

## COLLE 6 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — **Propriété** : la composée de deux applications injectives est injective.

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. Supposons  $f$  et  $g$  injectives.

Soient  $x$  et  $x'$  deux éléments de  $E$ . Alors :

$$[(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')] \implies [g(f(x)) = g(f(x'))] \xRightarrow{g \text{ injective}} [f(x) = f(x')] \xRightarrow{f \text{ injective}} [x = x']$$

En résumé :  $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x'$ . Ce qui signifie que  $g \circ f$  est injective.

**Conclusion** : si  $f$  et  $g$  sont injectives, alors  $g \circ f$  est injective.

QUESTION DE COURS N°2 — **Propriété** : la composée de deux applications surjectives est surjective.

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. Supposons  $f$  et  $g$  surjectives.

Soit  $z \in G$ .

Alors, l'application  $g$  étant surjective :  $\exists y \in F, g(y) = z$ .

Et puisque  $f$  est surjective :  $\exists x \in E, f(x) = y$ .

En exploitant ces deux relations, on obtient :  $g(f(x)) = z$ .

On a ainsi établi que :  $\forall z \in G, \exists x \in E, (g \circ f)(x) = z$ . Ce qui signifie que  $g \circ f$  est surjective.

**Conclusion** : si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective.

**Corollaire immédiat des questions de cours 1 et 2.** Si  $f$  et  $g$  sont bijectives, alors  $g \circ f$  est bijective.

QUESTION DE COURS N°3 — **Théorème (implication 1)**. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles, et  $f \in F^E$ .

$f$  est bijective  $\implies$  il existe une application  $g : F \rightarrow E$  telle que :  $f \circ g = \text{id}_F$  et  $g \circ f = \text{id}_E$

Supposons  $f$  bijective.

Puisque  $f$  est bijective, tout élément  $y$  de  $F$  admet un unique antécédent dans  $E$  par  $f$ , que nous noterons  $x_y$ .

On définit alors une application  $g : F \rightarrow E$  en posant pour tout élément  $y$  de  $F$  :  $g(y) = x_y$  (on associe à  $y$  son unique antécédent par  $f$ ).

Vérifions que  $f \circ g = \text{id}_F$  et  $g \circ f = \text{id}_E$ .

Pour la première égalité : soit  $y \in F$ . Alors  $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y$  (puisque  $x_y$  est l'unique antécédent de  $y$  par  $f$ ). Ainsi :  $f \circ g = \text{id}_F$ .

Passons à la seconde égalité : soit  $x \in E$ . Alors  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$  (puisque,  $f$  étant bijective,  $x$  est l'unique antécédent de  $f(x)$  par  $f$ ). Ainsi :  $g \circ f = \text{id}_E$ .

**Conclusion** : si  $f$  est bijective, alors il existe une application  $g : F \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = \text{id}_F$  et  $g \circ f = \text{id}_E$ .

QUESTION DE COURS N°4 — **Théorème (implication 2)**. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles, et  $f \in F^E$ .

[ Il existe une application  $g : F \rightarrow E$  telle que :  $f \circ g = \text{id}_F$  et  $g \circ f = \text{id}_E$  ]  $\implies f$  est bijective

Supposons qu'il existe une application  $g : F \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = \text{id}_F$  et  $g \circ f = \text{id}_E$ .

Soient  $x$  et  $x'$  deux éléments de  $E$  tels que :  $f(x) = f(x')$ . On a alors :  $g(f(x)) = g(f(x'))$  et puisque  $g \circ f = \text{id}_E$ , on en déduit  $x = x'$ . Ce qui prouve que  $f$  est injective.

Soit  $y$  un élément de  $F$ . On a :  $y = \text{id}_F(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Donc  $y$  admet un antécédent par  $f$  (qui est  $g(y)$ ). Puisque  $y$  est un élément arbitraire de  $F$  dans ce petit raisonnement, on en déduit que  $f$  est surjective.

L'application  $f$  étant injective et surjective, elle est bijective.

**Conclusion** : s'il existe une application  $g : F \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = \text{id}_F$  et  $g \circ f = \text{id}_E$ , alors  $f$  est bijective.

**Synthèse des questions de cours 3 et 4.**

L'application  $f$  est bijective SSI il existe une application  $g : F \rightarrow E$  telle que

$$f \circ g = \text{id}_F \text{ et } g \circ f = \text{id}_E$$

QUESTION DE COURS N°5 — **Propriété (“unicité de la réciproque”)**. Si  $f \in F^E$  est bijective, alors il existe une unique application  $g \in E^F$  telle que  $f \circ g = \text{id}_F$  et  $g \circ f = \text{id}_E$ .

