

Chapitre 9

Equations différentielles linéaires

Convention : dans ce chapitre, I est un intervalle non-vidé de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

9.1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

9.1.1 Généralités

DÉFINITION 1 - Soient a , b et c trois fonctions de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ est dite **solution sur I de l'équation différentielle** $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ si :

$$\forall x \in I, \quad a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$$

Terminologie. $(E) \quad a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est appelée **équation** différentielle linéaire d'ordre 1 (ou EDL1) **avec second membre**; et $(H) \quad a(x)y' + b(x)y = 0$ est appelée **équation** (différentielle linéaire d'ordre 1) **homogène** (ou **sans second membre**) **associée à (E)** .

Par ailleurs, on note parfois simplement $ay' + by = c$ l'équation différentielle E .

Exemples. La fonction exponentielle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'EDL1 homogène $y' - y = 0$. La fonction $\sin$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'EDL1 avec second membre $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$.

THÉORÈME 1 - (Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL1). Soient a , b et c trois fonctions de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On note (E) l'EDL1 : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, et $(H) : a(x)y' + b(x)y = 0$ l'équation homogène associée à (E) .

On suppose qu'il existe une solution φ de (E) sur I .

Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$:

$$[f \text{ est solution de } (E)] \iff [(f - \varphi) \text{ est solution de } (H)]$$

PREUVE. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé :

f est solution de (E)

$$\iff \forall x \in I, \quad a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, \quad a(x)f'(x) + b(x)f(x) = a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x)$$

$$\iff \forall x \in I, \quad a(x)(f'(x) - \varphi'(x)) + b(x)(f(x) - \varphi(x)) = 0$$

$$\iff \forall x \in I, \quad a(x)(f - \varphi)'(x) + b(x)(f - \varphi)(x) = 0 \quad (\text{linéarité de la dérivation})$$

$$\iff (f - \varphi) \text{ est solution de } (H) \quad \text{👌}$$

En d'autres termes, et avec les notations précédemment introduites, toute solution f de (E) s'écrit $f_H + f_P$ où f_H (*resp.* f_P) désigne une solution quelconque de l'équation homogène associée à (E) (*resp.* une solution particulière de (E)).

Ce résultat fournit donc une méthode (et le plan de ce paragraphe consacré aux EDL1) de résolution, que voici :

MÉTHODE "UNIVERSELLE" DE RÉOLUTION DES EDL

- 1) Choix de l'intervalle de résolution (s'il n'est pas imposé dans l'énoncé).
- 2) Résolution de l'équation homogène (ou sans second membre) associée.
- 3) Recherche d'une solution particulière de l'équation complète (avec second membre).
- 4) Solutions de l'EDL complète obtenues en "faisant la somme des deux étapes précédentes".

9.1.2 Résolution d'une EDL 1 homogène

THÉORÈME 2 - (Solution générale d'une EDL1 homogène). Soient a et b deux fonctions de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On note (H) l'EDL1 : $a(x)y' + b(x)y = 0$.

On suppose que a ne s'annule pas sur I : $\forall x \in I, a(x) \neq 0$.

Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$:

$$[f \text{ est solution de } (H)] \iff [\exists K \in \mathbb{K}, \forall x \in I, f(x) = Ke^{-A(x)}]$$

où A désigne une primitive sur I de $\frac{b}{a}$.

Terminologie. Le théorème ci-dessus se traduit aussi en écrivant que la **solution générale** de H est :

$$\forall K \in \mathbb{K}, \forall x \in I, f(x) = Ke^{-A(x)}$$

Entre nous, et si personne ne nous écoute, nous pourrions parfois commettre l'abus d'écrire que la solution générale de E est : $f(x) = Ke^{-\int (b(x)/a(x)) dx}$.

PREUVE. Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction b/a est continue sur I , en tant que quotient de fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I . A ce titre, b/a admet des primitives sur I ; notons A l'une d'entre elles.

Soit φ une solution de (E). Introduisons une fonction auxiliaire g en posant : $\forall x \in I, g(x) = \varphi(x)e^{A(x)}$.¹

La fonction g est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur I , et :

$$\begin{aligned}\forall x \in I, g'(x) &= \varphi'(x)e^{A(x)} + A'(x)\varphi(x)e^{A(x)} \\ \forall x \in I, g'(x) &= \varphi'(x)e^{A(x)} + \frac{b(x)}{a(x)}\varphi(x)e^{A(x)} \\ \iff \forall x \in I, g'(x) &= e^{A(x)} \left(\varphi'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}\varphi(x) \right)\end{aligned}$$

La fonction a ne s'annulant pas sur I , cette dernière assertion est encore équivalente à la suivante :

$$\forall x \in I, a(x)g'(x) = e^{A(x)} \underbrace{(a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x))}_{=0}$$

la nullité de la parenthèse du terme de droite provenant de ce que φ est solution de (E).

Par suite : $\forall x \in I, a(x)g'(x) = 0$ d'où : $\forall x \in I, g'(x) = 0$ (puisque a ne...).

Il s'ensuit que g est constante sur I , explicitement :

$$\exists K \in \mathbb{K}, g(x) = K \iff \exists K \in \mathbb{K}, \varphi(x)e^{A(x)} = K \iff \exists K \in \mathbb{K}, \varphi(x) = Ke^{-A(x)}$$

On vient donc d'établir que toute solution de (E) est "de la forme $Ke^{-A(x)}$ ".

La réciproque (toute fonction "de la forme $ke^{-A(x)}$ " est solution de (E)) est une vérification aisée (et laissée en exercice) qui permet de conclure :

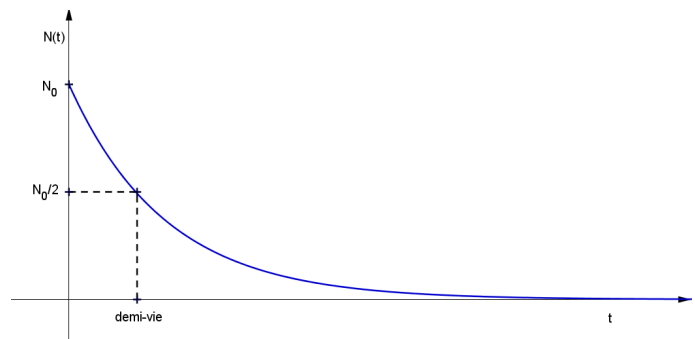
La solution générale de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ est : $\forall x \in I, f_K(x) = Ke^{-A(x)}$ ($K \in \mathbb{K}$), où A désigne une primitive sur I de la fonction $\frac{b}{a}$. 

Exemple 1 (Désintégration radioactive). Dans un tissu radioactif, les lois de la Physique permettent d'affirmer que la vitesse de désintégration des noyaux radioactifs (à l'instant t) est proportionnelle au nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs présents dans le tissu à l'instant t .²

Ce phénomène, appelé désintégration radioactive, peut être modélisé par le *problème de Cauchy*³ suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in [0; +\infty[, & \frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant $t = 0$, et λ désigne une constante strictement positive.



1. Dans un certain sens, la fonction g "mesure l'écart" séparant une solution de (H) de la fonction $x \in I \mapsto e^{-A(x)}$. Au regard de l'énoncé, l'objectif est de prouver que g est constante sur I .

2. Pour plus de précisions à ce sujet, consulter M Roveillo!

3. On appelle problème de Cauchy (d'ordre 1) la donnée d'une EDL1 et d'une condition initiale. Ce type de problème est d'usage fréquent en Physique et en Chimie.

Déterminons l'expression de $N(t)$ pour tout réel $t \geq 0$. Avec les notations introduites depuis le début de ce chapitre, ceci revient à résoudre sur $I = [0; +\infty[$ l'EDL1 homogène : $(H) \ y' + \lambda y = 0$.

Dans la présente situation, on a pour tout réel $t \geq 0$:

$$a(t) = 1; \quad b(t) = \lambda; \quad A(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)} dt = \lambda t$$

D'après le théorème 2, la solution générale de (H) est : $\forall t \geq 0, y(t) = Ke^{-\lambda t}$ (avec $K \in \mathbb{R}$).⁴

La condition initiale permet de déterminer la valeur de K :

$$y(0) = N_0 \iff Ke^{-\lambda \times 0} = N_0 \iff K = N_0$$

On en déduit, en revenant aux notations initiales, que le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs présents dans le tissu à l'instant t est donné par : $\boxed{\forall t \geq 0, N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$.

Remarque. Dans ce contexte, on appelle période de *demi-vie* de l'élément radioactif la valeur de T telle que : $N(T) = N_0/2$. D'après ce qui précède, on a donc :

$$N_0 e^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2} \iff e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \iff T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Exemple 2. Résolution dans $\mathbb{R}$ de (H) : $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$.

Dans la présente situation, on a : $a(x) = \cos(x)$; $b(x) = \sin(x)$ et $c(x) = 1$. Les trois fonctions a , b et c sont continues sur $\mathbb{R}$, mais a s'annule en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). On peut donc choisir comme intervalle de résolution tout intervalle $I_k =] - \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi [$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). Pour fixer les idées, choisissons de résoudre (H) sur $I_0 =] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$.

Calculons une primitive de b/a sur I_0 :

$$\forall x \in I_0, A(x) = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|) = \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$$

la disparition des valeurs absolue étant rendue légitime par la positivité de la fonction $\cos$ sur l'intervalle I_0 .

On en déduit, d'après le théorème 2, que la solution générale de (H) sur I_0 est :

$$\forall x \in I_0, f(x) = Ke^{-A(x)} = Ke^{\ln(\cos(x))} \text{ soit : } \boxed{\forall x \in I_0, f(x) = K \cos(x) \text{ (avec } K \in \mathbb{R})}.$$

Exemple 3. Résolution dans $\mathbb{R}$ de (H) : $xy' + (x-1)y = 0$.

