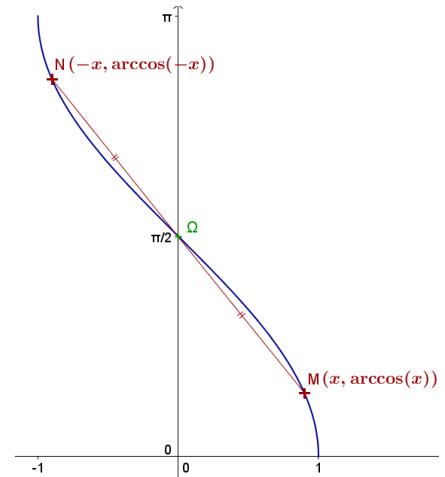


# EXERCICES 7 – APPLICATIONS & FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

**EXERCICE 1.** — Montrer que :  $\forall x \in [-1; 1], \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

**Interprétation graphique.** Le point de coordonnées  $(0, \frac{\pi}{2})$  est le centre de symétrie de la courbe représentative de  $\arccos$  (voir ci-contre).

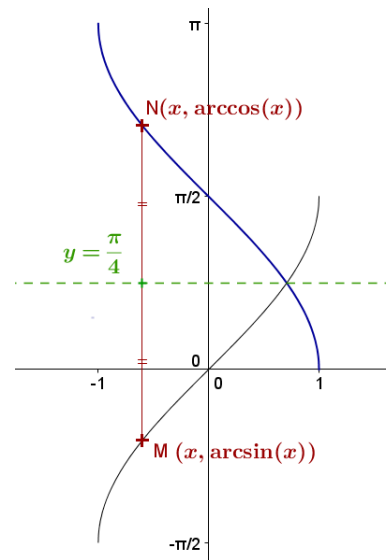


**EXERCICE 2.** — Prouver que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

Et que peut-on dire de  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  lorsque  $x < 0$  ?

**EXERCICE 3.** — Montrer que :  $\forall x \in [-1; 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

**Interprétation graphique.** Les courbes représentatives de  $\arccos$  et de  $\arcsin$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = \frac{\pi}{4}$  (voir ci-contre).



**EXERCICE 4.** — Etablir que :  $\forall x \in [0, 1], \arcsin(x) \geq x$ .

**Interprétation graphique.** La courbe représentative de  $\arcsin$  est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation  $y = x$ ) sur  $[0, 1]$ .

**EXERCICE 5.** — Etablir que :  $\forall x \geq 0, \arctan(x) \leq x$ .

**Interprétation graphique.** La courbe représentative de  $\arctan$  est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation  $y = x$ ) sur  $\mathbb{R}_+$ .

**EXERCICE 6.** — Simplifier les expressions suivantes :

|                       |                        |                        |                        |
|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1/ $\sin(\arccos(x))$ | 3/ $\cos(2\arccos(x))$ | 5/ $\sin(2\arccos(x))$ | 7/ $\sin(2\arctan(x))$ |
| 2/ $\cos(\arcsin(x))$ | 4/ $\cos(2\arcsin(x))$ | 6/ $\cos(2\arctan(x))$ | 8/ $\tan(2\arcsin(x))$ |

**EXERCICE 7.** — Etablir que :  $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

**EXERCICE 8.** — **FORMULE DE MACHIN.**\*

1/ Calculer  $A = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ .

2/ Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $0 < x < y$ . Montrer que :  $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

3/ Montrer que :  $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

\*. John Machin fut un mathématicien anglais du 18ème siècle (1680-1751), notamment connu pour avoir démontré en 1706 la formule que l'on vous demande d'établir dans cet exercice, qui lui a permis d'obtenir une remarquable (pour l'époque) approximation du nombre  $\pi$  (100 décimales).

**EXTRAITS DE DS**

**EXERCICE 9.** — **(CA-DEAU !).** On définit une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  en posant :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x^3)$ . Etablir que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.

**EXERCICE 10.** — **(TANGENTE ET ARCTANGENTE).**

1/ Rappeler la formule de soustraction pour la tangente.

2/ Etablir que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$

3/ En déduire la valeur de  $S_N = \sum_{n=0}^N \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$  en fonction de  $N$  ; puis la limite  $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ .

**EXERCICE 11.** — **(COSINUS ET ARCCOSINUS).**

1/ Rappeler la formule d'addition pour le cosinus.