Si  $f \in F^E$  est bijective, alors il existe une application  $g_1 \in E^F$  telle que  $f \circ g_1 = \text{id}_F$  et  $g_1 \circ f = \text{id}_E$ .\*

Montrons son unicité. A cette fin, supposons qu'il existe  $g_1$  et  $g_2 \in E^F$  telles que  $f \circ g_1 = \text{id}_F = f \circ g_2$  et  $g_1 \circ f = \text{id}_E = g_2 \circ f$ . Alors :

$$(g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) \quad (\text{associativité de la composition})$$

$$\iff \text{id}_E \circ g_2 = g_1 \circ \text{id}_F \quad (\text{par hypothèse})$$

$$\iff g_2 = g_1 \quad (\text{“l'identité est le neutre pour la composition”})$$

Ce qui prouve l'unicité de  $g_1$ . **Conclusion.** Si  $f \in F^E$  est bijective, alors il existe une application  $g_1 \in E^F$  telle que  $f \circ g_1 = \text{id}_F$  et  $g_1 \circ f = \text{id}_E$

QUESTION DE COURS N°6 — **Propriété.** Soit  $E$  un ensemble. Notons  $\text{Bij}(E)$  l'ensemble des bijections de  $E$  dans  $E$ . Avec ces notations,  $(\text{Bij}(E), \circ)$  est un groupe.

- ① La composition des applications est associative (propriété générale du cours).
- ② Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\text{Bij}(E)$ , alors  $(g \circ f) \in \text{Bij}(E)$ , puisque la composée de deux bijections est encore une bijection (corollaire des questions de cours 1 et 2).
- ③ L'application  $\text{id}_E$  est une bijection de  $E$  dans  $E$ , car c'est une involution de  $E$ .
- ④ Si  $f$  est dans  $\text{Bij}(E)$ , alors  $f$  est une bijection de  $E$  dans  $E$ , et admet une bijection réciproque qui est également une bijection de  $E$  dans  $E$ . Ainsi :  $f^{-1} \in \text{Bij}(E)$ . Et il est connu que :  $f^{-1} \circ f = \text{id}_E = f \circ f^{-1}$ .

**Bilan.** L'ensemble  $\text{Bij}(E)$  est stable par composition (selon ②) ; l'identité de  $E$  est l'élément neutre pour la composition dans  $\text{Bij}(E)$  (selon ③) ; et tout élément  $f$  de  $\text{Bij}(E)$  admet un inverse (sa bijection réciproque  $f^{-1}$ ) pour la composition dans  $\text{Bij}(E)$  (selon ④). En outre, la composition est associative (selon ①).

**Conclusion.** Pour les 4 raisons évoquées dans le paragraphe précédent,  $(\text{Bij}(E), \circ)$  est un groupe.

**Remarque.** Plus tard cette année, nous appellerons **permutation** de  $E$  une bijection de  $E$  dans  $E$ , et nous étudierons en détail le groupe des permutations de  $E$  (le groupe  $(\text{Bij}(E), \circ)$  de cette question de cours). Ce groupe interviendra notamment dans la définition du déterminant d'une matrice carrée de taille quelconque, au second semestre.

\*. Selon la question de cours 3.

---

# BANQUE D'EXERCICES

---

**EXERCICE 1.** — (Une “pseudo-réciproque”, 1). Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois ensembles, et soient  $f \in F^E$  et  $g \in G^F$ .

Montrer que :  $[g \circ f \text{ injective}] \implies [f \text{ injective}]$

**EXERCICE 2.** — (Une “pseudo-réciproque”, 2). Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois ensembles, et soient  $f \in F^E$  et  $g \in G^F$ .

Montrer que :  $[g \circ f \text{ surjective}] \implies [g \text{ surjective}]$

**EXERCICE 3.** — (In-ra-ta-ble !) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x - 3y, 2x + y) \end{aligned}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque  $F^{-1}$ .

**EXERCICE 4.** — (Equation et racines de l'unité) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5$ , en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

**EXERCICE 5.** — (Une propriété de  $\mathbb{U}_3$ ) On rappelle que  $j = e^{2i\pi/3}$ . Calculer  $(1 + j)^{600}$ .

**EXERCICE 6.** — (Rotation dans le plan complexe). Soient  $\theta$  un réel, et  $b$  un complexe. On considère l'application  $R$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie en posant :

$$\begin{aligned} R : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{i\theta}z + b \end{aligned}$$

Montrer que l'application  $R$  est une bijection, et donner l'expression de sa bijection réciproque.

## BANQUE D'EXERCICES — CORRIGÉS

**EXERCICE 1.** — (Une “pseudo-réciproque”, 1). Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois ensembles, et soient  $f \in F^E$  et  $g \in G^F$ .

Montrer que :

$$[g \circ f \text{ injective}] \implies [f \text{ injective}]$$

Supposons  $g \circ f$  injective.

Soient  $x$  et  $x'$  deux éléments de  $E$ . Supposons que  $f(x) = f(x')$ . Alors :  $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ . Puisque  $g \circ f$  est injective par hypothèse, on en déduit que  $x = x'$ .

Finalement :  $\forall (x, x') \in E^2, [f(x) = f(x')] \implies [x = x']$ . Ce qui signifie que  $f$  est injective.