Commençons par choisir l'intervalle de résolution. Les trois fonctions a , b et c sont continues sur $\mathbb{R}$, mais a s'annule en 0. On peut choisir de résoudre (H) sur $]0; +\infty[$ ou sur $] - \infty; 0[$. Posons dans un premier temps $I =]0; +\infty[$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}; \quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est donc } A : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x - \ln(x).$$

D'après le théorème 2, la solution générale de (H) est $f_K : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto Ke^{\ln(x)-x}$ soit

$$\boxed{f_K : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto Kxe^{-x} \text{ (} K \in \mathbb{R})}.$$

4. Dans le contexte, la fonction recherchée est évidemment à valeurs dans $\mathbb{R}$.

9.1.3 Recherche d'une solution particulière d'une EDL1 avec second membre

On présente ci-dessous deux méthodes générales pour déterminer une solution particulière de $ay' + by = c$.

9.1.3.1 Le flair !

Dans certaines situations, il est facile de deviner la forme d'une solution particulière.

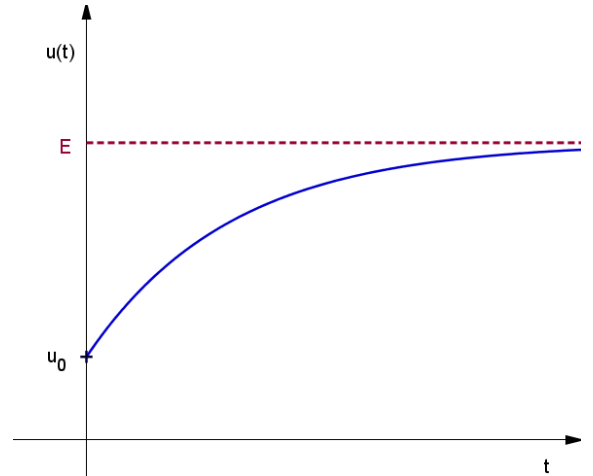
Par exemple, il est immédiat qu'une solution de l'EDL1 $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$ est la fonction sinus.

Par ailleurs, en Physique, les coefficients de l'EDL (les fonctions “ a , b et c ”) sont souvent des constantes ; dans ce cas, on pourra chercher (et trouver !) une solution particulière f_P constante elle aussi. On donne ci-dessous un exemple d'illustration.

Exemple (Charge d'un condensateur).

On peut étudier l'évolution de la tension $u(t)$ lors de la charge d'un condensateur à travers un résistor, sous une tension E . La tension $u(t)$ est dans ce cas régie par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in [0; +\infty[, & \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{RC} = \frac{E}{RC} \\ u(0) = u_0 & (u_0 \in \mathbb{R}_+) \end{cases}$$



Déterminons l'expression de $u(t)$ pour tout réel $t \geq 0$.

On commence par résoudre l'équation homogène associée : (H) $\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{RC} = 0$.

On a : $\forall t \geq 0$, $\frac{b(t)}{a(t)} = \frac{1}{RC}$ d'où : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $A(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)} dt = \frac{t}{RC}$.

La solution générale de (H) est donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u(t) = Ke^{-t/RC}$ (avec K réel).

Puisque les coefficients de l'équation avec second membre sont constants, on peut trouver une solution particulière u_P constante elle aussi. Explicitement, un calcul immédiat assure que la fonction constante égale à E est solution de l'équation complète.

D'après le théorème 1, la solution générale de $\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$ est :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, u(t) = E + Ke^{-t/RC} \quad (K \in \mathbb{R})}.$$

Pour achever les calculs et déterminer la valeur de K , on exploite la condition initiale :

$$u(0) = u_0 \iff E + Ke^{-0/RC} = u_0 \iff K = u_0 - E$$

Finalement : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, u(t) = E + (u_0 - E)e^{-t/RC}}$ (remarque : $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = E$).

9.1.3.2 Méthode de variation de la constante

Présentons le principe de cette méthode sur un exemple. Considérons l'EDL1 (E) : $xy' + (x-1)y = x^3$.

On a déjà résolu (voir exemple 3, page 4) l'équation homogène associée, et obtenu :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_H(x) = Cxe^{-x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

La méthode *de variation de la constante* consiste à chercher une solution particulière f_P de l'équation avec second membre sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_P(x) = C(x)xe^{-x} \quad \text{où } C \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

Sous cette forme, f_P est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_P(x) = C'(x)xe^{-x} + C(x)(e^{-x} - xe^{-x})$

C'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_P(x) = C'(x)xe^{-x} + C(x)e^{-x}(1-x)$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, xf'_P(x) + (x-1)f_P(x) = C'(x)x^2e^{-x} + \underbrace{C(x)e^{-x}x(1-x) + C(x)e^{-x}x(x-1)}_{=0}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, xf'_P(x) + (x-1)f_P(x) = C'(x)x^2e^{-x}$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, C'(x)x^2e^{-x} = x^3$, soit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, C'(x) = xe^x$. Il reste donc à déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto xe^x$, *via* une intégration par parties :

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) \text{ donc : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, C(x) = e^x(x-1)$$

Une solution particulière de (E) est donc $f_P : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x(x-1)$.

On déduit des calculs précédents et du théorème 1 que la solution générale de (E) est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x(x-1) + Cxe^{-x} \quad (C \in \mathbb{R}) \quad \text{soit : } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x(x-1 + Ce^{-x}) \quad (C \in \mathbb{R})}.$$

Remarque : très peu de modifications sont nécessaires pour résoudre cette EDL sur $\mathbb{R}_-^*$... De fait, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ est $g : x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto x(x-1 + Ce^{-x}) \quad (C \in \mathbb{R})$.

Remarquons encore qu'au cours des calculs précédents, un "petit miracle" s'est produit dans la recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : la "disparition" des termes en $C(x)$, qui nous a permis de d'achever nos calculs.

La propriété suivante assure que ce "miracle" n'en est pas un, et que la méthode de variation de la constante marche "à tous les coups".⁵

5. Ce qui ne signifie pas qu'il faut l'utiliser à tous les coups, voir paragraphe précédent.

THÉORÈME 3 - (Existence d'une solution pour une EDL1 avec second membre). Soient a, b et c trois fonctions de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On note (E) l'EDL1 : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.

On suppose que a ne s'annule pas sur I : $\forall x \in I, a(x) \neq 0$.

Alors il existe une fonction f_P de classe $\mathcal{C}^1$ sur I solution de (E) .

Plus précisément, il existe une fonction $K \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que la fonction f_P définie par

$$\forall x \in I, \quad f_P(x) = K(x)e^{-A(x)} \quad (\text{où } A \text{ est une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } I)$$

est solution de l'équation différentielle (E) .

PREUVE. Soit $K \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Posons : $\forall x \in I, f_P(x) = K(x)e^{-A(x)}$. La fonction f_P est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (théorèmes généraux). A ce titre, elle est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, f'_P(x) = e^{-A(x)} (K'(x) - A'(x)K(x)) = e^{-A(x)} \left(K'(x) - \frac{b(x)}{a(x)} K(x) \right)$$

On en déduit que :

f_P est solution de (E)

$$\iff \forall x \in I, a(x)f'_P(x) + b(x)f_P(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, a(x)e^{-A(x)} \left(K'(x) - \frac{b(x)}{a(x)} K(x) \right) + b(x)K(x)e^{-A(x)} = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, a(x)e^{-A(x)} K'(x) \underbrace{- b(x)K(x)e^{-A(x)} + b(x)K(x)e^{-A(x)}}_{=0} = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, a(x)e^{-A(x)} K'(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)} e^{A(x)} \quad (\spadesuit)$$

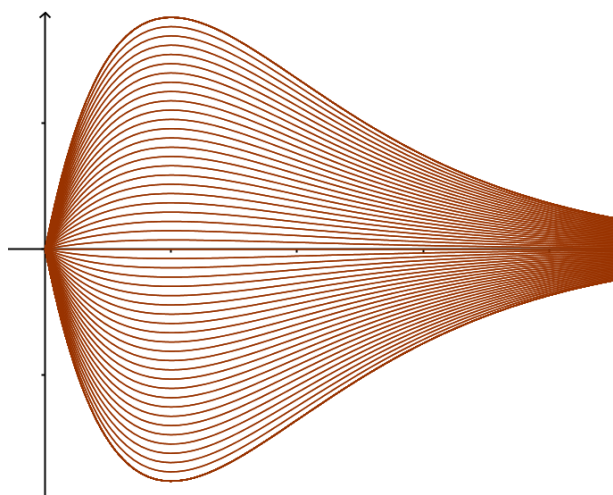
Les hypothèses du théorème et les théorèmes généraux sur la continuité assure que la fonction $x \mapsto \frac{c(x)}{a(x)} e^{A(x)}$ est continue sur I ; elle admet donc une primitive sur I . En d'autres termes, il existe une fonction K de classe $\mathcal{C}^1$ sur I satisfaisant l'identité $(\spadesuit)$.

On en déduit que la fonction $f_P : x \in I \mapsto e^{-A(x)} \left(\underbrace{\int \frac{c(x)}{a(x)} e^{A(x)} dx}_{=K(x)} \right)$ est solution de (E) . 