2/ Etablir que pour tout entier naturel non nul  $n$  on a :

$$\arccos\left(\frac{1}{n}\right) + \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{(n^2-1)n(n+2)}}{n(n+1)}\right)$$

**EXERCICE 12.** — **(ARCSINUS).**

1/ On pose  $A(x) = \cos(\arcsin(x))$ . Pour quelles valeurs de  $x$  l'expression  $A(x)$  est-elle définie ? On note  $D$  l'ensemble de ces valeurs. Simplifier  $A(x)$  pour tout réel  $x$  de  $D$ .

2/ Etablir que :

$$\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}\right)$$

**EXERCICE 13.** — **(UNE FONCTION BIJECTIVE).** On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  en posant pour tout réel  $x$  de  $I$  :  $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ .

1/ Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $I$  dans un intervalle  $J$  que l'on précisera. On note  $f^{-1}$  sa bijection réciproque.

2/ Déterminer le sens de variation de  $f^{-1}$ .

3/ Justifier que pour tout  $x \in J$ , 
$$\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$$

4/ Démontrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J \setminus \{1\}$  et établir que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

**EXERCICE 14.** — **(EQUATION).** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$(E) : \quad 1 + \tan(x) + \tan^2(x) + \tan^3(x) = 0$$

Indication : mais quelles sont donc les racines du polynôme  $1 + X + X^2 + X^3$  ?

**EXERCICE 15. — (DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE ARCTAN, PROBLÈME 1 NOVEMBRE 2023).**

1/ **Question préliminaire.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$(x - i)^7 - (x + i)^7 = 0$$

**PARTIE 1 - UNE RELATION DE RÉCURRENCE**

2/ Justifier brièvement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2) \arctan'(x) = 1$$

3/ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . À l'aide de la question précédente et de la formule de Leibniz, établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2) \arctan^{(n+2)}(x) + 2(n+1)x \arctan^{(n+1)}(x) + n(n+1) \arctan^{(n)}(x) = 0$$

Cette relation de récurrence permet de déduire l'expression de  $\arctan^{(n+2)}$  à partir de celles de  $\arctan^{(n+1)}$  et de  $\arctan^{(n)}$ . Puisque l'on connaît  $\arctan^{(0)}$  et  $\arctan^{(1)}$ , on peut donc en déduire  $\arctan^{(2)}$  ; puis on peut obtenir  $\arctan^{(3)}$  à partir de  $\arctan^{(1)}$  et  $\arctan^{(2)}$  ; puis on peut obtenir  $\arctan^{(4)}$ ...

C'est un joli résultat, mais le calcul de  $\arctan^{(2023)}$  par cette méthode promet d'être un peu laborieux ! L'objectif de la seconde partie est donc d'établir des formules explicites pour les dérivées successives de la fonction arctangente.

**PARTIE 2 - FORMULES EXPLICITES DES DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE ARCTAN**

4/ Soit  $a$  un nombre réel. On définit une fonction  $g$  en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}, \quad g(x) = \frac{1}{x+a}$$

Etablir par récurrence sur  $n$  que pour tout réel  $x \neq -a$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

On **admettra** par la suite que cette formule reste valable pour un nombre **complexe**  $a$ .

On **admettra** également que pour tout réel  $x$ , on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right)$$

5/ A l'aide de ce qui précède, établir que pour tout  $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ , on a :

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n! i}{2(1+x^2)^{n+1}} P_{n+1}(x) \quad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$$

6/ “Le cas impair” : calcul de  $\arctan^{(2n+1)}$ . Soit  $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ .

Avec les notations de la question précédente, on a :  $P_{2n+1}(x) = (x-i)^{2n+1} - (x+i)^{2n+1}$

a/ Etablir que :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \left( (-1)^k - 1 \right) x^{2n+1-k}$$

b/ Dédurre de la question précédente que :

$$P_{2n+1}(x) = -2 \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} x^{2(n-p)}$$

c/ En déduire que :

$$\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} x^{2(n-p)}$$

d/ **Application.** En utilisant la formule de la question précédente, vérifier que :

$$\arctan^{(7)}(x) = \frac{6!}{(1+x^2)^7} (7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1)$$

e/ Justifier que l'équation  $7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0$  possède exactement 6 solutions dans  $\mathbb{R}$ , qui sont les réels  $\cotan\left(-\frac{k\pi}{7}\right)$  avec  $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ .

On rappelle que  $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$  (pour tout réel  $x \neq 0 \pmod{\pi}$ ).

7/ “Le cas pair” : calcul de  $\arctan^{(2n)}$ . Soit  $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$ .

Etablir que :

$$\arctan^{(2n)}(x) = -\frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^{2n}} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{2n}{2p+1} x^{2(n-p)-1}$$