**Conclusion.**  $[g \circ f \text{ injective}] \implies [f \text{ injective}]$ .

**EXERCICE 2.** — (Une “pseudo-réciproque”, 2). Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois ensembles, et soient  $f \in F^E$  et  $g \in G^F$ .

Montrer que :

$$[g \circ f \text{ surjective}] \implies [g \text{ surjective}]$$

Supposons  $g \circ f$  surjective.

Soit  $z \in G$ . Puisque  $g \circ f$  est surjective par hypothèse, il existe un élément  $x$  de  $E$  tel que :  $g(f(x)) = z$ . D'où  $z \in g(F)$ , ce qui signifie que  $g$  est surjective.

Ainsi :  $[g \circ f \text{ surjective}] \implies [g \text{ surjective}]$ .

**EXERCICE 3.** — (In-ra-ta-ble!) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x - 3y, 2x + y) \end{aligned}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque  $F^{-1}$ .

Soit  $(X, Y)$  un élément quelconque de  $\mathbb{R}^2$ . Résolvons l'équation  $F(x, y) = (X, Y)$ .

$$\text{On a : } F(x, y) = (X, Y) \iff \begin{cases} 4x - 3y = X & (L_1) \\ 2x + y = Y & (L_2) \end{cases}$$

$$\text{Alors : } 2(L_2) - (L_1) \iff 5y = 2Y - X \iff y = \frac{2Y - X}{5}.$$

$$\text{Et : } (L_1) + 3(L_2) \iff 10x = X + 3Y \iff x = \frac{X + 3Y}{10}.$$

$$\text{En d'autres termes : } F(x, y) = (X, Y) \iff (x, y) = \left( \frac{X + 3Y}{10}, \frac{2Y - X}{5} \right).$$

On a ainsi établi que tout élément  $(X, Y)$  de  $\mathbb{R}^2$  admet un unique antécédent par  $F$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Conclusion.** L'application  $F$  est bijective, et sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned} F^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) &\longmapsto \left( \frac{X + 3Y}{10}, \frac{2Y - X}{5} \right) \end{aligned}$$

**EXERCICE 4. — (Equation et racines de l'unité)** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5$ , en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

Soit  $z$  un complexe. On peut supposer dans les calculs qui suivent que  $(1 - iz) \neq 0$ , càd que  $z \neq -i$ , car  $-i$  n'est pas solution de (E) (c'est une vérification immédiate). D'où :

$$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 \iff \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^5 = 1 \iff \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \in \mathbb{U}_5 \iff \exists k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{2ik\pi/5}$$

Soit  $k$  un entier dans  $\llbracket 0; 4 \rrbracket$ . On a :

$$\begin{aligned} \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{2ik\pi/5} &\iff 1 + iz = e^{2ik\pi/5} (1 - iz) \iff iz \left(1 + e^{2ik\pi/5}\right) = e^{2ik\pi/5} - 1 \iff iz = \frac{e^{2ik\pi/5} - 1}{e^{2ik\pi/5} + 1} \\ &\iff iz = \frac{e^{ik\pi/5} (e^{ik\pi/5} - e^{-ik\pi/5})}{e^{ik\pi/5} (e^{ik\pi/5} + e^{-ik\pi/5})} \iff iz = \frac{2i \sin(k\pi/5)}{2 \cos(k\pi/5)} \iff z = \tan(k\pi/5) \end{aligned}$$

**Conclusion.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a :

$$\left[(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5\right] \iff [\exists k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, z = \tan(k\pi/5)]$$

**EXERCICE 5. — (Une propriété de  $\mathbb{U}_3$ )** On rappelle que  $j = e^{2i\pi/3}$ . Calculer  $(1 + j)^{600}$ .

Selon le cours :  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_3} \omega = 0$ . En particulier :  $1 + j + j^2 = 0$  (puisque :  $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ ).

Il s'ensuit que  $1 + j = -j^2$ . Donc :

$$(1 + j)^{600} = (-j^2)^{600} = j^{1200} = (j^3)^{400} = 1^{400} = 1$$

**Conclusion.**  $(1 + j)^{600} = 1$

**EXERCICE 6. — (Rotation dans le plan complexe).** Soient  $\theta$  un réel, et  $b$  un complexe.

On considère l'application  $R$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie en posant :

$$\begin{aligned} R : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{i\theta} z + b \end{aligned}$$

Montrer que l'application  $R$  est une bijection, et donner l'expression de sa bijection réciproque.

Soit  $(z, Z) \in \mathbb{C}^2$ . On a :

$$z \text{ est un antécédent de } Z \text{ par } R \iff R(z) = Z \iff e^{i\theta} z + b = Z \iff z = \frac{Z - b}{e^{i\theta}}$$

On a ainsi établi que tout nombre complexe  $Z$  admet un unique antécédent par  $R$ , qui est  $e^{-i\theta} (Z - b)$ .

**Conclusion.** On déduit que  $R$  est bijective, et que sa bijection réciproque est  $R^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$Z \longmapsto e^{-i\theta} (Z - b)$$