

EXERCICES 8 – MÉTHODES DE CALCUL INTÉGRAL

INTÉGRALES ET PRIMITIVES USUELLES

EXERCICE 1. — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto x^4$	4) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	7) $f : x \mapsto \sin(x) \cos(x)$
2) $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$	5) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$	8) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}$
3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$	6) $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$	9) $f : x \mapsto \tan^2(x)$

EXERCICE 2. — Zoom sur les primitives de fonctions “de la forme $u'f(u)$ ”

- 1) Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$;
- 2) Une primitive de $u'e^u$ est e^u ;
- 3) Une primitive de $u'u^\alpha$ est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Trois cas particuliers remarquables :

Applications : déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto xe^{x^2}$	4) $f : x \mapsto (1-x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	7) $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}$
2) $f : x \mapsto \cos(x) \sin^{2023}(x)$	5) $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$	8) $f : x \mapsto \tan(x)$
3) $f : x \mapsto (1+x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	6) $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$	9) $f : x \mapsto \tan^3(x)$

EXERCICE 3. — Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \cos^2(x)$	3) $f : x \mapsto \cos^3(x)$	5) $f : x \mapsto \sin^4(x)$
2) $f : x \mapsto \tan^2(x)$	4) $f : x \mapsto \cos^4(x)$	6) $f : x \mapsto \cos^2(x) \sin^2(x)$

EXERCICE 4. — (**Primitives de fractions rationnelles 1**). Soit f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2) Dédire de ce qui précède une primitive de f sur I .

EXERCICE 5. — (**Primitives de fractions rationnelles 2**). Soit f définie sur $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$.

Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \wedge x \neq -2, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$. En déduire une primitive de f sur I .

EXERCICE 6. — (**Primitives de fractions rationnelles 3**). Déterminer une primitive de f sur I , dans chacun des cas suivants (I étant un intervalle à préciser).

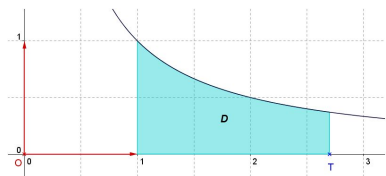
1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 6}$	2) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$	3) $f(x) = \frac{1}{x^2 - a} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$
------------------------------------	-------------------------------	--

EXERCICE 7. — Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^1 x^n dx$	3) $I_3 = \int_1^4 \sqrt{x} dx$	6) $I_6 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} dx$	8) $I_8 = \int_0^{\pi/6} \cos^3(x) dx$
2) $I_2 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	4) $I_4 = \int_0^1 \frac{1}{x-4} dx$	7) $I_7 = \int_0^{\pi/4} \tan^2(x) dx$	=
	5) $I_5 = \int_0^8 x \sqrt[3]{x} dx$		

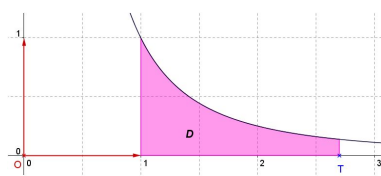
EXERCICE 8. — Fini ou pas ? Dans les trois questions ci-dessous, T désigne un réel supérieur ou égal à 1.

1) On note $A(T) = \int_1^T \frac{1}{x} dx$



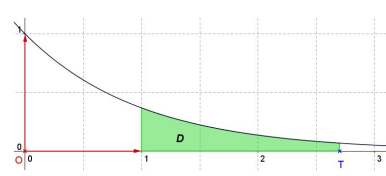
Calculer $A(T)$, puis $\lim_{T \rightarrow +\infty} A(T)$

2) On note $B(T) = \int_1^T \frac{1}{x^2} dx$



Calculer $B(T)$, puis $\lim_{T \rightarrow +\infty} B(T)$

3) On note $C(T) = \int_1^T e^{-x} dx$



Calculer $C(T)$, puis $\lim_{T \rightarrow +\infty} C(T)$

INTÉGRATION PAR PARTIES

EXERCICE 9. — Applications directes – Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto (1-x)e^{2x}$ 2) $f : x \mapsto xe^{-x}$ 3) $f : x \mapsto x \sin(x)$ 4) $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$

EXERCICE 10. — Primitive(s) de $\ln$

- 1) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction $\ln$ (sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera).
- 2) Application : déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x})$

EXERCICE 11. — A l'aide d'une (ou plusieurs) IPP, calculer chacune des intégrales suivantes.