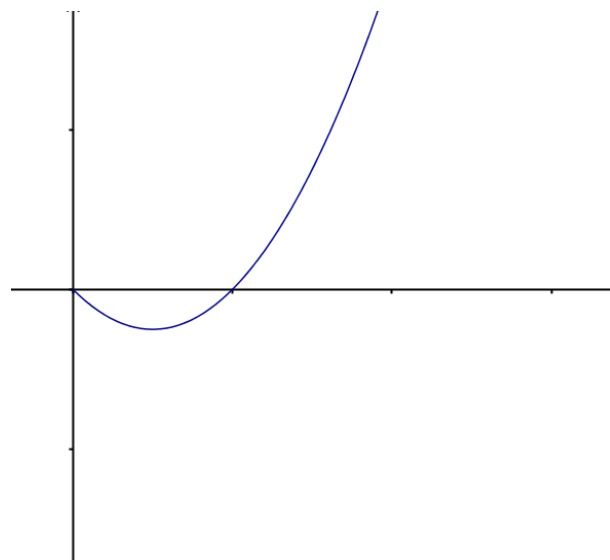
9.1.4 Conclusion - Problème de Cauchy

Il résulte du théorème 3 que toute EDL1 admet des solutions. On sait alors décrire complètement l'ensemble des solutions de (E) , grâce aux théorèmes 1 (décrivant l'ensemble des solutions) et 2 (donnant la solution générale de l'équation homogène associée). Un petit dessin valant mieux qu'un long discours, on illustre par quelques graphiques la méthode mise en œuvre précédemment pour résoudre (E) : $xy' + (x-1)y = x^3$ (page 6).

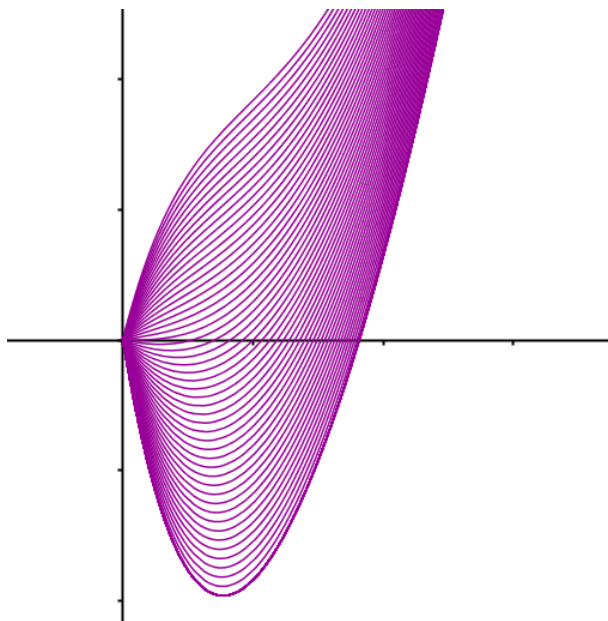
- Le premier graphique (“rouge”) montre quelques courbes représentatives de l’équation homogène, c’est-à-dire des fonctions $f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto Cxe^{-x}$ (pour plusieurs valeurs de C).
- Le second correspond à la courbe représentative d’une solution particulière de l’équation avec second membre, la fonction $f_P : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x(x-1)$.
- Sur le dernier graphique sont tracées les courbes de quelques solutions de l’équation avec second membre, c’est-à-dire quelques fonctions $g_C : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x(x-1) + Cxe^{-x}$.



Solution générale de l’équation homogène



+ Une solution particulière de l’équation complète



= Solution générale de l’équation complète

Le dernier graphique de la page précédente suggère que les courbes représentatives des solutions de (E) “recouvrent le plan, et ne se coupent pas”. Cette intuition est précisée par l’énoncé ci-dessous.

THÉORÈME 4 - (Existence et unicité d’une solution pour un problème de Cauchy d’ordre 1).

Soient a , b et c trois fonctions de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On note (E) l’EDL1 : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.

On suppose que a ne s’annule pas sur I : $\forall x \in I, a(x) \neq 0$.

Pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, & a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = c(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Intuitivement : par tout point du plan, passe la courbe représentative d’une unique solution de (E) .

PREUVE. Avec les notations de l’énoncé, le théorème 3 assure qu’il existe une solution f_P de (E) .

Soit φ une solution arbitraire de (E) . Il existe un scalaire K tel que : $\forall x \in I, \varphi(x) = f_P(x) + Ke^{-A(x)}$.

Considérons à présent un couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ arbitraire. On a :

$$\varphi(x_0) = y_0 \iff f_P(x_0) + Ke^{-A(x_0)} = y_0 \iff K = (y_0 - f_P(x_0))e^{A(x_0)}$$

On en déduit que la fonction φ définie en posant :

$$\forall x \in I, \varphi(x) = f_P(x) + (y_0 - f_P(x_0))e^{A(x_0) - A(x)}$$

est l’unique solution de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$. 

9.2 EDL2 à coefficients constants

9.2.1 Généralités

DÉFINITION 2 - Soient a , b , c et d quatre fonctions de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Une fonction $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ est dite **solution sur I de l’équation différentielle** $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ si :

$$\forall x \in I, \quad a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x) = d(x)$$

Terminologie. $(E) \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ est appelée **équation différentielle linéaire d’ordre 2** (ou EDL2) **avec second membre** ; et $(H) \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ est appelée **équation** (différentielle linéaire d’ordre 2) **homogène** (ou **sans second membre**) **associée à (E)** .

Par ailleurs, on note parfois simplement $ay'' + by' + cy = d$ l’équation différentielle (E) .

Exemples. La fonction $\cos$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l’EDL2 homogène $y'' + y = 0$. La fonction exponentielle $\mathbb{R}$ de l’EDL2 avec second membre $y'' + y' - y = e^x$.

Remarque. Tout au long de ce paragraphe, nous nous restreindrons au cas particulier des EDL2 à coefficients constants, c'est à dire de la forme

$$y'' + ay' + by = c(x) \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{K}, \text{ et } c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$$

Cette remarque faite, on peut conjecturer assez facilement que les propriétés relatives aux EDL1 s'étendent aux EDL2. Commençons par le commencement :

THÉORÈME 5 - (Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL2). Soient a et b deux scalaires, et $c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = c(x)$, et $(H) : y'' + ay' + by = 0$ l'équation homogène associée à (E) .

On suppose qu'il existe une solution φ de (E) sur I .

Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$:

$$[f \text{ est solution de } (E)] \iff [(f - \varphi) \text{ est solution de } (H)]$$

PREUVE. ⁶ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé :

f est solution de (E)

$$\iff \forall x \in I, \quad f''(x) + af'(x) + bf(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, \quad f''(x) + af'(x) + bf(x) = \varphi''(x) + a\varphi'(x) + b\varphi(x)$$

$$\iff \forall x \in I, \quad f''(x) - \varphi''(x) + a(f'(x) - \varphi'(x)) + b(f(x) - \varphi(x)) = 0$$

$$\iff \forall x \in I, \quad (f - \varphi)''(x) + a(f - \varphi)'(x) + b(f - \varphi)(x) = 0 \quad (\text{linéarité de la dérivation})$$

$$\iff (f - \varphi) \text{ est solution de } (H) \quad \text{✌}$$

En d'autres termes, et avec les notations précédemment introduites, toute solution f de (E) s'écrit $f_H + f_P$ où f_H (*resp.* f_P) désigne une solution quelconque de l'équation homogène associée à (E) (*resp.* une solution particulière de (E)).

La méthode (et le plan de ce paragraphe consacré aux EDL2) de résolution des EDL2 sera donc rigoureusement analogue à celui des EDL1.

9.2.2 Résolution d'une EDL 2 homogène

La petite difficulté dans ce paragraphe provient de ce que la solution générale d'une EDL2 pourra être différent selon que l'on cherche des solutions à valeurs réelles ou valeurs complexes d'une EDL2.

⁶. Les mêmes causes produisant les mêmes effets, la démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème analogue pour les EDL1.

THÉORÈME 6 - (Solution générale d'une EDL2 homogène - Cas COMPLEXE). Soient a et b deux complexes.

On note (H) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = 0$.

On note encore (EC) : $X^2 + aX + b = 0$ **l'équation caractéristique** associée à (H) .

Enfin, on note $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique.

► Premier cas : $\Delta \neq 0$. L'équation (EC) possède deux racines complexes distinctes α et β . Les solutions de (H) sont alors les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

où C_1 et C_2 désignent deux complexes arbitraires.

► Second cas : $\Delta = 0$. L'équation (EC) possède une racine double α . Les solutions de (H) sont alors les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\alpha x}$$

où C_1 et C_2 désignent deux complexes arbitraires.

PREUVE. Notons α et β les racines de l'équation caractéristique (même si éventuellement on peut avoir $\alpha = \beta$).

Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = g(x)e^{\alpha x}$, où g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (♣).

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que produit de fonctions qui le sont) ; il est donc légitime de la dériver deux fois. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^{\alpha x} (g'(x) + \alpha g(x)) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = e^{\alpha x} (g''(x) + 2\alpha g'(x) + \alpha^2 g(x))$$

Par suite :

φ est solution de (H)

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) + a\varphi'(x) + b\varphi(x) = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, e^{\alpha x} (g''(x) + 2\alpha g'(x) + \alpha^2 g(x) + ag'(x) + a\alpha g(x) + bg(x)) = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, e^{\alpha x} \left(g''(x) + (2\alpha + a)g'(x) + \underbrace{(\alpha^2 + a\alpha + b)}_{=0} g(x) \right) = 0^7$$

On note alors que : $2\alpha + a = \alpha - \beta$.⁸ L'assertion précédente est donc encore équivalente à la suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{\alpha x} (g''(x) + (\alpha - \beta)g'(x)) = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + (\alpha - \beta)g'(x) = 0^9$$

$$\iff g' \text{ est solution de l'équation différentielle : } Y' + (\alpha - \beta)Y = 0 \text{ (♠)}$$

7. On a $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ puisque α est racine de l'équation caractéristique.

8. Lorsque les racines sont distinctes, cela provient de l'égalité $\alpha + \beta = -a$ (relation coefficients racines pour un polynôme de degré 2). Lorsque α est racine double de l'équation caractéristique, on a : $2\alpha = -a$ donc $2\alpha + a = 0$; et d'autre part dans ce cas $\beta - \alpha = \alpha - \alpha = 0$. En résumé, dans les deux situations, on a : $2\alpha + a = \alpha - \beta$.

