

COLLE 8 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — Propriété. Positivité de l'intégrale : soient a et b deux réels, avec $a \leq b$, et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction f est continue et positive sur le segment $[a, b]$: à ce titre, elle admet une primitive F (th fondamental de l'intégration) sur $[a, b]$, et F est croissante sur $[a, b]$ (car F est dérivable et $F' = f \geq 0$).

On en déduit que $\int_a^b f = F(b) - F(a) \geq 0$, d'où la conclusion.

Application. Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 t^n (\operatorname{ch}(t) - 1) dt$. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

Soient n un entier naturel, et t un réel de $[0, 1]$. D'une part, on a évidemment : $t^n \geq 0$. D'autre part, $\operatorname{ch}(t) - 1 \geq 0$, puisque la fonction ch est minorée par 1 (c'est même le minimum de la fonction ch sur $\mathbb{R}$).

On en déduit que la fonction $t \mapsto t^n (\operatorname{ch}(t) - 1)$ est positive sur $[0, 1]$ d'où, par positivité de l'intégrale : $I_n \geq 0$.

QUESTION DE COURS N°2 — Propriété. Croissance de l'intégrale : soient a et b deux réels, avec $a \leq b$, et $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$.

Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction $f - g$ est continue et positive sur le segment $[a, b]$. Par positivité de l'intégrale, on a donc : $\int_a^b (f - g) \geq 0$. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que : $\int_a^b f - \int_a^b g \geq 0$, d'où la conclusion.

Application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (1 - t)^n e^{-t} dt$. Montrons que la suite (I_n) est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1 - t)^{n+1} e^{-t} dt - \int_0^1 (1 - t)^n e^{-t} dt \stackrel{\text{linéarité}}{=} \int_0^1 (1 - t)^{n+1} e^{-t} - (1 - t)^n e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 (1 - t)^n (1 - t - 1) e^{-t} dt = \int_0^1 \underbrace{-t(1 - t)^n e^{-t}}_{\leq 0} dt \stackrel{\text{positivité}}{\leq} 0 \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$. La suite (I_n) est décroissante.

QUESTION DE COURS N°3 — Propriété. Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}_1$ sur un intervalle I , et soient a et b deux réels dans I . Alors uv est dérivable sur I et :

$\forall x \in I$, $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Par intégration entre a et b (légitime car u , v , u' et v' sont continues), on en déduit que : $\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$ d'où

$$\forall (u, v) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \quad \int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Application. Calcul de $I = \int_0^1 (1 - t) e^{-t} dt$. Pour tout réel $t \in [0, 1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(t) = -e^{-t} \\ v(t) = 1 - t \end{cases} \implies \begin{cases} u'(t) = e^{-t} \\ v'(t) = -1 \end{cases}$$

Selon les TG, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, et on peut utiliser une IPP pour obtenir :

$$I = \int_0^1 (1 - t) e^{-t} dt = [-e^{-t}(1 - t)]_0^1 - \int_0^1 e^{-t} dt = 1 + [e^{-t}]_0^1 = 1 + e^{-1} - 1 = e^{-1}$$

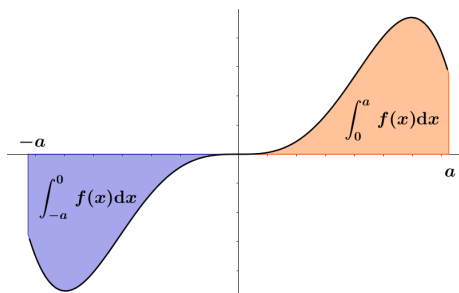
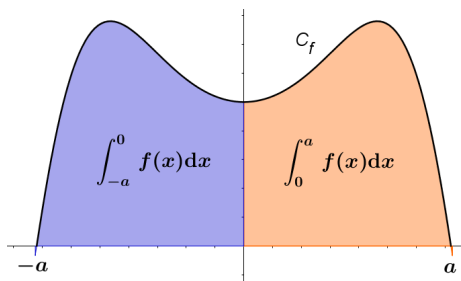
Remarque : cette méthode peut en particulier être appliquée au calcul de primitives :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \quad \int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx (+cste)$$

QUESTION DE COURS 4 — **Intégrale et parité.** Soit $f \in \mathcal{C}^0([-a, a], \mathbb{R})$ (avec $a \in \mathbb{R}_+$).