1) $\int_{-\pi}^{\pi} (1-x) \cos(x) dx$ 2) $\int_1^e \ln^2(x) dx$ 3) $\int_0^1 (x^2 + 1) \operatorname{sh}(x) dx$

CHANGEMENT DE VARIABLE

EXERCICE 12. — A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ 3) $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln(x)}}$ 5) $f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$
 2) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$ 4) $f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ 6) $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$

EXERCICE 13. — A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$ 3) $\int_1^e \frac{1}{x + x(\ln x)^2} dx$ 5) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x)}$
 2) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^t} dt$ 4) $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$ 6) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)}$

EXERCICE 14. — Soient a un réel strictement positif, et f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + a}$. Déterminer une primitive de f sur I , où I est un intervalle à préciser.

EXERCICE 15. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INTÉGRALES CLASSIQUES EN PHYSIQUE

EXERCICE 16. — (Valeur efficace). Soit f une fonction T -périodique (définie sur $\mathbb{R}$). On appelle **valeur efficace**

de f le réel positif : $\sqrt{\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f^2(t) dt}$ (où a désigne un réel quelconque).*

Calculer les valeurs efficaces des fonctions $\cos$ et $\sin$.

EXERCICE 17. — (Primitives “complexes” 1). Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{\alpha x}$.

*. La valeur efficace est (heureusement !) indépendante du choix du réel a .

EXERCICE 18. — (**Primitives “complexes” 2**). Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de f dans chacun des cas suivants :

1/ $f : x \mapsto e^x \cos(x)$

3/ $f : x \mapsto e^{kx} \cos(\mu x)$ avec $(k, \mu) \in \mathbb{R}^2$

2/ $f : x \mapsto e^x \sin(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}$

4/ $g : x \mapsto e^{kx} \sin(\mu x)$ avec $(k, \mu) \in \mathbb{R}^2$

POUR VOUS TESTER ! EXERCICE DE SYNTHÈSE SUR LES INTÉGRALES

EXERCICE 19. — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants, à l'aide d'une IPP et/ou d'un changement de variable et/ou en reconnaissant une primitive usuelle :

1) $f : x \mapsto \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$

5) $f : x \mapsto e^x \sin(\lambda x + \varphi)$ (λ, φ réels)

9) $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

2) $f : x \mapsto \frac{1}{2x(x-1)}$

6) $f : x \mapsto \ln(x-1)$

10) $f : x \mapsto x^2 \arctan(x)$

3) $f : x \mapsto \frac{3}{(x-2)(x^2-4x)}$

7) $f : x \mapsto \frac{x}{\cos^2(x)}$

11) $f : x \mapsto \arcsin^2(x)$

4) $f : x \mapsto \frac{x^4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

8) $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$

12) $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos^2(x)}$

EXTRAITS DE PROBLÈMES SUR LES INTÉGRALES

EXERCICE 20. — **MINES SUP** Pour tout entier naturel n non-nul on pose : $I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{t/2} dt$.

1) Calculer I_1 . 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.

3) Dédire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{e} = I_n + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!}$.

4) Déterminer un réel A tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{A}{2^n n!}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!}$.

EXERCICE 21. — **MINES SUP, ENCORE UNE FOIS** On définit, pour tout entier naturel n , la fonction g_n par :

$$\forall x \in [0; 1], g_n(x) = x^n \sqrt{1-x} \quad \text{et on pose : } I_n = \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

1/ Calculer I_0 .

2/ Pour tout entier naturel n , étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$. En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .

3/ Montrer que pour tout entier naturel non-nul n on a : $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$ (on pourra intégrer par parties I_n).

4/ En déduire les valeurs de I_1, I_2 et I_3 .

5/ Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{2^{2n+3} (n+2) n!}{(2n+4)!}$

EXERCICE 22. — (**INTÉGRALES À PARAMÈTRES**). Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$$

1) Calculer $I_{p,0}$, puis calculer $I_{0,q}$.

2) Etablir que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq I_{q,p} \leq 1$.

3) Etablir que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{q,p} = I_{p,q}$ (on pourra utiliser un changement de variable).

4) Etablir que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{p+1,q} = \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}$.

5) Donner l'expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q .

EXERCICE 23. — Pour tout réel x raisonnable, on pose $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

1) Etablir que :

$$\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

2) Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)} dx$

3) Déterminer une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$.

EXERCICE 24. — On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de φ .

2) Calculer la dérivée de φ .

3) Dresser le tableau de variation de φ .

QUESTIONS CLASSIQUES SUR LES INTÉGRALES DE WALLIS

► **Définition.** On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

Exo-W 1. — **Premières valeurs.** Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

Exo-W 2. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$

Exo-W 3. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$

Exo-W 4. — Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

Exo-W 5. — Montrer que la suite (I_n) est convergente.

Exo-W 6. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

Exo-W 7. — Montrer que pour tout entier naturel p on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Exo-W 8. — Montrer que pour tout entier naturel p on a :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exo-W 9. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$

Exo-W 10. — Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Exo-W 11. — Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

Exo-W 12. — Etablir que : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2(2p+1)}{\pi} I_{2p}^2 = 1$