9. Puisque la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On distingue alors deux cas :

➤ Premier cas — Si $\alpha \neq \beta$: alors on déduit de (♠) que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \lambda e^{(\beta-\alpha)x}$$

$$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\lambda}{\beta - \alpha} e^{(\beta-\alpha)x} + \mu$$

En exploitant alors la relation (♣), on peut affirmer que :

$$\varphi \text{ est solution de } (H) \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \left(\frac{\lambda}{\beta - \alpha} e^{(\beta-\alpha)x} + \mu \right) e^{\alpha x}$$

$$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{\lambda}{\beta - \alpha} e^{\beta x} + \mu e^{\alpha x}$$

On en déduit donc que, dans le cas où $\Delta \neq 0$, toute solution est “de la forme $C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{\alpha x}$ ” ; la réciproque est une vérification pas très rapide, mais aisée.

➤ Second cas — Si $\alpha = \beta$: alors on déduit de (♠) que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \lambda$$

$$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda x + \mu$$

En exploitant alors la relation (♣), on peut affirmer que :

$$\varphi \text{ est solution de } (H) \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = (\lambda x + \mu) e^{\alpha x}$$

On en déduit donc que, dans le cas où $\Delta = 0$, toute solution est “de la forme $(C_1 x + C_2) e^{\alpha x}$ ” ; la réciproque est, comme précédemment, aisée. Ce qui achève la preuve du théorème. 

Exemple 1. Résolution dans $\mathbb{C}$ de (E) : $y'' + 4y' + 13y = 0$.

L'équation caractéristique (EC) a pour discriminant $\Delta = -36$, et donc pour racines $-2 \pm 3i$. D'après le théorème 6, la solution générale de (E) est : $\forall x \in \mathbb{R}, f_H(x) = C_1 e^{(-2+3i)x} + C_2 e^{(-2-3i)x}$ (C_1, C_2 complexes).

Exemple 2. Résolution dans $\mathbb{C}$ de (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

L'équation caractéristique (EC) est $(X+2)^2 = 0$. Elle a donc une racine double : -2 . D'après le théorème 6, la solution générale de (E) est : $\forall x \in \mathbb{R}, f_H(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$ (C_1, C_2 complexes).

On passe à présent au cas réel, c'est à dire que l'on détermine les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (à valeurs réelles donc) solution de l'EDL2 $y'' + ay' + by = 0$.

THÉORÈME 7 - (Solution générale d'une EDL2 homogène - Cas REEL). Soient a et b deux réels.

On note (H) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = 0$.

On note encore (EC) : $X^2 + aX + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (H) .

Enfin, on note $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique.

► Premier cas : $\Delta > 0$. L'équation (EC) possède deux racines réelles distinctes α et β . Les solutions de (H) à valeurs réelles sont alors les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

où C_1 et C_2 désignent deux réels arbitraires.

► Second cas : $\Delta = 0$. L'équation (EC) possède une racine double α . Les solutions de (H) à valeurs réelles sont alors les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\alpha x}$$

où C_1 et C_2 désignent deux réels arbitraires.

► Troisième cas : $\Delta < 0$. L'équation (EC) possède deux racines complexes (non réelles) conjuguées $u \pm i v$. Les solutions de (H) à valeurs réelles sont alors les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (C_1 \cos(vx) + C_2 \sin(vx)) e^{ux}$$

où C_1 et C_2 désignent deux réels arbitraires.

PREUVE. Mutatis mutandis, la preuve des deux premiers cas se déduit de la preuve du théorème 6.

Reste donc à traiter le cas où $\Delta < 0$. On note alors $u \pm i v$ les deux racines de l'équation caractéristique associée à (H) .

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une solution de (H) . Alors φ est en particulier une solution à valeurs complexes de (H) (puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), et il existe donc deux nombres complexes C_1 et C_2 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = C_1 e^{(u+iv)x} + C_2 e^{(u-iv)x}$$

Il reste à déterminer à quelle(s) condition(s) sur C_1 et C_2 la fonction φ est à valeurs réelles. D'après ce qui précède, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = C_1 e^{(u+iv)x} + C_2 e^{(u-iv)x}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = C_1 e^{ux} (\cos(vx) + i \sin(vx)) + C_2 e^{ux} (\cos(vx) - i \sin(vx))$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^{ux} [(C_1 + C_2) \cos(vx) + i(C_1 - C_2) \sin(vx)]$$

En particulier, on a :

$$\begin{cases} \varphi(0) \in \mathbb{R} \\ \varphi\left(\frac{\pi}{2v}\right) \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} (C_1 + C_2) \in \mathbb{R} \\ i(C_1 - C_2) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En posant $K_1 = (C_1 + C_2)$ et $K_2 = i(C_1 - C_2)$, on a établi l'implication :

$$[\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ est solution de } (H)] \implies [\exists (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = (K_1 \cos(ux) + K_2 \sin(ux)) e^{vx}]$$

L'implication réciproque est une vérification immédiate qui achève la preuve de ce théorème. 

Exemple 1. Résolution dans $\mathbb{R}$ de (E) : $y'' + 4y' + 13y = 0$.

L'équation caractéristique (EC) a pour discriminant $\Delta = -36$, et donc pour racines $-2 \pm 3i$. D'après le théorème 7, la solution générale de (E) (à valeurs réelles) est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_H(x) = (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)) e^{-2x} \quad (C_1, C_2 \text{ réels}).$$

Exemple 2. Résolution dans $\mathbb{R}$ de (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

L'équation caractéristique (EC) est $(X + 2)^2 = 0$. Elle a donc une racine double : -2 .

D'après le théorème 7, la solution générale de (E) est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_H(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-2x} \quad (C_1, C_2 \text{ réels}).$$

9.2.3 Recherche d'une solution particulière

PROPRIÉTÉ 1 - Soient a et b deux réels, et α un scalaire.

On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}$.

On note encore (EC) : $X^2 + aX + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E) .

► Premier cas : α n'est pas racine de (EC) . L'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = K e^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{C}$.

► Second cas : α est racine simple de (EC) . L'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = K x e^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{C}$.

► Troisième cas : α est racine double de (EC) . L'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = K x^2 e^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{C}$.

PREUVE. ► Premier cas : α n'est pas racine de (EC) . Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$.

Soit K un complexe. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = K e^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $f_P'(x) = \alpha K e^{\alpha x}$ et $f_P''(x) = \alpha^2 K e^{\alpha x}$.

Ainsi, pour tout réel x on a : $f_P''(x) + a f_P'(x) + b f_P(x) = K e^{\alpha x} (\alpha^2 + a\alpha + b)$.

Puisque $e^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x , on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \iff [K(\alpha^2 + a\alpha + b) = 1] \iff \left[K = \frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b} \right]$$

La dernière égalité étant rendue légitime par le fait que α n'est pas racine de (EC) .

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = \frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b} e^{\alpha x}$, est solution de (E) .

► Second cas : α est racine simple de (EC) . Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$, et $2\alpha + a \neq 0$.¹⁰

Soit K un complexe. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = Kxe^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $f_P'(x) = Ke^{\alpha x}(\alpha x + 1)$ et $f_P''(x) = Ke^{\alpha x}(\alpha^2 x + 2\alpha)$.

Ainsi, pour tout réel x on a : $f_P''(x) + af_P'(x) + bf_P(x) = Ke^{\alpha x}(\alpha^2 x + 2\alpha + a\alpha x + a + bx)$.

Puisque $e^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x , on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \iff \left[K \left(\underbrace{(\alpha^2 + a\alpha + b)}_{=0} x + 2\alpha + a \right) = 1 \right] \iff \left[K = \frac{1}{2\alpha + a} \right]$$

La dernière égalité étant rendue légitime par le fait que α est racine simple de (EC) .

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = \frac{1}{2\alpha + a} xe^{\alpha x}$, est solution de (E) .

► Troisième cas : α est racine double de (EC) . Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$, et $2\alpha + a = 0$.

Soit K un complexe. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = Kx^2e^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $f_P'(x) = Ke^{\alpha x}(\alpha x^2 + 2x)$ et $f_P''(x) = Ke^{\alpha x}(\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + 2)$.

Ainsi, pour tout réel x on a : $f_P''(x) + af_P'(x) + bf_P(x) = Ke^{\alpha x}(\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + 2 + a\alpha x^2 + 2ax + bx^2)$.

Puisque $e^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x , on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \iff \left[K \left(\underbrace{(\alpha^2 + a\alpha + b)}_{=0} x^2 + \underbrace{(2a + 4\alpha)}_{=0} x + 2 \right) = 1 \right] \iff \left[K = \frac{1}{2} \right]$$

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{\alpha x}$, est solution de (E) ; ce qui achève la preuve de la propriété. ✌

Exemple 1. Considérons l'équation $(E) : y'' - 5y' + 6y = e^{ix}$.

L'équation caractéristique $(X^2 - 5X + 6 = 0)$ a pour racines 2 et 3.

Puisque i n'est pas racine de l'équation caractéristique, (E) admet une solution particulière de la forme Ke^{ix} (avec K complexe).

Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = Ke^{ix}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Pour tout réel x , on a : $\varphi'(x) = iKe^{ix}$ et $\varphi''(x) = -Ke^{ix}$. Il s'ensuit que φ est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -Ke^{ix} - 5iKe^{ix} + 6Ke^{ix} = e^{ix} \iff \forall x \in \mathbb{R}, (-1 - 5i + 6)Ke^{ix} = e^{ix} \iff K(5 - 5i) = 1$$

$$\iff K = \frac{1}{5 - 5i} \iff K = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}i$$

On en déduit que la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i \right) e^{ix}$ est solution de (E) .

10. En effet, si α était racine double de (EC) , on aurait $\alpha = -a/2$, et donc $2\alpha + a = 0$.

Exemple 2. Considérons l'équation $(E) : y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Puisque 1 est racine simple de l'équation caractéristique, (E) admet une solution particulière de la forme Kxe^x (avec K complexe).

Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = Kxe^x$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on a : $\varphi'(x) = Ke^x(x+1)$ et $\varphi''(x) = Ke^x(x+2)$. Il s'ensuit que φ est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Ke^x(x+2-3x-3+2x) = e^x \iff K = -1$$

On en déduit que la fonction : $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto -xe^x$ est solution de (E) .

Exemple 3. Considérons l'équation $(E) : y'' - 2y' + y = e^x$.

Puisque 1 est racine double de l'équation caractéristique, (E) admet une solution particulière de la forme Kx^2e^x (avec K complexe).

Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = Kx^2e^x$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on a : $\varphi'(x) = Ke^x(x^2+2x)$ et $\varphi''(x) = Ke^x(x^2+4x+2)$. Il s'ensuit que φ est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Ke^x(x^2+4x+2-2x^2-4x+x^2) = e^x \iff K = \frac{1}{2}$$

On en déduit que la fonction : $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}x^2e^x$ est solution de (E) .

La propriété 1 peut sembler restrictive, dans le sens où elle ne s'applique qu'à un cas très particulier de second membre (" $e^{\alpha x}$ "). Une extension de ce résultat est fourni par l'énoncé suivant, qui repose sur la linéarité de l'application

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \\ f &\longmapsto f'' + af' + bf \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 2 - (Principe de superposition des solutions, v1). Soient a et b deux scalaires ; c_1 et c_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f_1 (resp. f_2) est solution de $y'' + ay' + by = c_1$ (resp. $y'' + ay' + by = c_2$).

Alors pour tout couple de scalaires $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda f_1 + \mu f_2)$ est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = \lambda c_1 + \mu c_2$.

PREUVE. On renvoie à la preuve de la version générale, propriété 3 page 17. 

Exemple. Considérons l'équation $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2\text{ch}(x)$.

Pour tout réel x , on a : $2\text{ch}(x) = e^x + e^{-x}$. D'après le principe de superposition, une solution particulière de (E) peut être obtenue en faisant la somme d'une solution particulière de (E_1) et d'une solution particulière de (E_2) , en ayant posé :

$$(E_1) : y'' - 3y' + 2y = e^{-x} \quad \text{et} \quad (E_2) : y'' - 3y' + 2y = e^x$$

➤ Recherche d'une solution particulière de (E_1) . On introduit l'équation $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$.

Puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, (E_1) admet une solution particulière de la forme Ke^{-x} (avec K scalaire). Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = Ke^{-x}$. La fonction f_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), et on peut donc calculer ses dérivées successives.

Pour tout réel x , on a clairement : $f_1'(x) = -Ke^{-x}$ et $f_1''(x) = Ke^{-x}$. Il s'ensuit que f_1 est solution de (E_1) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Ke^{-x}(1 + 3 + 2) = e^{-x} \iff K = \frac{1}{6}$$

On en déduit que la fonction $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{6}e^{-x}$ est solution de (E_1) ($\spadesuit$).

➤ Recherche d'une solution particulière de (E_2) . On a déjà établi page 16 qu'une solution de (E_2) est la fonction $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto -xe^x$ ($\clubsuit$).

➤ D'après ($\clubsuit$), ($\spadesuit$) et le principe de superposition, on peut affirmer que la fonction :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{6}e^{-x} - xe^x \text{ est solution de } (E)$$

On énonce à présent le principe de superposition dans sa version générale.

PROPRIÉTÉ 3 - (Principe de superposition des solutions, v2). Soient a et b deux scalaires, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $c_1, \dots, c_n$ n fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soient $f_1, \dots, f_n$ n fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ telles que :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i$ est solution de $(E_i) : y'' + ay' + by = c_i$.

Alors pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\text{la fonction } \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \text{ est solution de l'équation différentielle } y'' + ay' + by = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i.$$

PREUVE. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right)'' + a \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right)' + b \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i'' + a \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i' + b \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i'' + af_i' + bf_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \end{aligned}$$

la première égalité provenant de la linéarité de la dérivation, la seconde de la linéarité de la somme, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle f_i est solution de $y'' + ay' + by = c_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. 

Le principe de superposition permet donc d'élargir la classe de seconds membres pour lesquels on peut déterminer une solution particulière. On peut en particulier l'appliquer lorsque le second membre est un cosinus hyperbolique ou un sinus hyperbolique.

On pourrait aussi l'appliquer lorsque le second membre est un cosinus ou un sinus ; mais il y a dans ce cas mieux à faire, comme le précise l'énoncé suivant.

LEMME 1 - (“Pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$ ” pour les EDL). Soient a et b deux réels.

Soient $c \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors :

$$[\varphi \text{ est solution de } y'' + ay' + by = c] \iff \begin{bmatrix} \text{Re}(\varphi) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \text{Re}(c) \\ \text{Im}(\varphi) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \text{Im}(c) \end{bmatrix}$$

PREUVE. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$[\varphi \text{ est solution de } y'' + ay' + by = c]$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) + a\varphi'(x) + b\varphi(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (\text{Re}(\varphi''(x)) + a\text{Re}(\varphi'(x)) + b\text{Re}(\varphi(x))) + i(\text{Im}(\varphi''(x)) + a\text{Im}(\varphi'(x)) + b\text{Im}(\varphi(x))) = \text{Re}(c(x)) + i\text{Im}(c(x))$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, ((\text{Re}\varphi)''(x) + a(\text{Re}\varphi)'(x) + b(\text{Re}\varphi)(x)) + i((\text{Im}\varphi)''(x) + a(\text{Im}\varphi)'(x) + b(\text{Im}\varphi)(x)) = (\text{Re } c)(x) + i(\text{Im } c)(x)$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, (\text{Re}\varphi)''(x) + a(\text{Re}\varphi)'(x) + b(\text{Re}\varphi)(x) = (\text{Re } c)(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, (\text{Im}\varphi)''(x) + a(\text{Im}\varphi)'(x) + b(\text{Im}\varphi)(x) = (\text{Im } c)(x) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \text{Re}(\varphi) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \text{Re}(c) \\ \text{Im}(\varphi) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \text{Im}(c) \end{cases} \quad \text{👌}$$

Exemple. Considérons l'équation $(E) : y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$.

On introduit l'équation $(E') : y'' - 5y' + 6y = e^{ix}$.

On a déjà établi (voir exemple 1, page 15) que la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i\right)e^{ix}$ est solution de (E') .

En vertu du lemme, il ne reste plus qu'à en déterminer la partie réelle pour avoir une solution de (E) .

Explicitement, la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{10}(\cos(x) - \sin(x))$ est une solution particulière de (E) .

Remarques. Pour conclure ce paragraphe, indiquons que l'énoncé de la propriété 1 peut être généralisé aux seconds membres de la forme $P(x)e^{\alpha x}$, où P désigne un polynôme. Explicitement, l'équation $y'' + ay' + by = P(x)e^{\alpha x}$ admet une solution de la forme $Q(x)e^{\alpha x}$ où Q est un polynôme, avec :

- $\deg(Q) = \deg(P)$ lorsque α n'est pas racine de (EC) ;
- $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ lorsque α est racine simple de (EC) ;
- $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ lorsque α est racine double de (EC) .

Autre astuce : lorsque le second membre est un “cos” ou un “sin”, on peut chercher une solution particulière sous la forme $\lambda \cos + \mu \sin$ avec λ et μ deux scalaires.

9.2.4 Conclusion

On donne ci-dessous un exemple de résolution complète d'un problème de Cauchy, pour faire le point sur la méthode générale et sur les résultats précédents.

Soient A , ω et y_0 trois réels strictement positifs, et α un réel strictement supérieur à 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire déterminer les solutions dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \text{(E)} : & y'' + \omega^2 y = A \sin(\alpha x) \\ y(0) = y_0 & \text{et } y'(0) = 0 \end{cases}$$

Commençons par résoudre (E) (EDL d'ordre 2 à coefficients constants).

► **Résolution de l'équation homogène associée.** Notons (H) $y'' + \omega^2 y = 0$ l'équation homogène associée à (E). L'équation caractéristique associée est $X^2 + \omega^2 = 0$, et elle a donc deux racines complexes conjuguées : $\pm i\omega$. On en déduit que la solution générale de (H) est

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \text{ (avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels)}$$

► **Recherche d'une solution particulière de l'équation complète.** On peut penser à déterminer une solution particulière de l'équation auxiliaire

$$(E') \quad y'' + \omega y = A e^{i\alpha x}$$

Mais il faut alors distinguer deux cas suivant que $\alpha = \omega$ (car alors $i\alpha$ est racine de l'équation caractéristique) ou $\alpha \neq \omega$.¹¹

► Cas $\alpha \neq \omega$. Ici, on cherche une solution particulière f_P de (E') en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = K e^{i\alpha x}$. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P''(x) = -\alpha^2 K e^{i\alpha x}$. Il s'ensuit que f_P est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, K e^{i\alpha x} (\omega^2 - \alpha^2) = A e^{i\alpha x} \iff K = \frac{A}{\omega^2 - \alpha^2}$$

Ainsi la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{A}{\omega^2 - \alpha^2} e^{i\alpha x}$ est solution de (E'). On en déduit que sa partie imaginaire, la fonction : $f_P : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{A}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha x)$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Dans le cas $\alpha \neq \omega$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{A}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha x) + C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \text{ (} C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels)}$$

11. Remarquons quand même, pour se remonter le moral, que l'on ne peut avoir $\alpha = -\omega$, puisque ces deux réels sont supposés strictement positifs dans l'énoncé.

