Colle 7 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Pur cours** : tout sur arccos, arcsin ou arctan : définition, sens de variation, dérivabilité, dérivée, DL1 en 0, tableau de variation, valeurs aux bornes de l'ensemble de définition, allure de la courbe.

Question de cours n^{0}2 — **Propriété** : si $f : I \longrightarrow f(I)$ est strictement croissante (*resp.* décroissante) et bijective, alors f^{-1} est strictement croissante (*resp.* décroissante).

On suppose que $f : I \longrightarrow f(I)$ est une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles, bijective et strictement croissante. Montrons que f^{-1} est strictement croissante.

Soient a et b deux réels de $f(I)$ tels que $a < b$.

Supposons $f^{-1}(a) \geqslant f^{-1}(b) \quad (\spadesuit)$.
Alors, f étant croissante, on en déduit que : $f\left(f^{-1}(a)\right) \geqslant f\left(f^{-1}(b)\right)$, soit $a \geqslant b$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale ($a < b$). Ceci implique que l'assertion ($\spadesuit$) est fausse.

Par suite $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$. En résumé, on a établi l'implication : $\forall (a,b) \in \left(f(I)\right)^2,\ (a < b) \Longrightarrow \left(f^{-1}(a) < f^{-1}(b)\right)$.

Conclusion : sous les hypothèses de l'énoncé, si f est strictement croissante, alors f^{-1} est strictement croissante.

La propriété "si f est bijective et strictement décroissante, alors f^{-1} est strictement décroissante" se déduit du raisonnement précédent, en modifiant un seul signe. . .

Question de cours n^{0}3 — **Propriété**. Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et : $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$ **ET**
Application : formule donnant la dérivée de arctan sur $\mathbb{R}$.

Prouvons la propriété. Soient f, I et a comme dans l'énoncé. La fonction $f^{-1} \circ f$ est dérivable sur I, puisque pour tout réel $x \in I$ on a : $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$. Il s'ensuit en particulier que : $\left(f^{-1} \circ f\right)'(a) = 1$.

Par ailleurs, en admettant la dérivablité de f^{-1} en $f(a)$, on a : $\left(f^{-1} \circ f\right)'(a) = \left(f^{-1}\right)'(f(a)) \times f'(a)$, en vertu de la propriété donnant la dérivée d'une composée de fonctions dérivables.

On déduit des deux identités précédentes que : $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) \times f'(a) = 1$, d'où : $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}}$ (car $f'(a) \neq 0$).

Application. La fonction tangente réalise une bijection de $]-\pi/2;\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$, et sa réciproque est la fonction arctan.

Soit x un réel quelconque. Il existe un unique réel $y \in\ ]-\pi/2;\pi/2[$ tel que $\tan(y) = x$. Puisque la fonction tangente est dérivable sur $]-\pi/2;\pi/2[$, et que sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle *, on déduit de la propriété précédente que la fonction arctangente est dérivable en $\tan(y)$ et :

$$\arctan'(\tan(y)) = \frac{1}{\tan'(y)} \quad \text{soit :} \quad \arctan'(\tan(y)) = \frac{1}{1+\tan^2(y)} \quad \text{soit encore :} \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Le raisonnement précédent étant valide pour un réel x arbitraire, on a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

$*$. Pour mémoire, elle est strictement positive puisque $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$.

Question de cours n^{0}4 — **Propriété.** Si $f : I \longrightarrow f(I)$ est impaire et bijective, alors f^{-1} est impaire.

On suppose que $f : I \longrightarrow f(I)$ est une bijection impaire (en particulier, I est symétrique par rapport à zéro).

➤ Pour établir l'imparité de f^{-1}, on commence par établir que $f(I)$ est symétrique par rapport à zéro (ou centré en zéro).

Si y est dans $f(I)$, alors il existe un élément x de I tel que : $y = f(x)$. D'où $-y = -f(x) = f(-x)$ (f étant impaire). Or $(-x) \in I$, puisque $x \in I$ et I est supposé symétrique par rapport à zéro. Donc $-y \in f(I)$.

En résumé, on a établi l'implication : $(y \in f(I)) \Longrightarrow (-y \in f(I))$. D'où $\boxed{f(I) \text{ est symétrique par rapport à zéro}}$.

➤ Ceci fait, il ne reste plus qu'à vérifier que : $\forall\, y \in f(I),\ f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

Soit $y \in f(I)$. D'une part : $f\left(f^{-1}(-y)\right) = -y$ (♠) puisque $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(I)}$.

D'autre part : $f\left(-f^{-1}(y)\right) = -f\left(f^{-1}(y)\right)$ (f étant impaire). D'où : $f\left(-f^{-1}(y)\right) = -y$ (♣).

D'après (♠) et (♣) : $f\left(-f^{-1}(y)\right) = f\left(f^{-1}(-y)\right)$.

Puisque f est injective (car bijective), on en déduit que : $-f^{-1}(y) = f^{-1}(-y)$.

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé, si f est impaire, alors f^{-1} est impaire.

Question de cours n^{0}5 — **Exercice classique**. Etablir que $\forall\, x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Posons : $\forall\, x \in [-1,1]\,,\ f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$.

Selon le cours, la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, et : $\forall\, x \in [-1,1]\,,\ f'(x) = 0$.

