

EXERCICES 6 – APPLICATIONS

GÉNÉRALITÉS : APPLICATIONS INJECTIVES, SURJECTIVES, BIJECTIVES

EXERCICE 1. — On considère l'application Jour : $E = \{\text{Dates de l'année 2025}\} \longrightarrow F = \{\text{lundi, mardi, } \dots, \text{dimanche}\}$ qui à toute date de l'année 2025 associe le jour de la semaine correspondant. L'application Jour est-elle injective, surjective, bijective ?

EXERCICE 2. — L'application $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui à tout complexe z associe son module est-elle injective, surjective, bijective ?

EXERCICE 3. — On considère l'application len : $E = \{\text{chaînes de caractères}\} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à toute chaîne de caractères associe sa longueur. L'application len est-elle injective, surjective, bijective ?

EXERCICE 4. — Soient E, F et G les ensembles suivants : $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{A, B, C, D\}$ et $G = \{+, *\}$.

1/ Construire une application $f_1 : E \longrightarrow F$ injective ; puis une application $f_2 : E \longrightarrow F$ non-injective. Peut-on construire une application surjective de E dans F ?

2/ Construire une application $g_1 : F \longrightarrow G$ surjective ; puis une application $g_2 : F \longrightarrow G$ non-surjective. Peut-on construire une application injective de F dans G ?

EXERCICE 5. — Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels. On considère l'application $D : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $D(P) = P'$. Déterminer si l'application D est injective, surjective, bijective.

EXERCICE 6. — Soit E un ensemble quelconque. On considère l'application Comp : $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ qui à toute partie A de E associe son complémentaire $E \setminus A$. Etablir que l'application Comp est bijective.

EXERCICE 7. — Pour chacune des applications ci-dessous, déterminer si elle est injective, surjective, bijective.

1/ $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ $n \longmapsto n + 1$	3/ $f_3 : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \cos(x)$	5/ $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto x^3$
2/ $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $n \longmapsto 2n + 1$	4/ $f_4 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto \bar{z}$	6/ $f_6 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto z^3$

EXERCICE 8. — Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \longmapsto x + y$	4) $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y) \longmapsto (2x + 3y, x - 2y)$
2) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y) \longmapsto (x + y, y)$	5) $f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, y + z, z)$
3) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$	6) $f_6 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \longmapsto (y + z, x + z, x + y)$

EXERCICE 9. — **(Similitudes directes)** Soient a et b deux nombres complexes, a non nul. On considère l'application $S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ d'écriture complexe $z \longmapsto az + b$.

1/ Etablir que S est bijective. 2/ A quelle(s) condition(s) sur a et b l'application S est-elle une involution ?

EXERCICE 10. — L'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(u, v) \longmapsto (3uv, u^3 + v^3)$$

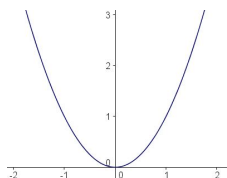
est-elle injective, surjective, bijective ?

FONCTIONS NUMÉRIQUES INJECTIVES, SURJECTIVES, BIJECTIVES

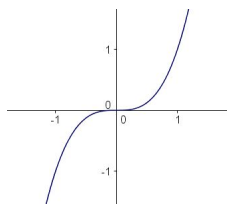
EXERCICE 11. — Dans chacun des exemples ci-dessous, on donne une fonction $f : E \longrightarrow F$, avec E et F des parties de $\mathbb{R}$. Dans chaque cas :

- déterminer si f est injective, surjective, bijective ;
- lorsque c'est possible, modifier l'ensemble de départ E et l'ensemble d'arrivée F pour obtenir une application bijective.

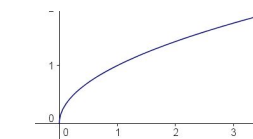
1) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2$



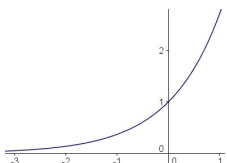
2) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^3$



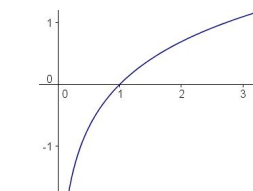
3) $f_3 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \sqrt{x}$



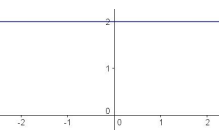
4) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto e^x$



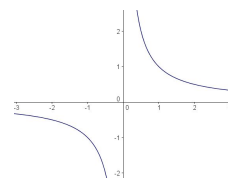
5) $f_5 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \ln x$



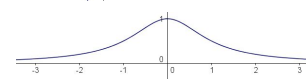
6) $f_6 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto 2$



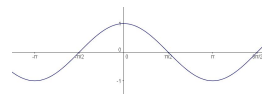
7) $f_7 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto 1/x$



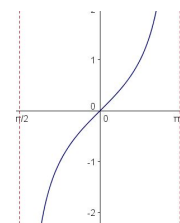
8) $f_8 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \longmapsto 1/(x^2 + 1)$



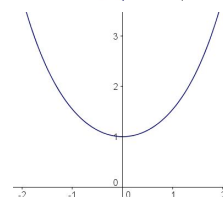
9) $f_9 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \cos(x)$



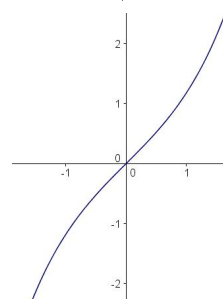
10) $f_{10} :]-\pi/2; \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \tan(x)$



11) $f_{11} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \text{ch}(x)$



12) $f_{12} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \text{sh}(x)$



IMAGES DIRECTES, IMAGES RÉCIPROQUES

Définitions. Soit $f \in F^E$.