➤ Cas $\alpha = \omega$. Dans cette situation, on cherche une solution particulière f_P de (E') en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = Kxe^{i\alpha x}$. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'_P(x) = (1 + i\alpha x)Ke^{i\alpha x}$, puis : $\forall x \in \mathbb{R}, f''_P(x) = (2i\alpha - \alpha^2 x)Ke^{i\alpha x}$. Il s'ensuit que f_P est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Ke^{i\alpha x}((2i\alpha - \alpha^2 x) + \omega^2 x) = Ae^{i\alpha x} \iff \forall x \in \mathbb{R}, Ke^{i\alpha x}(2i\alpha) = Ae^{i\alpha x} \iff K = -\frac{A}{2\alpha}i$$

Ainsi la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{A}{2\alpha}ixe^{i\alpha x}$ est solution de (E'). On en déduit que sa partie imaginaire, la fonction : $f_P : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{A}{2\alpha}x \cos(\alpha x)$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Dans le cas $\alpha = \omega$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{A}{2\alpha}x \cos(\alpha x) + C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

Il ne reste "plus qu'à" résoudre le problème de Cauchy dans chaque cas :

➤ Dans le cas $\alpha \neq \omega$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{A}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha x) + C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

Les conditions de Cauchy $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$ imposent :

$$\begin{cases} C_1 = y_0 \\ \frac{A\alpha}{\omega^2 - \alpha^2} + \omega C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} C_1 = y_0 \\ C_2 = \frac{A\alpha}{\omega(\alpha^2 - \omega^2)} \end{cases}$$

Conclusion. Dans le cas $\alpha \neq \omega$, la solution du problème de Cauchy constitué de (E) et des conditions $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{A}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha x) + y_0 \cos(\omega x) + \frac{A\alpha}{\omega(\alpha^2 - \omega^2)} \sin(\omega x)$$

➤ Dans le cas $\alpha = \omega$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{A}{2\alpha}x \cos(\alpha x) + C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

Les conditions de Cauchy $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$ imposent : $\begin{cases} C_1 = y_0 \\ -\frac{A}{2\alpha} + \alpha C_2 = 0 \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} C_1 = y_0 \\ C_2 = \frac{A}{2\alpha^2} \end{cases}$

Conclusion. Dans le cas $\alpha = \omega$, la solution du problème de Cauchy constitué de (E) et des conditions $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{A}{2\alpha}x \cos(\alpha x) + y_0 \cos(\alpha x) + \frac{A}{2\alpha^2} \sin(\alpha x)$$

9.3 Compléments sur les équations différentielles

9.3.1 EDL2 et oscillateur harmonique

En Physique, le comportement d'un oscillateur harmonique¹² est régi par une EDL2 de la forme

$$y'' + 2my' + \omega_0^2 y = c(t) \quad \text{avec } m \geq 0 \text{ et } \omega_0 > 0.$$

Plus précisément, on parle d'oscillateur harmonique *libre* lorsque $c = 0$; et d'oscillateur harmonique *forcé* sinon.

Enfin, lorsque $m = 0$, on parle d'oscillateur harmonique *sans frottements* lorsque $m = 0$, et *avec frottements* sinon.

On étudie ci-dessous les différents cas.

CAS N°1 — Etude de l'oscillateur harmonique libre, sans frottements (résolution de $y'' + \omega_0^2 y = 0$).
Solution g^{ale} peut s'écrire $f_{K,\varphi}(t) = K \cos(\omega_0 t - \varphi)$

On suppose que $\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et on note (H) l'équation différentielle linéaire du second ordre : $y'' + \omega_0^2 y = 0$. L'équation caractéristique associée possède deux racines complexes conjuguées $\pm i\omega_0$.¹³

On en déduit que la solution générale¹⁴ est : $\forall (t, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3, f_{\lambda,\mu}(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$.

Fixons à présent les réels t , λ et μ , avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. On écrit :

$$f_{\lambda,\mu}(t) = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \cos(\omega_0 t) + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \sin(\omega_0 t) \right)$$

Puis on pose : $X = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$ et $Y = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$

Le couple de réels (X, Y) vérifie clairement la relation $X^2 + Y^2 = 1$. Par suite, le complexe $X + iY$ est un élément de $\mathbb{U}$, et il existe donc un unique réel $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $X = \cos \varphi$ et $Y = \sin \varphi$. Par suite :

$$f_{\lambda,\mu}(t) = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} (\cos \varphi \cos(\omega_0 t) + \sin \varphi \sin(\omega_0 t)) \quad \text{d'où :} \quad f_{\lambda,\mu}(t) = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Le cas $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ est trivial (prendre $K = 0$ et φ arbitraire).

Conclusion. La solution générale de (H) est : $\forall (t, K, \varphi) \in \mathbb{R}^3, f_{K,\varphi}(t) = K \cos(\omega_0 t - \varphi)$
(régime périodique)

12. Pour plus de renseignements sur l'oscillateur harmonique, consulter M Roveillo !

13. Qui sont effectivement distinctes puisque ω_0 est non nul par hypothèse.

14. Càd l'ensemble des fonctions solutions de (H) à valeurs *réelles*.

CAS N°2 — Etude de l'oscillateur harmonique libre, avec frottements (résolution de $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ avec $m > 0$). Solution générale dans les trois cas.

On considère l'EDL2 : (H) $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ avec m et ω_0 strictement positifs. L'équation caractéristique associée est : (EC) $X^2 + 2mX + \omega_0^2 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 4(m^2 - \omega_0^2)$.

On distingue alors trois cas :

► Si $\Delta < 0$ (càd si : $m < \omega_0$) : l'équation (EC) possède deux racines complexes conjuguées

$$-m \pm i\sqrt{\omega_0^2 - m^2}$$

Dans ce cas ("frottements faibles"), la solution générale de (H) est :

$$\forall (t, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3, f_{\lambda, \mu}(t) = \left(\lambda \cos \left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - m^2} \right) t \right) + \mu \sin \left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - m^2} \right) t \right) \right) e^{-mt}$$

(régime pseudo-périodique)

► Si $\Delta = 0$ (càd si : $m = \omega_0$) : l'équation (EC) possède une racine double (réelle) : $-m$. Dans ce cas, la solution générale de (H) est :

$$\forall (t, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3, f_{\lambda, \mu}(t) = (\lambda t + \mu) e^{-mt} \text{ (régime critique)}$$

► Si $\Delta > 0$ (càd si : $m > \omega_0$) : l'équation (EC) possède deux racines réelles $X_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - \omega_0^2}$. Dans ce cas ("frottements importants"), la solution générale de (H) est :

$$\forall (t, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3, f_{\lambda, \mu}(t) = \lambda e^{X_1 t} + \mu e^{X_2 t} \text{ (régime apériodique)}$$

CAS N°3 — Exemple d'étude de l'oscillateur harmonique forcé, sans frottements :

résolution de $y'' + \omega_0^2 y = A \cos(\omega t)$.

Soient A , ω_0 et ω trois réels strictement positifs. Notons :

$$(E) : \quad y'' + \omega_0^2 y = A \cos(\omega t)$$

La résolution de l'équation homogène associée a déjà été faite précédemment : la solution générale de cette dernière est

$$\forall (t, K, \varphi) \in \mathbb{R}^3, f_{K, \varphi}(t) = K \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (\spadesuit)$$

Déterminons à présent une solution particulière de (E). En utilisant la méthode détaillée dans le paragraphe précédent, on s'intéresse en premier lieu à la résolution de

$$(E') : \quad y'' + \omega_0^2 y = A e^{i\omega t}$$

L'équation caractéristique associée possède deux racines complexes conjuguées $\pm i\omega_0$. On doit donc distinguer deux cas suivant que $\omega = \omega_0$ ou $\omega \neq \omega_0$.

➤ Premier cas : $\omega \neq \omega_0$. Dans ce cas, on cherche une solution particulière f_P de (E') en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = Ke^{i\omega x}$$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P''(x) = -\omega^2 Ke^{i\omega x}$. D'où f_P est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Ke^{i\omega x} (\omega_0^2 - \omega^2) = Ae^{i\omega x} \iff K = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Ainsi la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega x}$ est solution de (E'). On en déduit que sa partie réelle, la fonction :

$f_P : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega x)$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Dans le cas $\omega \neq \omega_0$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega x) + C_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x) \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

➤ Second cas : $\omega = \omega_0$. Dans cette situation, on cherche une solution particulière f_P de (E') en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = Kxe^{i\omega_0 x}$$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P'(x) = (1 + i\omega_0 x) Ke^{i\omega_0 x}$, puis : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P''(x) = (2i\omega_0 - \omega_0^2 x) Ke^{i\omega_0 x}$.

Donc f_P est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Ke^{i\omega_0 x} ((2i\omega_0 - \omega_0^2 x) + \omega^2 x) = Ae^{i\omega_0 x} \iff \forall x \in \mathbb{R}, Ke^{i\omega_0 x} (2i\omega_0) = Ae^{i\omega_0 x} \iff K = -\frac{A}{2\omega_0} i$$

Ainsi la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{A}{2\omega_0} ixe^{i\omega_0 x}$ est solution de (E'). On en déduit que sa partie réelle, la fonction

$f_P : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{A}{2\omega_0} x \sin(\omega_0 x)$ est une solution particulière de (E).

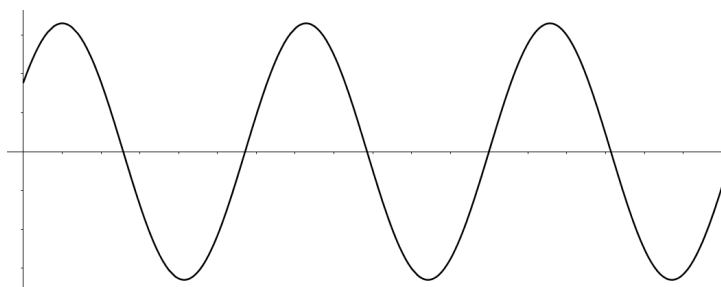
Conclusion. Dans le cas $\omega_0 = \omega$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{A}{2\omega_0} x \sin(\omega_0 x) + C_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x) \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

Remarque : dans cette dernière situation, on parle alors de phénomène de *résonance*.