Il s'ensuit que f est constante sur $]-1,1[$, égale (par exemple) à $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

On a donc établi que : $\forall\, x \in\ ]-1,1[\,,\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Il ne reste plus qu'à fermer les crochets. Pour ce faire, il suffit de calculer $f(1)$ et $f(-1)$...

Finalement, on en déduit que : $\boxed{\forall\, x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}}$.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Montrer que : $\forall\, x \in [-1;1]\,, \quad \arccos(x) + \arccos\,(-x) = \pi$

Exercice 2. — Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan\,(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 3. — Etablir que : $\forall\, x \in\ [0,1]\,,\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Exercice 4. — Etablir que : $\forall\, x \in\ \mathbb{R},\ \cos(2\arctan(x)) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Exercice 5. — Soit α un réel. Déterminer en fonction de α la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 6. — Etablir que : $\forall\, n \in\ \mathbb{N},\ \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$

Exercice 7. — **(Extrait de CCINP, sur le principe du volontariat)**.

1/ Justifier brièvement que :

$$\forall\, x \in\ \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan'(x) = 1$$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir que :

$$\forall\, x \in\ \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan^{(n+2)}(x) + 2\,(n+1)\,x\arctan^{(n+1)}(x) + n\,(n+1)\,\arctan^{(n)}(x) = 0$$

BANQUE D'EXERCICES — CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Montrer que : $\forall\, x \in [-1;1]\,,\quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

Posons pour tout réel $x \in [-1;1]\,,\quad f(x) = \arccos(x) + \arccos(-x)$.

Selon le cours, la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout réel $x \in]-1,1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-(-1)}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

On en déduit que f est constante sur $]-1,1[$, égale à $f(0) = \arccos(0) + \arccos(0) = \pi$.

En résumé : $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \pi$.

Pour fermer les crochets, on peut observer que : $f(1) = \arccos(1) + \arccos(-1) = 0 + \pi = \pi$ et $f(-1) = f(1)$ puisque f est paire.

Conclusion. $\forall\, x \in [-1;1]\,,\quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

EXERCICE 2. — Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Pour tout réel x strictement positif, posons : $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1+x^2}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

On en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale à $f(1) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\qquad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 3. — Etablir que : $\forall x \in [0,1]\,,\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Soit x un réel dans $[-1,1]$. On a : $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$.

D'où : $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$. D'où : $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1-x^2}$.

En outre, $\cos(\arcsin(x))$ est positif puisque $\arcsin(x)$ appartient à $[-\pi/2, \pi/2]$.

Par suite : $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Conclusion. $\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

EXERCICE 4. — Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2\arctan(x)) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Soit x un réel. On a :

$$\cos(2\arctan(x)) = 2\cos^2(\arctan(x)) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(\arctan(x))} - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2\arctan(x)) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Exercice 5. — Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$

Soit n un entier naturel. On a d'une part :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)\right) = \frac{1}{n^2+3n+3}$$

D'autre part :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right)\right) = \frac{\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}}{1 + \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{1}{n+2}} = \frac{\dfrac{1}{n^2+3n+2}}{\dfrac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}} = \frac{1}{n^2+3n+3}$$

On en déduit que :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right)\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)\right) \qquad (\spadesuit)$$

En outre :

$0 \leqslant \dfrac{1}{n^2+3n+3} \leqslant 1$ donc : $0 \leqslant \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ (croissance de arctan)

Et : $\arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$; $\arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$; $\arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \geqslant \arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$

Donc : $0 \leqslant \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

En particulier : $\left(\arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right)\right)$ et $\arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$ sont dans $]-\pi/2; \pi/2[$ $\quad (\clubsuit)$

La conclusion provient de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et de l'identité : $\arctan \circ \tan = \mathrm{id}_{]-\pi/2;\pi/2[}$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$

Exercice 6. — Soit α un réel. Déterminer en fonction de α la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. On a selon le cours :

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Il s'ensuit que :

$$n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1} + n^{\alpha-1}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1}\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Après avoir judicieusement observé que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1$, on peut conclure.

Conclusion. Soit α un réel. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$

Exercice 7. — (Extrait de CCINP).

1/ Justifier brièvement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan'(x) = 1$$

D'après le cours, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Conclusion. $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan'(x) = 1$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan^{(n+2)}(x) + 2\,(n+1)\,x\arctan^{(n+1)}(x) + n\,(n+1)\arctan^{(n)}(x) = 0$$

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x, notons :

$$g(x) = 1+x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = g(x)\arctan'(x)$$

D'après la question précédente, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = 1$.

Il s'ensuit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{(n+1)}(x) = 0 \qquad (\spadesuit)$.

Or, selon la formule de Leibniz, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ h^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x)(\arctan')^{(n+1-k)}(x)$.

Puisqu'il est clair que $g^{(k)}$ est identiquement nulle pour tout entier $k \geqslant 3$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x)(\arctan')^{(n+1-k)}(x)$$

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h^{(n+1)}(x) = (1+x^2)\arctan^{(n+2)}(x) + 2\,(n+1)\,x\arctan^{(n+1)}(x) + n\,(n+1)\arctan^{(n)}(x) \quad (\clubsuit)$$

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan^{(n+2)}(x) + 2\,(n+1)\,x\arctan^{(n+1)}(x) + n\,(n+1)\arctan^{(n)}(x) = 0$$