➤ L'**image** de f , notée $\text{Im}(f)$ ou $f(E)$ est la partie de F suivante :

$$f(E) = \{f(x), x \in E\} \text{ ou } f(E) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

➤ Plus généralement, lorsque A est une partie de E , l'**image (directe) de A par f** , notée $f(A)$ est la partie de F suivante : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ ou $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$.

➤ Lorsque B est une partie de F , l'**image réciproque de B par f** , notée $f^{-1}(B)$ est la partie de E suivante : $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

EXERCICE 12. — Déterminer l'image directe de $[e; +\infty[$ par la fonction $\ln$; puis celle de $[0; \pi]$ par la fonction sinus.

EXERCICE 13. — Déterminer l'image réciproque de $[-1; 9]$ par la fonction carrée ; puis celle de $[-1; 1]$ par $\cos$.

EXERCICE 14. — Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F .

- 1) On considère A et B deux parties de E . Montrer que : $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$
- 2) On considère A' et B' deux parties de F . Montrer que : $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

EXERCICE 15. — Mêmes notations que dans l'exercice précédent.

- 1) Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- 2) Montrer que : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS INJECTIVES, SURJECTIVES, BIJECTIVES

EXERCICE 16. — **Exercice classique** Soient E, F et G trois ensembles ; $f \in F^E$ et $g \in G^F$ deux applications. Montrer que :

- | | | |
|--|------------------|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $[(g \circ f) \text{ injective}] \implies [f \text{ injective}] ;$ 2) $[(g \circ f) \text{ surjective}] \implies [g \text{ surjective}] ;$ | $\left \right.$ | <ol style="list-style-type: none"> 3) $[(g \circ f) \text{ surjective} \wedge g \text{ injective}] \implies [f \text{ surjective}] ;$ 4) $[(g \circ f) \text{ injective} \wedge f \text{ surjective}] \implies [g \text{ injective}] .$ |
|--|------------------|---|

EXERCICE 17. — Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ les deux applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \quad \text{et} \quad g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

- 1) Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f et de g .
- 2) Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Etudier leur injectivité, surjectivité, bijectivité.

EXERCICE 18. — Soient E un ensemble, et $f \in E^E$ une application. On suppose que $f \circ f \circ f = \text{id}_E$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

EXERCICE 19. — Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

EXERCICE 20. — Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que :

$$[f \text{ injective}] \iff [f \text{ surjective}]$$

EXTRAITS DE DS

EXERCICE 21. — **(Cadeau)** On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs, c'est à dire :

$$2\mathbb{N} = \{2k / k \in \mathbb{N}\}$$

Etablir que $2\mathbb{N}$ est dénombrable.

EXERCICE 22. — **(In-ra-ta-ble !)** Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x - 3y, 2x + y) \end{aligned}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque F^{-1} .

EXERCICE 23. — **(Un peu technique)** Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Montrer que f est bijective si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$$

EXERCICE 24. — (Application directe du cours, sur les complexes et les applications) On considère l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto z^3 - 1$$

- 1/ L'application f est-elle injective ?
- 2/ Justifier que l'application f est surjective.
- 3/ Quels sont les antécédents de 7 par f ?

EXERCICE 25. — (Numérotation des nombres rationnels)* Un ensemble E est dit **dénombrable** lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$, c'est à dire s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E ; cette bijection permet de "dénombrer" les éléments de E , ce qui justifie a posteriori la terminologie. On a par exemple déjà établi en cours que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Ce résultat pourra être utilisé au besoin ici, sans qu'il soit nécessaire de le redémontrer.

L'objectif principal de cet exercice est d'aller plus loin, et de prouver que **l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable**. Cette preuve comporte des étapes intermédiaires (notamment : établir que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable), et requiert l'utilisation du théorème de Cantor-Bernstein.

Partie I — Démarrage en douceur

- 1/ Notons $E_1 = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que E_1 est dénombrable.
- 2/ Notons E_2 l'ensemble des entiers naturels pairs, soit : $E = \{2k / k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que E_2 est dénombrable.

Partie II — Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$, dénombrabilité de $\mathbb{Z}^2$

On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (p, q) &\longmapsto 2^p (2q + 1) \end{aligned}$$

- 3/ Montrer que φ est bien définie et qu'elle est injective.
- 4/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un entier N_0 tel que 2^{N_0} divise n , et 2^{N_0+1} ne divise pas n .
- 5/ En utilisant la question précédente, établir que φ est surjective.
- 6/ Conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable ; puis que $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable.

Partie III — Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

- 7/ Construire une application injective ("simple") de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.
- 8/ On appelle **représentant irréductible** d'un nombre rationnel non nul r l'unique fraction irréductible p/q égale à r avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.[†] Nous conviendrons que le représentant irréductible de 0 est 0/1.
 - a) Justifier brièvement que l'application $\psi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ qui à $r \in \mathbb{Q}$ associe le couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est injective. Est-elle surjective ?
 - b) Construire une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

On peut alors conclure en utilisant l'énoncé ci-dessous.[‡]

THÉORÈME (CANTOR-BERNSTEIN) — Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E , alors il existe une bijection entre E et F .

*. Sans que ce soit complètement indispensable, il est préférable d'aborder ce problème avec de bonnes connaissances d'arithmétique, notamment pour la partie II.

†. Par exemple, le représentant irréductible de 10/15 est 2/3 ; celui de $-9/12$ est $(-3)/4$.

‡. Le théorème de Cantor-Bernstein peut être prouvé au niveau Sup, et c'était d'ailleurs l'objet d'un problème posé en DS en 2016 ; cette preuve est toutefois assez technique, et peu intuitive.