8} \\
\iff & \mathrm{e}^{2x^2\ln(x)} = \mathrm{e}^{(12x-8)\ln\left(\sqrt{x}\right)} \\
\iff & \mathrm{e}^{2x^2\ln(x)} = \mathrm{e}^{(6x-4)\ln(x)} \\
\iff & \left(2x^2-6x+4\right)\ln(x) = 0 \\
\iff & \left(x^2-3x+2\right)\ln(x) = 0 \\
\iff & x^2-3x+2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 0
\end{aligned}$$

Or l'équation $x^2-3x+2=0$ possède exactement deux solutions : 1 et 2. Et l'équation $\ln(x)=0$ possède une unique solution, qui est 1.

Conclusion. $\left[x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8}\right] \iff [x=1 \text{ ou } x=2]$

Exercice 3. — Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2025^x}{x^{2025}}$

Soit x un réel strictement positif. On a :

$$\frac{2025^x}{x^{2025}} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln(2025)}}{\mathrm{e}^{2025\ln(x)}} = \mathrm{e}^{x\ln(2025)-2025\ln(x)} = \mathrm{e}^{x\left(\ln(2025)-2025\frac{\ln(x)}{x}\right)}$$

Selon le cours : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées). Il s'ensuit que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\ln(2025)-2025\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$.

Conclusion. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2025^x}{x^{2025}} = +\infty$

Exercice 4. — Etudier la fonction $f : x \longmapsto x^{1/x}$ *(ensemble de définition, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, limites aux bornes).*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^{1/x} = \mathrm{e}^{\ln(x)/x}$.

Selon les théorèmes généraux, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x>0$:

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Il s'ensuit que f' est du signe de $1-\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que f' est positive ou nulle sur $]0,\mathrm{e}]$, négative ou nulle sur $[\mathrm{e},+\infty[$.

On en déduit que f est croissante sur $]0,\mathrm{e}]$, décroissante sur $[\mathrm{e},+\infty[$.

Il s'ensuit que f admet un maximum en e, égal à $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$.

En outre : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$ (propriétés usuelles des limites) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ (croissances comparées)

Exercice 5. — **(Racines carrées dans $\mathbb{C}$, méthode 1).** Déterminer les racines carrées de $\omega_1 = 4 + 4\mathrm{i}$.

Selon le cours : $|\omega_1| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 2^{5/2}$

Il est par ailleurs immédiat que : $\arg(\omega_1) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (un petit dessin suffira)

On en déduit que : $\omega_1 = 2^{5/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

Conclusion. Les deux racines carrées de ω_1 sont $\pm 2^{5/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}$

Exercice 6. — **(Racines carrées dans $\mathbb{C}$, méthode 2).** Déterminer les racines carrées de $\omega_2 = 2 + 4\mathrm{i}$.

Soit $z = a + ib$ un complexe (avec a et b réels). On a :

$$z^2 = 2 + 4\mathrm{i} \Longleftrightarrow a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab = 2 + 4\mathrm{i} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 & \text{(identification des parties réelles)} \\ 2ab = 4 & \text{(identification des parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = 2\sqrt{5} & \text{(identification des modules)} \end{cases}$$

On déduit des première et troisième lignes que $a = \pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$ et $b = \pm\sqrt{\sqrt{5}-1}$. La seconde ($2ab = 4$) signifie que a et b sont de même signe, et permettent de conclure.

Conclusion. Les racines carrées de $2 + 4\mathrm{i}$ sont $\sqrt{1+\sqrt{5}} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{5}-1}$ et $-\sqrt{1+\sqrt{5}} - \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{5}-1}$.

Exercice 7. — **(Somme des racines n-èmes de l'unité, très classique).**
Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On a :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^k = \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}} = \frac{1-1}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}} = 0$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \ \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$