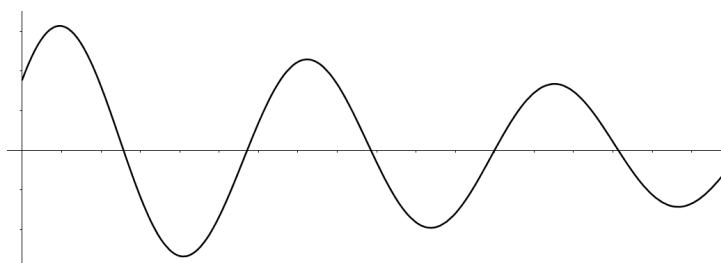
Les graphiques qui suivent font la synthèse des différents cas d'étude de l'oscillateur harmonique.

OSCILLATEUR HARMONIQUE LIBRE, SANS FROTTEMENTS



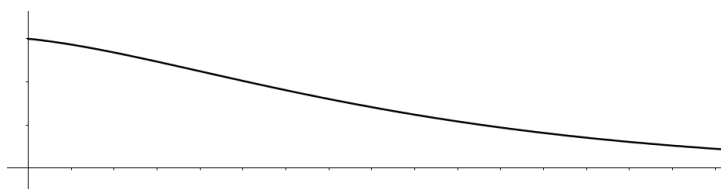
Régime périodique

OSCILLATEUR HARMONIQUE LIBRE, AVEC FROTTEMENTS (FAIBLES)



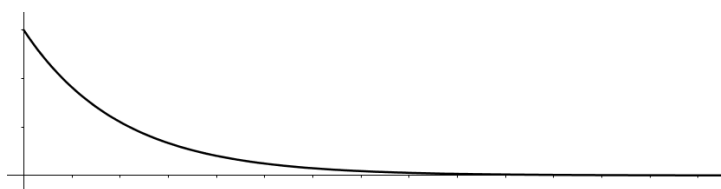
Régime pseudo-périodique

OSCILLATEUR HARMONIQUE LIBRE, AVEC FROTTEMENTS (“INTERMÉDIAIRES”)



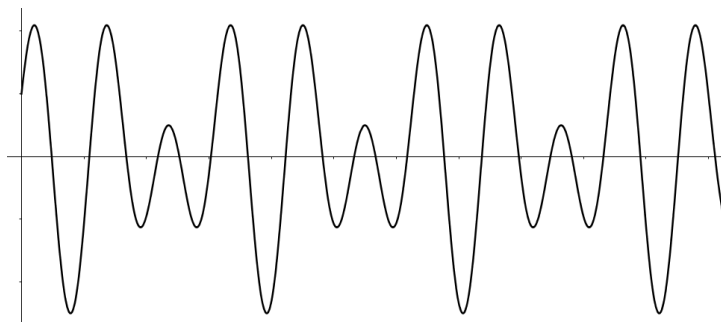
Régime critique

OSCILLATEUR HARMONIQUE LIBRE, AVEC FROTTEMENTS (IMPORTANTES)

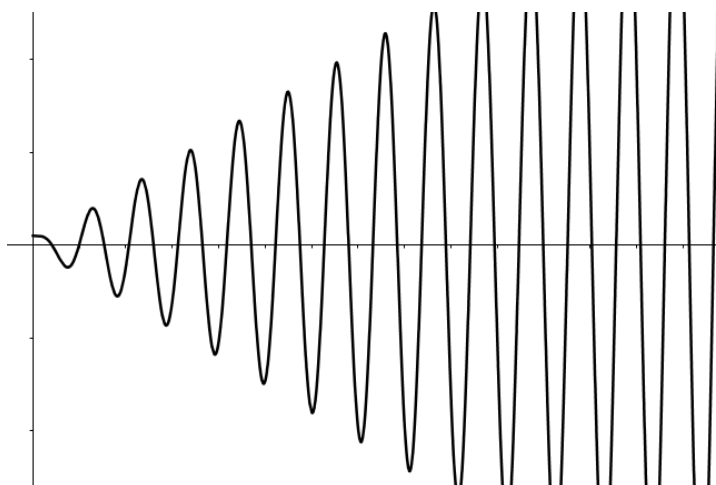


Régime aperiodique

OSCILLATEUR HARMONIQUE FORCÉ, SANS FROTTEMENTS, CAS GÉNÉRAL



OSCILLATEUR HARMONIQUE FORCÉ, SANS FROTTEMENTS, RÉSONANCE



9.3.2 Géométrie des équations différentielles

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan réel. L'ensemble des multiples de $\vec{u}$:

$$\mathbb{R} \vec{u} = \{\lambda \vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

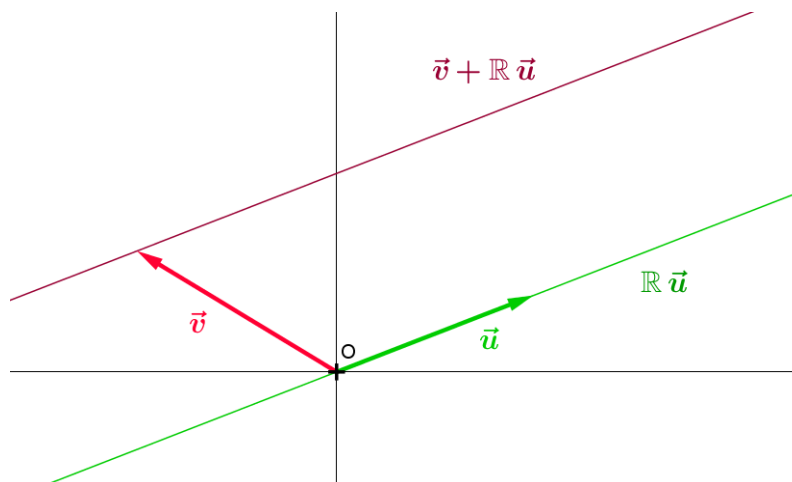
est une droite qui passe par l'origine du plan (on parle alors de droite *vectorielle*).

Considérons un second vecteur $\vec{v}$, non colinéaire à $\vec{u}$. L'image de $\mathbb{R} \vec{u}$ par la translation de vecteur $\vec{v}$ est une droite :

$$\vec{v} + \mathbb{R} \vec{u} = \{\vec{v} + \lambda \vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

qui bien évidemment ne passe plus par l'origine du plan (on parle alors de droite *affine*).

Ces considérations sont illustrées par le graphique de la page suivante.



Fin du premier acte.

Sous les hypothèses à présent usuelles, l'ensemble des solutions d'une EDL1 homogène ($ay' + by = 0$) est l'ensemble des multiples de e^{-A} , où A désigne une primitive de b/a . On peut donc noter cet ensemble :

$$\mathbb{R} e^{-A} = \{ \lambda e^{-A} / \lambda \in \mathbb{R} \}$$

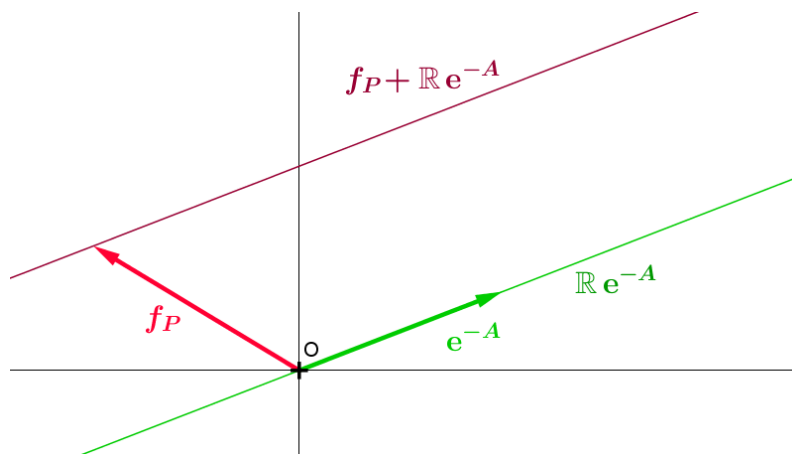
Par analogie avec la situation précédente, on dira que c'est une droite vectorielle (dans l'espace $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$).

Considérons à présent une solution particulière f_P de l'EDL1 $ay' + by = c$ (avec c non nulle). La fonction f_P est non colinéaire à e^{-A} (sinon elle serait solution de l'équation homogène). L'image de $\mathbb{R} e^{-A}$ par la translation de "vecteur" f_P

$$f_P + \mathbb{R} e^{-A} = \{ f_P + \lambda e^{-A} / \lambda \in \mathbb{R} \}$$

est une droite affine (dans l'espace $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$).

Ces considérations sont illustrées par le graphique ci-dessous...



Remarque : de façon analogue, l'ensemble des solutions d'une EDL2 sans second membre est un plan vectoriel, et l'ensemble des solutions d'une EDL2 avec second membre est un plan affine.

9.3.3 Un exemple non linéaire : équation de Bernoulli

Une **équation de Bernoulli**¹⁵ est une équation différentielle de la forme

$$(E) \quad y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$$

où α est un réel quelconque¹⁶ ; et a et b sont deux fonctions continues sur un certain intervalle de $\mathbb{R}$. Une telle équation est appelée une *équation différentielle ordinaire du premier ordre*. Elle n'est évidemment plus linéaire ; tout ce qui a été vu en cours sur les équas diffs (linéaires) ne s'applique donc plus.

Le principe de résolution est de se ramener à une équation différentielle linéaire *via* un *changement de fonction inconnue*, explicitement en posant : $z = y^{1-\alpha}$. On présente ci-dessous un exemple.

Exemple. Résolution de $(E) \quad y' + xy = xy^2$.

Supposant dans un premier temps que y ne s'annule pas, on réécrit $(E) : \frac{y'}{y^2} + x\frac{1}{y} = x$.