Si f est paire, alors : $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Si f est impaire, alors : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a : $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ (♠)

Le changement de variable $u = -x$ donne : $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u) (-du)$ Soit : $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(-u) du$ (♣)

► Si f est paire : $\int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(u) du$. On en déduit, avec (♣) et (♠) que :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(u) du. \text{ Par conséquent : } [f \text{ paire}] \implies \left[\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \right]$$

► Si f est impaire : $\int_0^a f(-u) du = \int_0^a -f(u) du = -\int_0^a f(u) du$. On en déduit, avec (♣) et (♠) que :

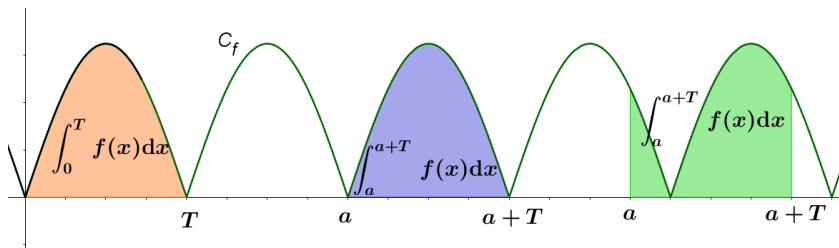
$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(u) du. \text{ Par conséquent : } [f \text{ impaire}] \implies \left[\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \right]$$

QUESTION DE COURS 5 — **Intégrale et périodicité.** Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T -périodique (avec $T \in \mathbb{R}_+$). On a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

L'intégrale d'une fonction T périodique sur un segment de longueur T est indépendante de l'origine de ce segment.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T -périodique (avec $T \in \mathbb{R}_+$), et soit a un réel : $\exists ! k \in \mathbb{Z}, kT \leq a < (k+1)T$.



D'après la relation de Chasles : $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^{(k+1)T} f(x) dx + \int_{(k+1)T}^{a+T} f(x) dx$

Dans la première (resp. seconde) intégrale intervenant au second membre de cette égalité, on procède au changement de variable $u = x - kT$ (resp. $u = x - (k+1)T$). On obtient alors :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_{a-kT}^T \underbrace{f(u+kT)}_{=f(u)} du + \int_0^{a-(k+1)T} \underbrace{f(u+(k+1)T)}_{=f(u)} du$$

D'où : $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_{a-kT}^T f(u) du + \int_0^{a-(k+1)T} f(u) du = \int_0^T f(u) du = \int_0^T f(x) dx$, cqfd

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Déterminer une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 2. — Déterminer une primitive de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3. — Déterminer une primitive de $\arcsin$ sur $] -1, 1[$.

EXERCICE 4. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$

EXERCICE 5. — Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.

Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

EXERCICE 6. — Soit x un réel > -1 .

1/ Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{1+x} = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$

2/ En déduire que : $\ln 2 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

EXERCICE 7. — Soit a un réel strictement positif. Déterminer une primitive de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$.

EXERCICE 8. — Pour tout réel x , on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt$$

1/ Montrer que φ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2/ Développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ ?

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Déterminer une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \times \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \times \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x$$

La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 2. — Déterminer une primitive de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.

$$\int \arctan(x) dx = \int 1 \times \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2})$$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2})$ est une primitive de la fonction $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3. — Déterminer une primitive de $\arcsin$ sur $] -1, 1[$.

$$\int \arcsin(x) dx = \int 1 \times \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

La fonction $x \in] -1, 1[\mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$ est une primitive de la fonction $\arcsin$ sur $] -1, 1[$.

EXERCICE 4. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Selon l'énoncé, on a : $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x dx$

Pour tout réel $x \in [0, 1]$, posons :
$$\begin{cases} u(x) = e^x \\ v(x) = (1-x)^{n+1} \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = -(n+1)(1-x)^n \end{cases}$$

Par IPP on obtient : $\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x dx = \left[(1-x)^{n+1} e^x \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

Ainsi : $\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x dx = -1 + (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

D'où : $I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx \iff I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n$.

Il s'ensuit que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

EXERCICE 5. — Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.

Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Pour tout réel $x \in [0, 1]$, on a : $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+2}$. D'où la conclusion, par théorème d'encadrement.

EXERCICE 6. — Soit x un réel > -1 .

1/ Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{1+x} = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$

Soit n un entier naturel, et x un réel différent de (-1) . On a : $\left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right] = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ (somme géométrique de raison $-x \neq 1$).

Il s'ensuit que : $\frac{1}{1+x} = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$

2/ En déduire que : $\ln 2 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

En intégrant terme à terme la relation de la question précédente on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 \left(\left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} \right) dx$$

$$\iff [\ln(1+x)]_0^1 = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right] dx + \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale})$$

$$\iff \ln 2 = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^k dx \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale, bis})$$

$$\iff \ln 2 = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$\iff \boxed{\ln 2 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx}$$

Remarque. Les résultats des exos 5 et 6 permettent d'affirmer que :

$$\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \text{ ce que l'on notera à l'avenir : } \ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

EXERCICE 7. — Soit a un réel strictement positif. Déterminer une primitive de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$.

$$F = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} dx.$$

On pose $u = \frac{x}{a}$. Alors $x = a u$ d'où $dx = a du$. Ainsi :

$$F = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{a} \arctan(u) \quad \text{D'où finalement : } \boxed{\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)}$$

EXERCICE 8. — Pour tout réel x , on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt$$

1/ Montrer que φ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction φ est par construction l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\cos(t)}$ qui s'annule en 0. Il s'ensuit que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^{\cos(x)} > 0$, d'où la conclusion.

2/ Développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ ?

La fonction φ étant dérivable en 0, elle admet un DL1 en 0, explicitement : $\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Or : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = e^{\cos(0)} = e$. Par suite : $\varphi(h) = eh + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$