Le changement de fonction inconnue $Y = \frac{1}{y}$ conduit à résoudre : $-Y' + xY = x$.

Des calculs sans difficulté permettent d'en déduire que : $Y = 1 + Ke^{x^2/2}$ (avec $K \in \mathbb{R}$).

On en déduit qu'une solution de (E) est définie par une expression de la forme : $\varphi(x) = \frac{1}{1 + Ke^{x^2/2}}$.

9.3.4 Un problème : résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3

*L'objectif de ce problème est la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3 ($y''' - y = 0$). Cette résolution se fait essentiellement dans la **partie C**. Pour y parvenir, on introduit dans la **partie B** des fonctions dont les dérivées possèdent des propriétés particulières, et qui seront utilisées dans la dernière partie.*

► **PARTIE A- Cadeaux.** Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

1) On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

qui à toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ associe sa dérivée. L'application Δ est-elle injective ?

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 1 = 0$. On précisera les formes exponentielles et algébriques des solutions.

► **PARTIE B - Calculs de dérivées**

On considère les trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

15. Ainsi nommées en référence à Jakob Bernoulli (1654-1705), mathématicien suisse, que l'on ne confondra pas avec son frère Jean Bernoulli (1667-1748), également mathématicien suisse, ni avec ses neveux Nicolas Bernoulli (1695-1726), Daniel Bernoulli (1700-1782) et Jean Bernoulli dit Jean II (1710-1790), tous mathématiciens suisses.

16. On supposera quand même que α est différent de 0 et 1, puisque dans ces deux cas l'équation (E) est une équation différentielle linéaire.

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x ; \quad g_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \sin \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \cos \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \right)$$

3) Calculer g_1''' .¹⁷

4) Calculer g_2' . Vérifier qu'il existe deux réels a et b (que l'on précisera) tels que $g_2' = ag_2 + bg_3$.

5) Calculer g_3' . Vérifier qu'il existe deux réels c et d (que l'on précisera) tels que $g_3' = cg_2 + dg_3$.

6) Calculer g_2''' et g_3''' .

► PARTIE C - Une équation différentielle

Dans cette partie, on note (E_1) l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y''' = y$$

où y''' désigne la dérivée troisième de y . On note $\mathbf{S}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles solutions de (E_1) .

Remarques : Observez que comme l'équation différentielle (E_1) est linéaire d'ordre 3, les propriétés vues en cours ne vous permettent pas de la résoudre directement ; les questions ci-dessous donnent donc une méthode pour y parvenir.

Par ailleurs dans cette partie, lorsque l'on demande de "résoudre l'équation différentielle...", on entend "déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle...".

7) Montrer que les fonctions g_1 , g_2 et g_3 définies au début de la partie B sont solutions de (E_1) .

8) On pose $\mathbf{F} = \{ag_1 + bg_2 + cg_3 / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.¹⁸ Etablir que $\mathbf{F} \subset \mathbf{S}$.

9) Le but des questions suivantes est de montrer l'inclusion réciproque de celle établie dans la question précédente.

a) Soit f un élément de $\mathbf{S}$. On pose : $g = f'' + f' + f$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) \quad y' - y = 0$$

b) Donner la solution générale de l'équation différentielle (E_2) (il n'est pas indispensable de détailler cette question).

c) Résoudre l'équation différentielle : $(E_3) \quad y'' + y' + y = 0$.

d) Soit λ un nombre réel. Résoudre l'équation différentielle : $(E_4) \quad y'' + y' + y = \lambda e^x$.

e) En déduire que $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}$. Conclure.

17. On peut bien entendu noter $g_1^{(3)}$ en lieu et place et de g_1''' .

18. En d'autres termes, l'ensemble $\mathbf{F}$ est l'ensemble de ce que l'on appelle les *combinaisons linéaires* de g_1 , g_2 et g_3 , c-à-d des fonctions f s'écrivant sous la forme $f = ag_1 + bg_2 + cg_3$ avec a , b et c réels.

CORRIGÉ.**► PARTIE A - Cadeaux**

1) On a : $\Delta(\cos) = \Delta(1_{\mathbb{R}} + \cos) = -\sin$. **Conclusion.** Δ n'est pas injective.

2) $[z^3 - 1 = 0] \iff [z^3 = 1] \iff [z \in \mathbb{U}_3] \iff [z \in \{1, j, j^2\}] \iff$

$$\left| \begin{array}{l} z \in \{1, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\} \\ \text{ou encore} \\ z \in \left\{1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\} \end{array} \right.$$

► PARTIE B - Calculs de dérivées

3) Clairement : $g_1''' = g_1$.

4) La fonction g_2 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux sur la dérivabilité) et : $g_2' = -\frac{1}{2} g_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} g_3$.

5) La fonction g_3 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux sur la dérivabilité) et : $g_3' = -\frac{1}{2} g_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} g_2$.

6) On dérive la relation de la question 4 pour obtenir la dérivée seconde de g_2 :

$$\begin{aligned} g_2'' &= -\frac{1}{2} g_2' + \frac{\sqrt{3}}{2} g_3' \iff g_2'' = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} g_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} g_3 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2} g_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} g_2 \right) \\ &\iff g_2'' = -\frac{1}{2} g_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} g_3 \end{aligned}$$

Et on redérive :

$$g_2''' = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} g_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} g_3 \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2} g_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} g_2 \right) \iff \boxed{g_2''' = g_2}$$

Calculs analogues pour établir que $g_3''' = g_3$.

SOLUTION ALTERNATIVE — On peut calculer g_2''' à l'aide de la formule de Leibniz. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g_2'''(x) &= \frac{1}{8} \left[-e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + 3\sqrt{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + 9e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) - 3\sqrt{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right] \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g_2'''(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \iff g_2''' = g_2. \end{aligned}$$

► PARTIE C - Une équation différentielle

7) D'après les questions 3 et 6, on a : $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, g_i''' = g_i$.

8) Soit $f \in \mathbf{F}$. Il existe trois réels a, b et c tels que : $f = ag_1 + bg_2 + cg_3$. On a alors (essentiellement par linéarité de la dérivation) :

$$f''' = (ag_1 + bg_2 + cg_3)''' = ag_1''' + bg_2''' + cg_3''' = ag_1 + bg_2 + cg_3 = f. \text{ Il s'ensuit que } f \in \mathbf{S}.$$

En résumé : $[f \in \mathbf{F}] \implies [f \in \mathbf{S}]$. Par conséquent : $\boxed{\mathbf{F} \subset \mathbf{S}}$.

9) a) Avec les hypothèses de l'énoncé : $g' = f''' + f'' + f'$ et comme f est solution de (E_1) , on a $f''' = f$, d'où : $g' = f'' + f' + f$, soit : $g' = g$. Ainsi $\boxed{g \text{ est solution de l'équation } (E_2) : y' - y = 0}$.

b) $\boxed{\text{La solution générale sur } \mathbb{R} \text{ de } (E_2) \text{ est } f_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^x \quad (\lambda \in \mathbb{R})}$.

c) L'équation caractéristique associée à l'équation (E_3) est : $r^2 + r + 1 = 0$. Cette équation possède deux solutions complexes conjuguées : $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.¹⁹ Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ sont donc les fonctions :

$$\boxed{f_{\lambda,\mu} : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x/2} \left(\lambda \cos \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \right) + \mu \sin \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \lambda g_3(x) + \mu g_2(x) \quad (\lambda, \mu \text{ réels})}.$$

d) On observe que $\frac{\lambda}{3} g_1$ est une solution particulière de (E_4) pour obtenir directement que les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^x$ sont les fonctions :

$$\boxed{f_{\alpha,\mu} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\lambda}{3} e^x + e^{-x/2} \left(\alpha \cos \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \right) + \mu \sin \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{\lambda}{3} g_1(x) + \alpha g_3(x) + \mu g_2(x) \quad (\alpha, \mu \text{ réels})}.$$

e) D'après les questions précédentes, si f est solution de (E_1) , alors il existe trois réels (λ, α, μ) tels que : $f = \frac{\lambda}{3} g_1 + \alpha g_3 + \mu g_2$. Donc : $f \in \mathbf{F}$. On vient donc de prouver l'inclusion : $\boxed{\mathbf{S} \subset \mathbf{F}}$.

On déduit de cette inclusion et de celle établie dans la question 8) que : $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Conclusion : les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''' = y$ sont les fonctions $f_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ avec :

$$f_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 \quad (\alpha_1, \alpha_2 \text{ et } \alpha_3 \text{ réels})$$

19. Vous avez évidemment reconnu $j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = e^{-2i\pi/3}$.

Index

Bernoulli

Daniel, 27

Jakob, 27

Jean, 27

Jean II, 27

Nicolas, 27

demi-vie, 4

EDL1, 1

avec second membre, 1

charge d'un condensateur, 5

désintégration radioactive, 3

homogène, 1

associée, 1

sans second membre, 1

EDL2, 9

avec second membre, 9

homogène, 9

associée, 9

sans second membre, 9

intervalle

de résolution d'une EDL, 2

oscillateur harmonique, 21

pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$

pour les EDL, 18

principe de superposition des solutions, 16

version générale, 17

problème

de Cauchy, 3

régime

apériodique, 22

critique, 22

pseudo-périodique, 22

périodique, 21

résonance, 23

théorème

existence d'une solution pour une EDL1 avec second membre, 7

existence et unicité d'une solution pour un problème de Cauchy d'ordre 1, 9

solution générale

d'une EDL1 homogène, 2

d'une EDL2 homogène (cas complexe), 11

d'une EDL2 homogène (cas réel), 13

structure de l'ensemble des solutions d'une EDL1, 1

structure de l'ensemble des solutions d'une EDL2, 10

équation

caractéristique

d'une EDL2, 11

de Bernoulli, 27

différentielle

ordinaire, 27

équation différentielle

linéaire

d'ordre 1, 1

d'ordre 2, 9